HƏMİDULLA İSRAFİL OĞLU ASLANOV

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Rusiya Təbiət Elmləri Akademiyasının həqiqi üzvü

FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ VƏ FUNKSİONAL ANALİZ

(Dərs vəsaiti)

Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının
Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun
Elmi Şurasının 25.12.2019 tarixli
15 saylı qərarına əsasən çap edilir.

Bakı – 2020

Elmi redaktor: **MƏMMƏD BAYRAMOĞLU**
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Rəy verənlər: **HƏMZAĞA ORUCOV**
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

SABİR MİRZƏYEV
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

ƏDALƏT AXUNDOV
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor

TELMAN MƏLİKOV
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

ELŞAD EYVAZOV
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor

Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov
Funksiyalar nəzəriyyəsi
və
Funksional analiz
(Dərs vəsaiti)

Bakı, «MBM» nəşriyyatı - 2020,
527 səh.

Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz fənninə həsr olunmuş bu kitab müəllifin 40 ildən artıq bir müddətdə respublikanın müxtəlif universitetlərində, əsasən son illərdə Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika Fakültəsində oxuduğu mühazirələr əsasında tərtib edilmişdir.

Kitabda nəzəri hissənin mənimsənilməsinə kömək məqsədi ilə hər bölməyə aid misal və məsələlərin həlli nümunələri, hər fəslin sonunda isə sərbəst işləmək üçün tapşırıqlar verilmişdir.

Kitabdan Universitetlərin riyaziyyat ixtisaslarında təhsil alan bakalavr və magistr tələbələr, doktorantlar, müəllimlər, elmi-tədqiqat institutlarının əməkdaşları da istifadə edə bilərlər.

Ustamız bilirdi hər bir peşəni,
Mənə qələm verdi, ona tişəni.
<u>Nizami Gəncəvi</u>

Unudulmaz müəllimimiz, görkəmli riyaziyyatçı,
Azərbaycan riyaziyyatının sönməz ulduzu,
akademik Mirabbas Qasımovun əziz xatirəsinə
ithaf edirəm.
Müəllif

ÖN SÖZ

Həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz müasir riyaziyyatın mühüm və sürətlə inkişaf edən bir sahəsidir. Ona görə də bu fənnin riyaziyyat fakultələrinin tələbələrinə tədrisi çox vacibdir. Bu fənnin tədrisi prosesində tələbələr riyazi analiz kursundan məlum olan bəzi anlayışların ümumiləşməsi və daha mücərrəd formaları ilə tanış olur, daha dərin biliklər sisteminə yiyələnirlər. "Analiz III" adı altında birləşən həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analizin vahid bir kurs şəklində tədris olunması ideyasını ilk dəfə XX əsrin böyük riyaziyyatçılarından biri A.N.Kolmogorov irəli sürmüş və 1946/47-ci tədris ilindən başlayaraq Moskva Dövlət Universitetinin mexanika-riyaziyyat fakültəsində bu fənni tədris etmişdir.

Bu fənnin proqramı onun rəhbərliyi ilə görkəmli riyaziyyatçıların iştirakı ilə tərtib edilmiş, 1954-cü ildə S.V.Fomin ilə birlikdə bu fənn üzrə ilk dəfə dərs vəsaiti hazırlanmış və nəşr edilmişdir. Bu dərs vəsaiti demək olar ki, həmin vaxtdan etibarən Sovetlər birliyində həmin fənn üzrə əsas vəsait olmuşdur.

Məlum olduğu kimi, çoxluqlar və funksiyalar nəzəriyyəsi XIX əsrin sonlarında təşəkkül tapmağa başlamışdır. Bu sahənin inkişafında görkəmli fransız riyaziyyatçısı Anri Lebeq mühüm rol oynamışdır. Onun tərəfindən çoxluqların ölçüsü və ölçülən funksiyalar nəzəriyyəsi, Lebeq inteqralı və digər mühüm sahələr inkişaf etdirilmişdir.

Funksional analiz, keçən əsrin 30-40-cı illərindən başlayaraq inkişaf etmiş, riyazi analiz, həndəsə və xətti cəbrin ideya və metodlarının qarşılıqlı əlaqəsi və sonsuz ölçülü fəzalara ümumiləşməsi nəticəsində təşəkkül tapmışdır. Funksional analizin bir elm kimi formalaşmasında görkəmli polyak riyaziyyatçısı S.Banaxın misilsiz xidmətləri olmuşdur. Onun "Funksional analiz kursu" adlı monaqrafiyası 1948-ci ildə ukrayna dilinə tərcümə edilmişdir. Keçmiş Sovetlər Birliyində funksional analizə aid ilk monoqrafiya 1949-cu ildə görkəmli azərbaycan riyaziyyatçısı akademik Z.İ.Xəlilov tərəfindən yazılmışdır. Belə bir əsərin nəşri bu fənnin inkişafında mühüm rol oynamışdır. Yaranma tarixinin nisbətən qısa olmasına baxmayaraq, keçən müddət ərzində bu elm sahəsi xeyli sürətlə inkişaf etmişdir. Bu inkişaf əsasən iki istiqamətdə aparılmışdır: bir tərəfdən klassik analiz vasitəsi ilə həll olunmayan bir çox mühüm məsələlərin həlli, digər tərəfdən isə funksional analizin klassik nəzəriyyəsinin ümumiləşməsi, daha mücərrəd şəkildə tətbiq edilmişdir.

Müasir dövrdə funksional analizin metodları nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın müxtəlif sahələrində müvəffəqiyyətlə tətbiq edilir. Funksional analiz üsulları tətbiq edilmədən diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, idarəetmə nəzəriyyəsi, hesablama üsulları və digər mühüm elm sahələrinin son illərdəki sürətlə inkişafı mümkün olmazdı. Ona görə də müasir dövrdə funksional analiz riyazi təhsilin əsas elementlərindən biridir və onun əsaslarının tədrisi universitetlərin riyaziyyat ixtisaslarının tədris planlarına daxil edilmişdir.

Funksional analiz fənninə aid azərbaycan dilində ilk dərslik 1978-ci ildə prof. Ə.S.Həbibzadə tərəfindən yazılmışdır. Kitabın nəşrindən keçən müddətdə həm bu fənnin tədrisində yaranmış dəyişikliklər, həm də respublikada aparılmış təhsil islahatı ilə əlaqədar olaraq yaranmış vəziyyət azərbaycan dilində yeni dərs vəsaitlərinin yaranması zərurətini yaratmışdır.

Təqdim edilmiş dərs vəsaiti yaranmış bu boşluğu qismən doldurmaq məqsədi ilə yazılmışdır.

Məlum olduğu kimi dərslik və ya dərs vəsaitinin yazılması kifayət qədər mürəkkəb və çətin bir məsələdir. Vəsaitin məzmununun necə olması, quruluşu, dili son nəticədə bu fənnin tədrisini və gələcək riyaziyyat müəlliminin hazırlıq səviyyəsini təyin edir.

Müasir dövrdə tələbə hazırlığının əsas şərti tələbələrin sərbəst işinin təşkili olduğu bir dövrdə keyfiyyətli dərs vəsaitinin olması mühüm amildir. Ona görə də tədrisin keyfiyyətinin yüksək olmasını təmin etmək üçün tələbənin ixtiyarında bütün fənni əhatə edən bir neçə dərs vəsaiti olmalıdır. Aydındır ki, yalnız bir vəsait predmeti tam əhatə edə bilməz.

Qeyd edək ki, rus dilində funksional analiz fənninə aid çoxlu sayda dərslik və dərs vəsaiti mövcuddur. A.N.Kolmoqorov və S.V.Fomin "Funksiyalar nəzəriyyəsinin elementləri və funksional analiz", L.A.Lüsternik və V.İ.Sobolev "Funksional analizin elementləri", L.V.Kantoroviç və Q.P.Akilov "Funksional analiz", V.A.Trenoqin "Funksional analiz" və digər müəlliflərin funksional analizə aid kitabları vardır.

Dərs vəsaiti tərtib edilərkən müəllif tərəfindən göstərilən ədəbiyyatlardan geniş şəkildə istifadə edilmişdir. Bütün bunlara baxmayaraq təbii ki, funksional analizin bir çox bölmələri vəsaitə daxil olmamışdır. Ümumiyyətlə, hesab edirəm ki, funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analizə aid olan bir vəsaitdə geniş bir elmi sahəni tam əhatə etmək çətin bir vəzifədir.

Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analizə aid nəzəri materialların şərh edildiyi yuxarıda adları çəkilən monoqrafiyalar olmasına baxmayaraq praktik məşğələlər üçün A.B.Antonoviç, P.H.Knyazyeva, Y.V.Radino “Funksional analizə aid məsələ və tapşırıqlar”, A.A.Kirillov və A.D.Qvişiani “Funksional analizə aid toerem və məsələlər”, V.A.Petrov, N.Y.Vilenkin “Funksional analizin elementləri məsələlərdə” V.A.Trenoqin, B.M.Pisarevskiy, T.S.Soboleva “Funksional analizə aid məsələ və tapşırıqlar”, Y.S.Ocan “Riyazi analizdən məsələlər”, S.A.Telyakoski “Həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsindən məsələlər”, V.V.Qorodetskiy, N.İ.Naqnibida, P.P.Nastasiyev “Funksional analizdə məsələ həlli üsulları” dərs vəsaitləri dəyərli vasitələrdir.

Təqdim edilmiş dərs vəsaiti iki hissədən ibarətdir.

Birinci hissə doqquz fəsildən ibarətdir və çoxluqlar nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsinə həsr edilmişdir.

Birinci fəsildə çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsas anlayışları verilmiş, onlar üzərində əməllər, çoxluqların ekvivalentliyi və onun xassələri, çoxluğun gücü və güclərin müqayisəsi, kontinium güclü çoxluqlar, Kantor çoxluqları və digər anlayışlar hərtərəfli şərh edilmişdir.

İkinci fəsildə ədəd oxu üzərində açıq və qapalı çoxluqlar, onların əsas xassələri, quruluşu haqqında əsas teoremlər verilmişdir.

Üçüncü fəsildə çoxluqların ölçüsü anlayışı verilmiş, Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar sinifi müəyyən edilmişdir. Çoxluqlar nəzəriyyəsinin bəzi problemləri göstərilmiş, çoxluğun Jordan ölçüsü anlayışı verilmişdir.

Dördüncü fəsildə ölçülən funksiyanın tərifi, ölçülən funksiyaların əsas xassələri verilmişdir. Ölçülən funksiyalar ardıcıllığının limiti və onun xassələri verilmiş, ölçülən funksiyaların quruluşu haqqında Riss, Yeqorov, Luzin teoremləri göstərilmişdir.

Beşinci fəsildə Lebeq inteqralı anlayışı verilmiş, onun əsas xassələri isbat edilmişdir. Lebeq inteqralı altında limitə keçmə teoremi, Riman və Lebeq inteqralları müqayisə edilmişdir.

Altıncı fəsildə cəmlənən və kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar sinifləri təyin edilmiş, onların əsas xassələri göstərilmişdir. Cəmlənən funksiyalar ardıcıllığının ölçüyə görə, orta, orta kvadratik mənada yığılması, onların müqayisəsi verilmişdir. $L_2(a,b)$ fəzasında ortoqonal sistemlər, qapalı və tam sistemlər təyin edilmişdir. $L_p(a,b),\ p \geq 1$ fəzası təyin olunmuşdur.

Yeddini fəsildə monoton funksiyanın kəsilmə nöqtələri haqqında teorem, sıçrayış və Kantor funksiyaları, məhdud variasiyalı funksiyalar və onların əsas xassələri, Riman-Stiltes və Lebeq-Stiltes inteqralları, onların xassələri və hesablanması üsulları verilmişdir.

Səkkizinci fəsildə çox mühüm funksiyalar sinifi olan mütləq kəsilməz funksiyalar, onların əsas xassələri verilmiş, mütləq kəsilməz funksiyaların diferensial xassələri öyrənilmişdir. Qeyri-müəyyən Lebeq inteqralı və onun mütləq kəsilməzliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

Doqquzuncu fəsildə Sobolev tipli fəazalar və daxilolma teoremləri öyrənilmişdir. Ümumiləşmiş törəmələr və onların adi törəmələrlə əlaqəsi və əsas xassələri isbat olunmuşdur. Daxilolma operatorunun məhdudluğu və kompaktlığı haqqında teoremlər verilmişdir.

Kitabın ikinci hissəsi on beş fəsildən ibarətdir və bu fəsildə funksional analizin nəzəri və praktik məsələləri şərh edilmişdir.

Onuncu fəsildə xətti fəzalar, xətti fəzalara aid əsas anlayışlar, xətti fəzanın bazisi, xətti fəzanın ölçüsü, xətti altfəzalar və xətti çoxobrazlılar, xətti fəzanın altfəzaların düz cəminə ayrılışı, xətti fəzaların izomorfluğu, qabarıq çoxluqlar mövzuları şərh edilmişdir. Xətti fəzalara aid çox sayda çalışmalar verilmişdir.

On birinci fəsildə metrik fəzalar, metrik fəzalarda ardıcıllıqların limiti, separabel fəzalar, tam metrik fəzalar, metrik fəzaların tamamlanması, bir-birinə daxil olan kürələr haqqında teorem, kompakt çoxluqlar və topoloji fəzalar haqqında məlumat verilmişdir. Metrik fəzalara aid çox sayda məsələlər həll edilmiş və tapşırıqlar verilmişdir.

On ikinci fəsildə xətti normalaşmış fəzalar, Banax fəzaları, normalaşmış fəzaların izomorfizmi, normalaşmış fəzalarda kompakt çoxluqlar və digər məsələlər şərh edilmişdir. Fəslin sonunda məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar verilmişdir.

On üçüncü fəsili Hilbert fəzalarının öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Bu fəsildə skalyar hasil, onun xassələri, ortonormal vektorlar sistemi, Bessel bərabərsizliyi, qapalı sistemlər, altfəza, ortoqonal tamamlayıcı və düz cəm anlayışı haqqında məlumat verilmişdir. Evklid fəzası olmayan normalaşmış fəzalara misallar göstərilmişdir. Hilbert fəzasına aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar göstərilmişdir.

On dördüncü fəsildə xətti məhdud və xətti kəsilməz operatorlar nəzəriyyəsi verilmişdir. Çoxsaylı məsələlər tərtib edilmişdir.

On beşinci fəsildə tərs operatorlar, tərs operatorun varlığı şərtləri və tərs operatorlara aid məsələ həlli nümunələri verilmişdir.

On altıncı fəsildə xətti funksional analizin əsas prinsipləri, müntəzəm məhdudluq prinsipi, Banax-Şteynhauz teoremi, xətti operatorların davamı haqqında teoremlər isbat edilmiş, operatorlar ardıcıllıqlarının güclü və zəif mənada yığılması anlayışları şərh edilmişdir. Məsələ həlli nümunələri verilmişdir.

On yeddinci fəsildə qapalı operatorlar, operatorun qrafiki, qapalı qrafik haqqında Banax teoremi və digər anlayışlar verilmişdir.

On səkkizinci fəsildə xətti funksionallar, funksionallar ardıcıllığının yığılması, qoşma fəzalar, Hilbert fəzasında xətti funksionalın ümumi şəkli haqqında teorem, refleksiv fəzalar və digər anlayışlar verilmişdir. Xətti funksionallara aid nümunələr və tapşırıqlar verilmişdir.

On doqquzuncu fəsildə öz-özünə qoşma operatorlar nəzəriyyəsinin əsas anlayışları, unitar operatorlar, ortoqonal proyeksiya operatorları və digər anlayışlar şərh edilmişdir.

İyirminci fəsildə tamam kəsilməz operatorlar, onların əsas xassələri, Banax fəzasında tamam kəsilməz operatorların sonlu ölçülü operatorlarla yaxınlaşması haqqında teorem isbat edilmişdir.

İyirmi birinci fəsildə xətti operatorların məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları, xətti operatorların rezolventası və spektri, öz-özünə qoşma operatorların spektral ayrılışı, öz-özünə qoşma operatordan asılı fnksiyalar, qeyri-məhdud öz-özünə qoşma operatorların spektral ayrılışı haqqında teoremlər verilmişdir.

Nəzəri məlumatların mənimsənilməsi məqsədi ilə məsələlər həll edilmişdir.

İyirmi ikinci fəsildə sıxılmış inikas prinsipi, onun ümumiləşmələri haqqında teorem isbat edilmiş, cəbri tənliklərə və xətti tənliklərin həllinə, diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllinə və digər məsələlərin həllinə tətbiqləri göstərilmişdir.

İyirmi üçüncü fəsildə operatorlar qrupu və yarımqrupların öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Operatorlardan asılı eksponensial funksiyalar qrupu təyin edilmiş, onun bəzi xassələri öyrənilmişdir. Banax fəzasında C_0 yarımqruplar sinfinin əsas xassələri öyrənilmiş, Hill-İosida teoreminin isbatı verilmişdir. Hər bir yarımqrupun törədici operator vasitəsilə birqiymətli təyin olunması isbat edilmişdir. Sürüşmə tip operatorlar qrupunun doğuran operatorunu diferensiallanma operatoru olması göstərilmiş, onun funksiyanın ayrılmış fərqləri ilə əlaqəsi müəyyən edilmişdir. Unitar operatorlar qrupu və yarımqrupları öyrənilmiş, Stoun teoremi isbat edilmişdir. Fəslin sonunda öz-özünə qoşma operatorlar qrupu və yarımqrupları haqqında məlumat verilmiş S.Nad və Hille teoremi isbat olunmuşdur.

İyirmi dördüncü fəsildə Banax fəzalarında diferensial tənliklərin həlli üsulları haqqında məlumat verilmişdir. Qalyorkin və Furye üsulları, fərqlər sxemi, kiçik parametr üsulu, Laplas çevirməsi üsulunun tətbiqləri verilmişdir.

İyirmi dördüncü fəsildə Şturm-Liuvill operatorunun spektral nəzəriyyəsi haqqında məlumat verilmişdir. Ştrum-Liuvill operatorunun məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının əsas xassələri göstərilmiş, məxsusi funksiyaların sıfırları haqqında teorem isbat edilmişdir. Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi funksiyalarının məxsusi funksiyalara görə ayrılış teoremləri isbat edilmişdir. Operatorun requlyarlaşmış izi üçün düstur verilmiş, spektrinin diskretliyi üçün kafi şərtlər göstərilmişdir.

Dərs vəsaiti müəllifin respublikanın müxtəlif ali məktəblərində 40 illik pedaqoji fəaliyyəti, əsasən son illərdə Bakı Dövlət Universitetinin tətbiqi riyaziyyat və Kibernetika fakultəsində oxuduğu mühazirələr əsasında yazılmışdır.

Müəllif elmi fəaliyyəti dövründə az-çox qazandığı uğurlara görə və kitabın yazılmasında göstərdiyi mənəvi dəstəyə görə elmi rəhbəri və kitabın elmi redaktoru, tanınmış riyaziyyatçı professor Məmməd Bayramoğluna dərindən təşəkkür etməyi özünə borc bilir. Kitab haqqında öz dəyərli rəylərini bildirmiş professor Həmzağa Orucova, professor Sabir Mirzəyevə, professor Elşad Eyvazova və professor Ədalət Axundova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Sonda, mənim sağlamlığımın qayğısını çəkən, mənə mənəvi köməyini əsirgəməyən cəfakeş və vəfalı həyat yoldaşım doktor Elza xanıma ürəkdən təşəkkür etməyi özümə borc bilirəm.

Kitab haqqında öz tənqidi fikirlərini bildirən bütün oxuculara əvvəlcədən öz təşəkkürümü bildirirəm.

I HİSSƏ
I FƏSİL. SONSUZ ÇOXLUQLAR

1.1 Çoxluq anlayışı. Çoxluqlar üzərində əməllər.

Çoxluq riyaziyyatın ilkin anlayışlarından biridir və ona dəqiq tərif verilmir. Çoxluq dedikdə müəyyən xassayə malik olan əşyalar və ya elementlər külliyatı (toplusu) başa düşülür. Məsələn auditoriyadakı tələbələr çoxluğu, kitbxanadakı kitablar çoxluğu və s. Riyazi analiz kursunda natural, rasional və həqiqi ədədlər çoxluğu, kompleks ədələr çoxluğu, həndəsə kursunda eyni mərkəzə malik çevrələr çoxluğu, diferensial tənliklər kursunda hər hansı diferensial tənliyin bütün həllər çoxluğu ilə tanışıq.

Çoxluqları adətən böyük $A, B, C, ...$ hərfləri ilə, onların elementlərini isə kiçik $a, b, c, ...$ yaxud $x, y, z, ...$ kimi işarə edirik. Hər hansı a elementinin A çoxluğunun elementi olması faktını, yəni a elementinin A çoxluğuna daxil olması $a \in A$ kimi işarə olunur. a elementinin A çoxluğuna daxil olmaması isə $a \,\overline{\in}\, A$, yaxud $a \notin A$ kimi işarə olunur. $N = \{1,2,3,...,n,...\}$ ilə natural ədədlər çoxluğunu işarə edirik. Aydındır ki, $5 \in N$ amma $\frac{3}{4} \,\overline{\in}\, N, \sqrt{3} \,\overline{\in}\, N.$ Q ilə bütün rasional ədədlər çoxluğu işarə edilir. Q çoxluğunun elementləri bütün $\frac{m}{n},\ n \neq 0,\ m, n \in N$ şəklində ədədlərdən ibarətdir. R ilə bütün həqiqi ədədlər çoxluğu işarə olunur. Heç bir elementi olmayan çoxluqlara boş çoxluq deyilir. Məsələn $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin bütün həqiqi köklərindən ibarət olan çoxluq boş çoxluqdur. Boş çoxluq $\varnothing$ kimi işarə edilir. Əgər A çoxluğuna daxil olan hər bir element eyni zamanda B çoxluğuna da daxil olarsa, onda A çoxluğu B çoxluğunun alt çoxluğu adlanır və $A \subset B$ kimi işarə edilir. Məsələn, $N \subset R$, $Q \subset R$. Eyni elementlərdən düzəlmiş çoxluqlar bərabər çoxluqlar adlanır və $A = B$ kimi işarə edilir. Əgər $A \subset B$ və $B \subset A$ münasibələri olarsa, bu halda $A = B$ hesab edilir. Yəni, A çoxluğuna daxil olan hər bir element B çoxluğuna, eləcədə B çoxluğuna daxil olan hər bir element A çoxluğuna daxildir. Məsələn, $A = \{3,4\}$ və B çoxluğu $x^2 - 7x + 12 = 0$ tənliyinin köklərindən ibarət olarsa, aydındır ki, $A = B$.

Tərif 1. Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. A və B çoxluqlarına daxil olan bütün elementlərdən təşkil edilmiş və başqa heç bir elementə malik olmayan C çoxluğuna bu çoxluqların birləşməsi yaxud cəmi deyilir. $C = A \cup B$ və ya $C = A + B$ kimi işarə edilir.

İstənilən sayda çoxluqların cəmi də bu qayda ilə təyin olunur və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$C = A_1 + A_2 + ... + A_n \text{ yaxud } C = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

Məsələn, $A=\{1,3,6,8\}$, $B=\{2,3,4,5,7,9\}$ çoxluqlarının birləşməsi

$$C=A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

kimidir.

Asanlıqla görmək olar ki, əgər $A\subset B$ olarsa, bu halda $A+B=B$ olar. Xüsusi halda $A=B$ olarsa, onda $A+A=A$ olar.

Tərif 2. Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. A və B çoxluqlarının hər ikisinə daxil olan ortaq elementlərdən təşkil edilmiş və başqa heç bir elementə malik olmayan C çoxluğuna bu çoxluqların kəsişməsi yaxud hasili deyilir. $C = A\cap B$ və ya $C = AB$ kimi işarə edilir.

Məsələn, $A=\{2,4,6,8,...,2n,...\}$, $B=\{3,6,9,...,3n,...\}$ olarsa, $C=A\cap B=\{6,12,18,...,6n,....\}$ olar.

Tərif 3. Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olmayan bütün elementlərindən ibarət olan və başqa heç bir elementə malik olmayan çoxluğa A və B çoxluqlarının fərqi deyilir və $C = A|B$ və ya $C = A - B$ kimi işarə edilir.

Məsələn, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ çoxluqları üçün

$$A|B=\{1,2\},\quad B|A=\{5,6\}$$

kimidir.

Tərif 4. Tutaq ki, A və B çoxluqlar verilmişdir. $A|B$ və $B|A$ çoxluqlarının birləşməsindən ibarət olan çoxluğa bu çoxluqların simmetrik fərqi deyilir və $A \vartriangle B$ kimi işarə edilir. Tərifə görə

$$A\Delta B=(A|B)\cup(B|A)$$

Yuxarıda baxdığımız $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ misalında $A|B=\{1,2\}$, $B|A=\{5,6\}$ olduğunu nəzərə alsaq, onda $A\Delta B=\{1,2,5,6\}$ olduğunu alarıq. Eləcədə $A=[0,4]$, $B=[3,6]$ olarsa, bu halda $A|B=[0,3)$, $B|A=[4,6)$ olduğunu görərik. Nəticədə $A\Delta B=[0,3)\cup[4,6)$ alarıq.

Tərif 5. Tutaq ki, S çoxluğu və bu çoxluğa daxil olan A çoxluğu verilmişdir $A\subset S$. $S|A$ çoxluğuna A çoxluğunun S çoxluğuna kimi tamamlayıcı çoxluğu deyilir və $C_S A$ kimi işarə olunur. Məsələn, $S=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{c,e\}$ olarsa, göründüyü kimi $A\subset S$ və $C_S A=\{a,b,d\}$ olar. Eləcədə $S=[0,3]$, $A=[1,2]$ olarsa, onda $C_S A=[0,1)\cup(2,3]$ olar.

İkilik prinsipi adlanan aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

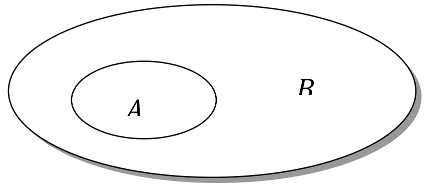
Əgər $A,B\subset S$ çoxluqları verilmişsə, bu halda

a) $C_S(A\cup B)=C_S A\cap C_S B$

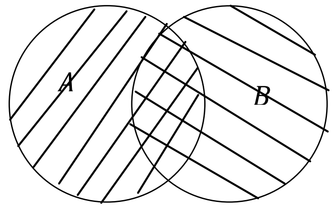
b) $C_S(A\cap B)=C_S A\cup C_S B$

Çoxluqlar üzərində göstərilən əməlləri Eyler-Venn diaqramı adlanan aşağıdakı sxem vasitəsilə də təsvir etmək olar.

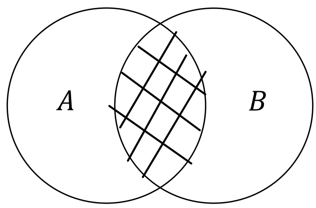
1) Alt çoxluq $A \subset B$



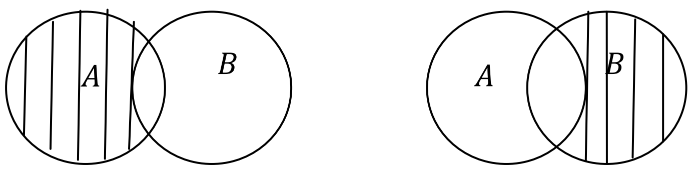
2) Çoxluqların birləşməsi $A \cup B$



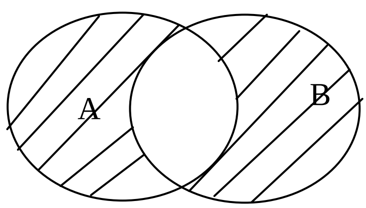
3) Çoxluqların kəşisməsi $A \cap B$



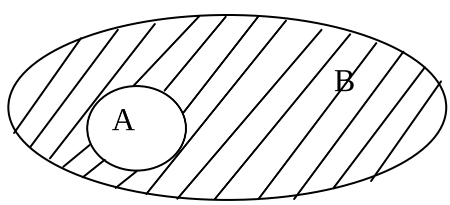
4) Çoxluqların fərqi $A|B$ $B|A$



5) Simmetrik fərq $A\Delta B$



6) Tamamlayıcı çoxluq $C_B A$



1.2. Çoxluqların ekvivalentliyi.

Çoxluqları hərtərəfli öyrənmək üçün əvvəlcə sonlu və sonsuz çoxluq anlayışlarını müəyyən etmək lazımdır.

Tərif 1. Əgər verilmiş çoxluğun elementləri sayı hər hansı natural ədədlə ifadə edilə bilərsə, onda həmin çoxluq sonlu çoxluq adlanır. Bu halda həmin natural ədədin məlum olub-olmamasının əhəmiyyəti yoxdur. Məsələn, verilmiş kitabın vərəqləri sayı, hər hansı kitabxanada olan bütün kitablar səhifələri sayı, teleskop vasitəsilə görünən bütün ulduz və planetlər, yük vaqonunda aparılan qum dənələri sonlu çoxluqdur.

Riyaziyyatda bəzi hallarda sonlu olmayan çoxluqlara da rast gəlinir. Belə çoxluqlar sonsuz çoxluqlar adlanır. Sonsuz çoxluqların elementləri sayını heç bir natural ədədlə ifadə etmək mümkün deyildir. Məsələn, bütün rasional ədədlər çoxluğu, müstəvi üzərindəki bütün nöqtələr çoxluğu, bütün kəsilməz funksiyalar çoxluğu, bir nöqtədə kəsişən bütün düz xətlər çoxluğu və s.

Fərz edək ki, A və B hən hansı sonlu çoxluqlardır. Bu çoxluqların elementlərini saymaqla onların eyni sayda, yaxud müxtəlif sayda elementə malik olub olmadığını müəyyən etmək olar. Bu məsələni baxılan çoxluqların elementlərini saymadan da müəyyən etmək olar. Tutaq ki, $A=\{a,b,c,d,e\}$və $B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$. Bu çoxluqların elementlərini aşağıdakı kimi yazaq:

A	a	b	c	d	e
B	α	β	γ	δ	ε

Heç bir sayma aparmadan belə bu çoxluqların eyni sayda elementə malik olduğunu görürük. Eyni qayda ilə sinifdəki şagirdlər ilə sinifdəki stulların sayının eyni olub-olmadığını bilmək üçün hər şagirdi bir stulda əyləşdirmək kifayətdir. Eləcədə hər bir oğlanın arxasında bir qız dayanmaq şərti ilə olimpiadada iştirak edən şagirdləri düzməklə onların sayını heç bir sayma aparmadan da müqayisə etmək olar. Bu üsul müqayisə üsulu adlanır.

Göründüyü kimi sayma üsulu yalnız sonlu çoxluqlar üçün tətbiq edilə bilər. Bu üsul sonsuz çoxluqlar üçün mümkün deyil. Amma müqayisə üsulu həm sonlu, həm də sonsuz çoxluqlar üçün tətbiq edilə bilər. Müqayisə üsulunun əsas mahiyyəti ondan ibarətdir ki, bu halda hər hansı bir çoxluğun hər bir elementinə qarşı digər çoxluğun yeganə elementi qarşı qoyulur və tərsinə digər çoxluğun hər bir elementinə əvvəlki çoxluğun yeganə elementi qarşı qoyulur. Bu üsulun gücü onun sonsuz çoxluqlara da tətbiq oluna bilməsidir. Məsələn, bütün natural ədədlər çoxluğu N ilə $\frac{1}{n}$, $n \in N$ şəklində bütün ədədlər çoxluğu M -in elementlərinin "sayı" bərabərdir. Buna N və M çoxluqların elementlərini aşağıdakı şəkildə yerdəyişməklə əmin olmaq mümkündür:

M	1	2	3	4	5	$\dots$
N	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$

Tərif 2. Tutaq ki, A və B çoxluqlar verilmişdir. Əgər istənilən $a \in A$ elementinə qarşı yeganə $b \in B$ elementi qarşı qoyularsa və eləcə də istənilən $b \in B$ elementi yeganə $a \in A$ elementinə qarşı qoyularsa, onda φ qaydası A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq adlanır.

Tərif 3. Əgər A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkün olarsa, onda bu çoxluqlar ekvivalent yaxud eynigüclü çoxluqlar adlanır və $A \sim B$ kimi göstərilir.

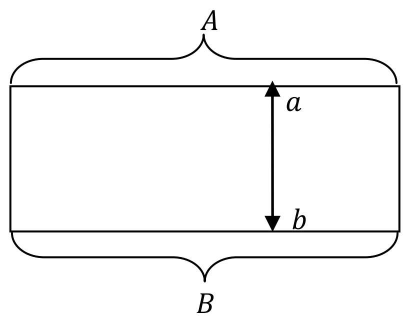
Tərifdən alınır ki, iki sonlu çoxluq o zaman ekvivalent olar ki, onlar eyni sayda elementə malik olsunlar. Buradan görünür ki, çoxluqların eynigüclülüyü anlayışı sonlu çoxluqların eyni sayda elementə malik olması anlayışının ümumiləşməsidir.

Ekvivalent çoxluqlara bəzi misallar göstərək:

1. $N = \{1,2,3,...,n,...\}$ natural ədədlər çoxluğu və $M = \{2,4,6,...,2n,...\}$ cüt ədədlər çoxluğu ekvivalentdir. Bu çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq üçün istənilən $n \in N$ ədədinə $2n \in M$ ədədini qarşı qoymaq lazımdır.

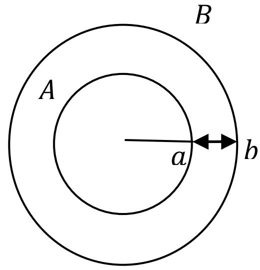
M	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
N	2	4	6	$\dots$	$2n$	$\dots$

2. Tutaq ki, A və B paraleloqramın paralel qarşı tərəfləri üzərindəki nöqtələr çoxluğudur



$a \in A$ nöqtəsindən qarşı tərəfə perpendikulyar çəkilmiş düz xəttin qarşı tərəflə kəsişmə nöqtəsi olan $b \in B$ nöqtəsini a-ya qarşı qoyaq. Asanlıqla $A \sim B$ olduğunu alırıq.

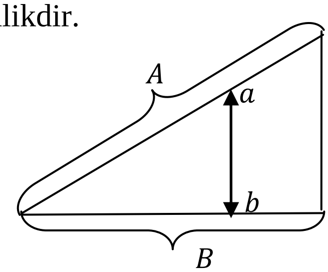
3. Tutaq ki, A və B iki konsentrik çevrə üzərində yerləşən nöqtələr çoxluğudur. Əgər bu çevrələri "düzləndirsək", onda bunlar biri digərindən qısa olan düzxətli parçalara çevrilərlər. İlk baxışda daha uzun parçadakı



Şəkil 2

nöqtələr çoxluğunun digər parçadakı nöqtələrdən daha "çox" olduğunu düşünə bilərik. Amma əslində bu belə deyildir. Hər iki parşadakı nöqtələr çoxluğu bir-birinə ekvivalentdir. Bunlar arasındakı qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq şəkil 2-də göstərilmişdir.

4. Hər hansı düzbucaqlı üçbucaq götürək. A ilə hipetonuzun üzərindəki nöqtələr çoxluğunu, B ilə hər hansı katet üzərindəki nöqtələr çoxluğunu işarə edək. Əgər bu kateti hipetonuz üzərinə qoysaq, onda B çoxluğunun A-nın bir hissəsi olduğunu alarıq. Yəni $B \subset A$ və $B \neq A$. B çoxluguna A-nın düzgün hissəsi deyəcəyik. Bu halda biz öz alt hissəsinə ekvivalent olan çoxluq ilə qarşılaşırıq. Məlumdur ki, A və B sonlu çoxluqlar olarsa, belə bir hal mümkün deyil. Sonlu çoxluq öz alt hissəsinə ekvivalent ola bilməz. Onda belə nəticəyə gəlirik ki, yalnız sonsuz çoxluqlar belə xassəyə malik ola bilərlər. Yəni sonsuz çoxluq öz alt hissəsinə ekvivalent ola bilər. Sonralar görəcəyik ki, hər bir sonsuz çoxluq özünə ekvivalent olan alt hissəyə malikdir.



Ekvivalentlik anlayışının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

I. İstənilən A çoxluğu üçün $A \sim A$ (eynilik),

II. Əgər $A \sim B$ isə, onda $B \sim A$ (simmetriklik),

III. Əgər $A \sim B$ və $B \sim C$ isə, onda $A \sim C$ (tranzitivlik),

IV. Tutaq ki, $A_k \sim B_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ $(i, j = 1,2,3, \dots)$ $A = \bigcup_k A_k$, $B = \bigcup_k B_k$ işarə edək. Bu halda $A \sim B$ olar.

Aşağıdakı teoremləri də qeyd edək.

Teorem 1. Tutaq ki, $A \subset B \subset C$ və $A \sim C$. Onda $A \sim B$.

Teorem 2. Tutaq ki, A çoxluğu B çoxluğunun hər hansı $B^* \subset B$ alt çoxluğu, B çoxluğu isə A çoxluğunun $A^* \subset A$ alt çoxluğuna ekvivalentdir. Bu halda A və B çoxluqları ekvivalentdirlər.

Bu teorem Kantor-Bernşteyn teoremi adlanır.

1.3. Hesabi çoxluqlar və onların əsas xassələri.

$N = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ natural ədədlər çoxluğu götürək.

Tərif 1. Natural ədədlər çoxluğuna ekvivalent olan çoxluqlara hesabi çoxluqlar və ya hesabi güclü çoxluqlar deyilir.

Verilmiş çoxluğun hesabi gücə malik olması faktını $\bar{\bar{A}} = a$ kimi işarə edirlər. Aydındır ki, bütün hesabi güclü çoxluqlar bir-birinə ekvivalentdirlər və onları bütün natural ədədlərin köməyi ilə nömrələmək mümkündür. Yəni hesabi çoxluqları $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ ardıcıllığı şəklində göstərmək olar.

$$A_1 = \{1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...\}$$
$$A_2 = \{1, 8, 27, 64, ..., n^3, ...\}$$
$$A_1 = \{2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$$
$$A_4 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$$

Bu çoxluqlardan hər biri hesabi güclü çoxluqdur.

Teorem 1. Hər bir sonsuz A çoxluğundan hesabi alt çoxluq ayırmaq olar.

Isbatı: A çoxluğundan hər hansı a_1 elementini götürək. $A|\{a_1\}$ sonsuz çoxluq olduğundan bu çoxluqdan a_1-dən fərqli hər hansı a_2 elementi götürmək olar. Yenidən $A|\{a_1, a_2\}$ çoxluğundan a_1 və a_2 elementlərindən fərqli hər hansı a_3 elementini götürək və prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirək. Nəticədə ayrılmış elementlərdən ibarət sonsuz $D = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ hesabi çoxluğunu almış oluruq.

Teorem 2. Hesabi A çoxluğunun hər bir sonsuz alt $B \subset A$ çoxluğu hesabidir.

İsbatı: A çoxluğunu $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ kimi göstərək. A çoxluğunun elementlərini ardıcıl olaraq nəzərdən keçirək. Bu elementlərdən B çoxluğuna daxil olan birinci elementi $b_1 = a_{n_1}$ kimi nömrələyək. A-nın B çoxluğuna daxil olan ikinci elementini $b_2 = a_{n_2}$ $(n_2 > n_1)$ kimi işarə edək və prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirək. Beləliklə B-nin bütün elementlərini $b_1, b_2, b_3, ..., b_k, ...$ şəklində nömrələyə bilərik, belə ki $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, 3, ...$ $(n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ....)$. B sonsuz çoxluq olduğundan onun elementləri bütün natural ədədlər vasitəsilə nömrələnmiş olur. Bu isə B çoxluğunun hesabi olduğunu göstərir.

Nəticə: Hesabi çoxluqdan sonlu çoxluğu atdıqdan sonra alınan çoxluq da hesabi çoxluqdur.

Məsələn, cüt natural ədədlər çoxluğu, eləcədə tək natural ədədlər çoxluğu hesabi çoxluqlardır.

Teorem 3: Sonlu və hesabi çoxluğun birləşməsi də hesabi çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ belə ki, $A \cap B = \varnothing$. $C = A \cup B$ işarə edək və onu $C = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m, ...\}$ kimi göstərək. Bu çoxluğu yenidən $C = \{c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}, ..., c_{n+m}, ...\}$ yenidən nömrələyək, belə ki,

$$c_i = \begin{cases} a_i, \ i = 1,2,...,n \\ b_{i-n}, \ i = n+1, n+2,..., \end{cases}$$

Nəticədə C çoxluğunun hesabi çoxluq olduğunu alırıq.

Teorem 4: Sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən hesabi çoxluqların birləşməsi də hesabi çoxluqdur.

İsbatı: Teoremi üç sayda hesabi çoxluqlar üçün isbat edək.

$D = A \cup B \cup C$ belə ki, $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_m, ...\}$ $C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...\}$

D çoxluğunun elementlərini $D = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, ...\}$ şəklində göstərək və yenidən nömrələyək. Bu halda D -nin hesabi çoxluq olduğunu alarıq.

Eyni üsulla hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sonlu çoxluqların birləşməsinin də hesabi çoxluq olduğunu almaq olar.

Teorem 5. Hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən hesabi çoxluqların birləşməsi də hesabi çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən hesabi çoxluqlardır.

Bu çoxluqları aşağıdakı kimi göstərək:

$$A_1 = \left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, ...\right\}$$
$$A_2 = \left\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, ...\right\}$$
$$A_1 = \left\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, ...\right\}$$

$D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k \cup ...$ çoxluğunun elementlərini aşağıdakı kimi düzək. Əvvəlcə $a_1^{(1)}$ elementini, sonra $a_2^{(1)}$ və $a_1^{(2)}$ elementlərini, daha sonra $a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}$ və bu qayda ilə indekslərinin cəmi 5 olan elementlər olmaqla indekslər cəminin artma istiqamətində düzək. Nəticədə D çoxluğu aşağıdakı kimi göstərirlər:

$$D = \left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, ...\right\}.$$

Bu qayda ilə bütün natural ədədlər vasitəsilə yenidən nömrələmək olar. Nəticədə D çoxluğunun hesabi olduğunu alarıq.

Bu teoremlərdən istifadə edərək bütün rasional ədədlər çoxluğunun hesabi olduğunu göstərə bilərik. Məlum olduğu kimi istənilən rasional ədəd $\frac{p}{q}$ şəklində göstərilə bilər, beləki, p və q tam ədədlərdir. Məxrəci q olan bütün $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, ...$ şəklində bütün ədədlər çoxluğu hesabidir. q məxrəci özüdə hesabi sayda *1, 2, 3, ...* natural qiymətlərini ala bilər. Nəticədə teorem 5-i tətbiq etməklə baxılan çoxluğun hesabi olduğunu alarıq. Əgər bu çoxluqdan bütün ixtisar olunan kəsrləri atsaq, alınan çoxluq 2-ci teoremə görə hesabi olar. Bu qayda ilə bütün müsbət rasional ədədlər çoxluğu olan Q_+ çoxluğunun hesabi olduğunu alırıq. Bütün mənfi rasional ədədlər Q_- və Q_+ çoxluqları ekvivalent olduğundan $Q = Q_+ \cup \{0\} \cup Q_-$ çoxluğunun da hesabi olduğunu alırıq.

Nəticə. $[0, l]$ segmenti daxilindəki bütün rasional ədədlər çoxluğu hesabidir. Doğrudan da $[0, l]$ seqmenti daxilində yerləşən bütün rasional ədədlər çoxluğunu P_1 ilə işarə edək. Məlumdur ki, $P_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ çoxluğu hesabidir və $P_2 \subset P_1$. P_1 çoxluğu isə bütün rasional ədədlər çoxluğunun altçoxluğudur. Onda $P_2 \subset P_1 \subset Q$. Məlum teoremə görə $P_2 \sim Q$ olduğundan $P_1 \sim Q$ olduğunu alırıq. Yəni P_1 çoxluğu hesabidir.

Xüsusi halda $Z = N_- \cup \{0\} \cup N_+$ bərabərliyindən bütün tam ədədlər çoxluğunun da hesabi olduğunu alırıq. Burada N_+ və N_- uyğun olaraq müsbət və mənfi tam ədədləri göstərir.

Teorem 6. Əgər sonsuz M çoxluğuna sonlu və ya hesabi A çoxluğu əlavə etsək, onda M çoxluğu ilə eynigüclü çoxluq alınar, yəni $M \cup A \sim M$ olar.

İsbatı: M çoxluğundan hər hansı hesabi D çoxluğu ayıraq. $M | D = P$ işarə edək. Onda $M = P \cup D$ olar.

Buradan

$$M \cup A = (P \cup D) \cup A = P \cup (D \cup A)$$

$P \sim P$ və $D \cup A \sim D$ olduğundan $M \cup A \sim M$ münasibətini alırıq.

Bu teoremdən alınır ki, hər hansı sonsuz çoxluğa sonlu və ya hesabi çoxluğun əlavə olunması bu çoxluğun gücünü dəyişməz.

Teorem 7. Əgər sonsuz M çoxlugu qeyri-hesabi isə və A onun sonlu və ya hesabi alt hissəsidirsə, onda

$$M \setminus A \sim M$$

olar.

İsbatı: $B = M | A$ çoxluğu sonlu ola bilməz, çünki bu halda M çoxluğu sonlu və ya hesabi çoxluq olardı.

Onda teorem 6-ya əsasən $B + A \sim A$ olduğundan

$$M \sim M - A$$

alarıq.

Buradan aşağıdakı nəticə alınar:

Nəticə: Hər bir sonsuz çoxluğun özünə ekvivalent olan düzgün hissəsi vardır.

Buradan da alırıq ki, sonsuz çoxluqdan istənilən sonlu alt çoxluğun atılması onun gücünü dəyişmir.

Qeyd etdiyimiz kimi sonlu çoxluqlar bu xassəyə malik deyildir. Ona görə də aşağıdakı tərifi verə bilərik.

Tərif: Əgər verilmiş çoxluq özünə ekvivalent alt hissəyə malik isə, ona sonsuz çoxluq deyilir.

Teorem 8. Hər biri digərindən asılı olmayaraq hesabi çoxluqda dəyişən n sayda indekslə təyin edilən elementlərdən ibarət

$$A=\{a_{x_1,x_2,...,x_n}\} \quad \left(x_k = x_k^{(1)},\ x_k^{(2)},...;\ k=1,2,3,...,n\right)$$

çoxluğu hesabidir.

İsbatı: Teorem riyazi induksiya metodu ilə isbat edilir. $n=1$ olduqda teorem aydındır.

Fərz edək ki, teorem $n=m$ üçün doğrudur. Teoremin $n=m+l$ olduqda doğru olduğunu göstərək.

Tutaq ki, $A=\{a_{x_1,x_2,...,x_m,x_{m+1}}\}$.

$A_i=\left\{a_{x_1,x_2,...,x_m,x_{m+1}^{(i)}}\right\}$ işarə edək.

Fərziyyəyə görə A_i çoxluqlarından hər biri hesabi çoxluqdur. $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olduğundan məlum teoremə görə A-nın hesabi çoxluq olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələri almaq olar.

1) Müstəvi üzərində rasional koordinantlı $M(x,y)$ nöqtələri çoxluğu hesabidir.

2) k sayda natural ədədlərlə təyin edilən $(n_1,n_2,...,n_k)$ şəklində toplular çoxluğu hesabidir.

3) Tam əmsallı $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$ şəklində çoxhədlilər çoxluğu hesabidir.

Tərif. Əgər hər hansı bir ədəd tam əmsallı cəbri çoxhədlinin kökü olarsa, onda cəbri ədəd deyilir. Cəbri olmayan ədədlərə transendent ədədlər deyilir.

$\frac{m}{n}$ ($m\in Z$ tam ədəd $n\in N$) şəklində ədədlər tam əmsallı birdərəcəli $nx-m=0$ cəbri tənliyin kökü olduğundan bütün rasional ədədlər (xüsusi halda natural və tam ədədlər) cəbri ədədlərdir. Istənilən $n\ge 2$ və m natural ədədləri üçün $\sqrt[n]{m}$ şəklində olan bütün ədədlər rasional yaxud irrasional olmasından asılı olmayaraq tam əmsallı cəbri tənliyin kökləri olduğundan onlarda cəbri ədədlərdir.

Isbat olunmuşdur ki, π və e ədədləri heç bir tam əmsallı cəbri tənliyin həlli deyillər. Bu ədədlər transendent ədədlərdir.

Teorem 9. Bütün cəbri ədədlər çoxluğu hesabdir.

İsbatı: Tam əmsallı bütün cəbri çoxhədlilər çoxluğu hesabi olduğundan onları $P_1(x),P_2(x),P_3(x),...,P_n(x),...$ kimi nömrələmək olar. Hər bir

$P_k(x)$ $(k=1,2,...)$ çoxhədlisinin sonlu sayda kökləri vardır. Əvvəlcə $P_i(x)$ çoxhədlisinin, sonra $P_2(x)$ çoxhədlisinin $P_1(x)$-in köklərindən fərqli köklərini və s. kimi düzsək, köklərdən ibarət ardıcıllıq alarıq. Bu isə cəbri ədədlər çoxluğunun hesabi olduğunu göstərir.

1.4. Çoxluğun gücü anlayışı. Güclərin müqayisəsi.

Tutaq ki, hər hansı A çoxluğu verilmişdir. A çoxluğu ilə bərabər A ilə ekvivalent olan bütün çoxluqlara baxaq. Tranzitivlik xassəsinə görə bütün bu çoxluqlar öz aralarında ekvivalent çoxluqlardır. Belə çoxluqlar külliyatı öz aralarında ekvivalent olan çoxluqlar sinifi adlanır. Sonralar görəcəyik ki, sonsuz sayda öz aralarında ekvivalent olan çoxluqlar sinifləri vardır. Asanlıqla görə bilərik ki, iki müxtəlif sinifə daxil olan iki çoxluq heç zaman ekvivalent ola bilməzlər.

Hər bir öz aralarında ekvivalent olan çoxluqlar sinfinə qarşı α simvolunu qarşı qoyaq. Bu simvola baxılan sinifə uyğun kardinal ədəd, yaxud bu sinifə daxil olan çoxluqların gücü deyilir.

Beləliklə görürük ki, çoxluğun gücü anlayışı öz aralarında ekvivalent olan bütün çoxluqlara aid olan ümumi bir keyfiyyət, yaxud xassədir. Bu halda biz çoxluğa daxil olan elementlərin konkret keyfiyyətini və çoxluğun sonlu və ya sonsuz olmasını nəzərə almırıq.

Ekvivalent çoxluqlar sinfinə qarşı qoyulan bu simvol həmin çoxluqların gücünü göstərir.

Əgər A_1 və A_2 ekvivalent olmayan çoxluqlar isə və bu çoxluqlara uyğun simvollar α_1 və α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) isə, onda bu çoxluqlar müxtəlif gücə malik çoxluqlar adlanırlar.

Çoxluğun gücünü $\overline{\overline{A}}$ kimi işarə edirik. Əgər müxtəlif çoxluqlara uyğun kordinal ədədlər (simvollar) α və β olarsa, bu halda $\alpha=\beta,\ \alpha>\beta,\ \alpha<\beta$ münasibətlərindən yalnız biri ola bilər.

Bütün yuxarıda deyilənlərdən görünür ki, çoxluğun gücü anlayışı çoxluğun elementləri sayının ümumiləşməsidir. Sonlu çoxluqlar üçün çoxluqların elementləri sayı ilə çoxluğun gücü anlayışları üst-üstə düşürlər. Sonsuz şoxluqlar üçün "elementlərin sayı" anlayışının mənası yoxdur. Bu halda yalnız çoxluğun gücü anlayışından danışmaq olar. Çoxluğun gücü anlayışı elementlərin sayı anlayışının təbii ümumiləşməsidir.

Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. Əvvəlcə fərz edək ki, A və B sonlu çoxluqlardır. Belə ki, A çoxluğu m elementə, B isə n elementə malikdir. Aydındır ki, m və n arasında aşağıdakı üç münasibətdən biri ola bilər:

1) $m=n$, 2) $m>n$, 3) $m<n$

Birinci hal o zaman mümkündür ki, A və B ekvivalentdir və onlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar.

İkinci halda A və B çoxluqları ekvivalent deyildirlər, onlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yoxdur. Amma B çoxluğu ilə ekvivalent olan $A_1 \subset A$ çoxluğu vardır.

Üçüncü halda A və B çoxluqları ekvivalent deyildirlər, onlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yoxdur. Amma A çoxluğu ilə ekvivalent olan $B_1 \subset B$ çoxluğu vardır.

Beləliklə alırıq ki, sonlu çoxluqları müqayisə etmək üçün ya onların elementlərini saymaq lazımdır, ya da bu çoxluqlar və ya onların alt çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq lazımdır.

A və B çoxluqları sonsuz olduğu halda onların elementlərini saymaq mümkün deyildir. Bu halda onları müqayisə etmək üçün yalnız ikinci üsuldan istifadə etmək lazımdır.

Bu halda aşağıdakı hallar ola bilər:

1) $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$, amma B çoxluğu A-nın heç bir alt çoxluğuna ekvivalent deyildir.
2) $B \sim A_1$, $A_1 \subset A$, amma A çoxluğu B-nın heç bir alt çoxluğuna ekvivalent deyildir.
3) $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$ və $B \sim A_1$, $A_1 \subset A$.

Tərif. Əgər A və B çoxluqları arasında 1) münasibəti varsa bu halda deyirlər ki, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, yəni A çoxluğu B-dən zəif güclü çoxluqdur. Əgər 2) münasibəti varsa, $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, yəni A çoxluğu B-dən daha güclü çoxluqdur. 3) halı ödəndikdə, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. (Bu halda Kantor-Bernşteyn teoreminə görə A və B çoxluqları ekvivalent olur).

Çoxluqların güclərini müqayisə etmək üçün aşağıda göstərilən teoremlər mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Teorem 1. (Aralıq çoxluğunun gücü haqqında). Tutaq ki, $A \supset A_1 \supset A_2$ və $A \sim A_2$. Onda $A \sim A_1$.

Teorem 2. (Kontor-Bernşteyn). Əgər A və B çoxluqlarından hər biri digərinin hər hansı hissəsinə ekvivalent isə, onda bu çoxluqlar özləri də ekvivalentdirlər. Yəni $A \sim B_1 \subset B$ və $B \sim A_1 \subset A$ isə, onda $A \sim B$.

Yuxarıda qeyd etdik ki, sonsuz sayda müxtəlif ekvivalentlik sinifləri vardır və buna uyğun olaraq sonsuz sayda müxtəlif güclər vardır. Sonsuz çoxluqlar işərisində ən sadə quruluşa malik olan çoxluqlar hesabi çoxluqlardır. Hesabi çoxluqların gücünü $\overline{\overline{A}} = a$ kimi işarə etməyi şərtləşmişik.

Aşağıdakı təbii sual ortaya çıxır. Sonsuz çoxluqlar işərisində ən böyük gücə malik olan çoxluq varmı? Aşağıdakı teorem göstərir ki ən böyük gücə malik olan çoxluq yoxdur.

Teorem 3. İstənilən boş olmayan A çoxluğunun bütün alt çoxluqlar çoxluğunun gücü verilmiş çoxluğun gücündən böyükdür.

1.5. Kontinium güclü çoxluqlar.

Yuxarıda göstərilən Teorem 3-dən nəticə olaraq alınır ki, ən böyük gücə malik olan çoxluq qurmaq mümkün deyildir. Çünki, verilmiş çoxluğun alt çoxluğunun gücü həmişə verilən çoxluğun gücündən böyük olur. Onda yenə də təbii sual yaranır. Ən kiçik gücə malik olan sonsuz çoxluq varmı?

$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ natural ədədlər çoxluğunu götürək. Tutaq ki, M hər hansı sonsuz çoxluqdur. M çoxluğundan, hər hansı element götürək və onu m_1 ilə işarə edək. Yenidən başqa bir element götürək və onu m_2 ilə işarə edək. M sonsuz çoxluq olduğundan bu prosesi sonsuz davam etdirmək olar. Nəticə də M çoxluğundan sonsuz M_1 çoxluğu ayırmış olarıq. M_1 çoxluğunun elementləri bütün natural ədədlər vasitəsi ilə nömrələndiyindən o hesabi çoxluqdur. Yəni $M_1 \sim N$. Nəticə də alırıq ki, $\overline{\overline{M}} \geq a$.

Deməli, istənilən sonsuz çoxluğun gücü hesabi gücdən kiçik deyildir. Onda hesabi gücün sonsuz çoxluqların gücü arasında ən kiçik güc olduğunu alırıq.

Teorem 1. $[0,1]$ parçasına daxil olan bütün həqiqi ədədlər çoxluğu hesabi çoxluq deyildir.

İsbatı: $\Delta = [0,1]$ işarə edək. Fərz edək ki, Δ parçasının nöqtələri hesabi çoxluq təşkil edir. Onun bütün nöqtələrini natural ədədlər vasitəsilə nömrələmək olar: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Δ parçasını üç bərabər hissəyə bölək. $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. x_1 nöqtəsini öz daxilinə almayan hissəni Δ_1 ilə işarə edək. Δ_1 parçasını yenidən üç bərabər hissəyə bölək. Bu hissələrdən x_2 nöqtəsini öz daxilində saxlamayan hissəni Δ_2 ilə işarə edək. Prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirək. Nəticədə bir birinə daxil olan sonsuz

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$$

parçalar ardıcıllığı alarıq, belə ki, istənilən n üçün Δ_n parçası x_n elementini öz daxilində saxlamır. $|\Delta_n| = \frac{1}{3^n}$ olduğundan $n \to \infty$ şərtində $|\Delta_n| \to \infty$. Onda Kantor teoreminə görə bu parçaların hər birinə daxil olan yeganə ξ nöqtəsi vardır. Bu nöqtə $[0,1]$ parçasına daxildir. Digər tərəfdən ξ ədədi $\{x_n\}$ nöqtələrindən heç biri ilə üst-üstə düşmür. Əgər ξ ədədi bu nöqtələrdən biri ilə üst-üstə düşsəydi, onda ξ ədədi qurmaya görə $\{\Delta_n\}$ parçalarından birinə daxil olmazdı.

Alınmış bu ziddəyyət göstərir ki, Δ parçasının nöqtələri hesabi çoxluq təşkil etmir. Bu nöqtələr çoxluğu qeyri hesabi sonsuz çoxluqdur. Teorem isbat olundu.

Tərif: $[0,1]$ parçasına daxil olan həqiqi ədədlər çoxluğunun gücünə kontinium güc deyilir. $[0,1]$ parçası ilə ekvivalent olan bütün çoxluqlara isə kontinium güclü çoxluqlar deyilir. Kontinium güc $\overline{\overline{A}} = c$ kimi işarə olunur.

Məlumdur ki, $[0,1]$parçasına daxil olan rasional ədədlər çoxluğu hesabi çoxluqdur. Bu parçanın digər bütün nöqtələri irrasional ədədlərdir. Yuxarıda isbat edilən teoremdən alınır ki, irrasional ədədlər rasional ədədlərə nisbətən daha çoxdur və irrasional ədədlər çoxluğu hesabi olmayan çoxluqdur və c gücünə malikdir.

$y = (b-a)x + a$ funksiyası $[0,1]$ və $[a,b]$ parçaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır. Ona görə də istənilən $[a;b]$ parçası da kontinium güclü çoxluqdur. Məlum olduğu kimi sonlu sayda element əlavə etməklə və ya atmaqla çoxluğun gücü dəyişmir. Onda alırıq ki,istənilən (a,b)intervalı, yaxud $(a,b]$, $[b,a)$ yarımintervallarıda kontinium güclü çoxluqlardır.

Teorem 2. Sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən kontinium güclü çoxluqların birləşməsi də kontinium güclü çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqlarından hər biri c gücünə malikdir, $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$. $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ işarə edək. $[0,1)$ yarımintervalını götürək və onu $0 = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = 1$ nöqtələri ilə $[c_{k-1}, c_k)$ $(k = 1,2,...,n)$ yarımintervallarına bölək. A_k çoxluqlarından hər biri c güclü olduğundan bu çoxluqlar ilə uyğun $(a_{k-1}, a_k]$yarımintervalları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yarada bilərik.

Nəticədə B çoxluğu ilə

$$[0,1) = \bigcup_{k=1}^{n} [a_{k-1}, a_k)$$

yarımintervalları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış oluruq. Bu isə B çoxluğunun kontinium güclü çoxluq olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən kontinium güclü çoxluqların birləşməsi də kontinium güclü çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ kontinium güclü çoxluqlardır.

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\ \ A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j.$$

$[0,1)$ yarımintervalını $0=a_0<a_1<...<a_{n-1}<a_n<...\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ nöqtələri vasitəsilə $[a_{k-1},a_k)$ yarımintervallarına bölək. A_k və $[a_{k-1},a_k)$, $k=1,2,...$ çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratsaq nəticədə B çoxluğu ilə $[0,1)$ arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış olarıq. Bu isə B çoxluğunun kontinium güclü olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

Nəticə 1. Bütün həqiqi ədədlərdən ibarət Z çoxlugu kontinium güclü çoxluqdur.

Bu faktın doğruluğu

$$Z=\bigcup_{k=1}^{n}\{[k-1,k]\cup[-k,-k+1]\}$$

bərabərliyindən alınır.

Nəticə 2. Bütün irrosianal ədədlər çoxluğu kontinium güclü çoxluqdur.

Nəticə 3. Transendent ədədlər çoxluğu boş deyil.

Bəzi mühüm çoxluqların kontinium güclü çoxluq olduğunu göstərmək üçün $[0,1]$ parçasına daxil olan ədədlərin ikilik kəsr şəklində yazılışından istifadə olunur.

Hər hansı $\alpha\in[0,1]$ədədini götürək. Məlumdur ki, bu ədədi

$$\alpha=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\frac{\alpha_3}{2^3}+...+\frac{\alpha_k}{2^k}+...$$

sırası şəklində göstərə bilərik. Bunu qısa şəkildə

$$\alpha=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$$

şəklində yazaq. Buna α ədədinin ikilik şəklində yazılışı deyilir. Burada $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3...$ 0 və ya 1 qiymətlərindən ala bilər. Əksinə, ikili kəsr şəklində yazılmış hər bir ədəd $[0,1]$ parçasına daxildir. Ona görə də ikilik kəsr şəklində yaza bilən ədədlər çoxluğu ilə $[0,1]$ parçasındakı ədədlər çoxluğu ekvivalentdirlər. $[0,1]$ parçasına daxil olan bəzi ədədlərin ikilik kəsr şəklində yazılışını göstərək. Məsələn,

$$1=0,111...,\ \frac{1}{2}=0,0111...,\ \frac{5}{7}=0,10011001..$$

$$\frac{3}{8}=0,011000...\ \text{və ya}\ \frac{3}{8}=0,10111......$$

$[0,1]$ parçasındakı ədədlərin ikilik kəsr şəklində yazılışından istifadə edərək onu üç növ çoxluğa ayıra bilərik. Birinci çoxluğa ikilik kəsr şəklində yazılışında sonsuz sayda sıfırlar və sonsuz sayda vahidlər olan ədədləri daxil edirik. Bu ədədlər irrasional ədədlərdir. İkinci çoxluq ikilik kəsr şəklində yazılışına sonlu sayda sıfırlar daxil olan ədədlərdir. Üçüncü çoxluq isə ikilik kəsr şəklində ayrılışına sonlu sayda vahidlər daxil olan ədədlərdir. Bunlar rasional ədədlərdir.

Teorem 4. Hər bir həddi sıfır və vahidlərdən ibarət olan bütün ardıcıllıqlar çoxluğu kontinium güclü çoxluqdur.

İsbatı: Hər bir həddi sıfır və vahidlərdən ibarət olan $\{a_1, a_2, ..., a_n ...\}$ ardıcıllığına ikilik yazılışı $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ ədədini qarşı qoyaq. Məsələn $\{0,0,1,0,1,...\}$ ardıcıllığına qarşı $\alpha = 0,0101...$ ədədini qarşı qoyaq. İkilik kəsr şəklində göstərilən ədədlər çoxluğu ilə $[0,1]$ parçasına daxil olan ədədlər çoxluğu ekvivalent olduğundan baxılan ardıcıllıqlar çoxluğunun kontinium güclü çoxluq olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 5. Natural ədədlərdən təşkil edilmiş bütün artan ardıcıllıqlar çoxluğu kontinium gücə malikdir.

İsbatı: Tutaq ki, $\{k_1, k_2, k_3 ...\}$ $(k_1 < k_2 < k_3 < ...)$ istənilən artan ardıcıllıqdır. Bu ardıcıllığa qarşı elə $\{a_1, a_2, a_3 ...\}$ ardıcıllığı qarşı qoyaq ki, $a_{k_1} = a_{k_2} = ... = a_{k_n} = ... = 1$, qalan yerlərdə yerləşən a_i hədləri isə sıfırlar olsun. Bu qayda ilə $\{k_1, k_2, ..., k_n ...\}$ ardıcıllığı ilə hədləri yalnız sıfır və vahidlərdən ibarət olan ardıcıllıqlar çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış olarıq. Teorem 4-ə əsasən bu çoxluğun kontinium güclü çoxluq olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 6. Bütün natural ədədlər ardıcıllıqlarından ibarət olan çoxluq kontinium güclüdür.

İsbatı: Hər bir natural $\{n_1, n_2, ..., n_k ...\}$ ədədlər ardıcıllığına artan

$$m_1 = n_1,\ m_2 = n_1 + n_2,\ m_3 = n_1 + n_2 + n_3 + ...$$

natural ədədlər ardıcıllığını qarşı qoyaq. Onda teorem 5-ə əsasən bu çoxluğun kontinium güclü olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 7. Həqiqi ədədlərdən təşkil edilmiş bütün ardıcıllıqlar çoxluğu kontinium güclü çoxluqdur.

İsbatı: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n ...\}$ kimi işarə edək. $\xi_n \in (0,1)$ olduğunu fərz edək. ξ_n ədədlərinin ikilik kəsr şəklində ayrılışını götürək və hər bir ξ_i ədəddinə qarşı artan $\{p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, ...\}$ natural ədədlər ardıcıllığını qarşı qoyaq:

$$\xi_1 \to (p_{11}, p_{12}, p_{13}, ...)$$
$$\xi_2 \to (p_{21}, p_{22}, p_{23}, ...)$$
$$\xi_3 \to (p_{31}, p_{32}, p_{33}, ...)$$

....

....

ξ simvoluna qarşı dioqonal üsulu ilə $\{p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{31}, ...\}$ natural ədədlər ardıcıllığını qarşı qoyaq.

Beləliklə, hər bir ξ simvoluna bir natural ədədlər ardıcıllığı qarşı qoyulur. Əksinə hər bir natural ədədlər ardıcıllığına qarşı bir ξ simvolu qarşı qoymaq olar. Nəticədə teorem 7-nin doğru olduğunu alırıq.

Teorem 8. $[a,b]$ parçasında kəsilməyən bütün funksiyalar çoxluğu kontinium güclü çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ $[a,b]$ parçasına daxil olan bütün rasional ədədlər ardıcıllığıdır. Hər bir kəsilməz $f(x)$ funksiyasına qarşı bu funksiyanın $[r_1, r_2, ..., r_n, ...]$ ardıcıllığına uyğun nöqtələrdə aldığı qiymətlərdən ibarət ardıcıllığı qarşı qoyaq

$$f(x) \leftrightarrow \{f(r_1), f(r_2), f(r_3), ..., f(r_k), ...\}$$

Bu uyğynluq qarşılıqlı birqiymətlidir.

İki müxtəlif kəsilməz $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaların uyğun $\{f(r_1), f(r_2), .., f(r_n), ...\}$ və $\{g(r_1), g(r_2), ..., (r_n), ...\}$ ardıcıllıqları da müxtəlif olar. Bu qayda ilə hər bir kəsilməz funksiyaya qarşı bir həqiqi ədədlər ardıcıllığı qarşı qoymaq olar. Onda $C[a,b]$ çoxluğunun gücü kontinium olan həqiqi ədədlər ardıcıllıqlarından düzəlmiş çoxluğun alt hissəsi olduğunu alırıq.

İstənilən $\theta \in [a,b]$ üçün $f(x) = \theta$ şəklində sabit funksiyalar çoxluğu kontinium güclü çoxluq olduğundan Kantor-Bernşteyn teoremə görə $C[a,b]$ çoxluğu ilə həqiqi ədədlərdən ibarət ardıcıllıqlar çoxluğunun ekvivalent olduğunu alarıq. Bu isə $C[a,b]$-nin kontinium güclü çoxluq olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

Teorem 9. $[0,1]$ parçasında təyin edilmiş bütün həqiqi qiymətli funksiyalar çoxluğu kontiniumdan böyük gücə malikdir.

İsbatı: Bu çoxluğu F ilə işarə edək. Əvvəlcə göstərək ki, F çoxluğu və $[0,1]$ parçasına daxil olan nöqtələr çoxluğu ekvivalent deyildirlər. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $F \sim [0,1]$ Tutaq ki, φ F çoxluğu ilə $[0,1]$ arasında hər hansı qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur. $f_t(x)$ ilə φ uyğunluğu zamanı $t \in [0,1]$ nöqtəsinə qarşı F çoxluğundan qarşı qoyulmuş funksiyanı işarə edək: $F(t,x) = f_t(x)$.

$F(t,x)$ funksiyası $0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1$ oblastında təyin olunmuş ikidəyişənli funksiyadır.

$\psi(x) = F(x,x) + 1$ qəbul edək. Bu funksiya $0 \le x \le 1$ parçasında təyin edilmiş funksiyadır və $\psi(x) \in F$.

φ uyğunluğu zamanı $\psi(x)$ hər hansı $a \in [0,1]$ nöqtəsinə uyğundur. Onda $\psi(x) = F_a(x)$ yaxud $\psi(x) = F(a,x)$ olar. Başqa sözlə istənilən $x \in [0,1]$ üçün

$F(x,x)+1=F(a,x)$ olar. Bu bərabərlik isə $a=x$ olduqda doğru deyildir. Bu ziddiyyət göstərir ki, F çoxluğu $[0,1]$parçasına ekvivalent deyildir.

Əgər $F^*=\{\sin x+c\}$, $(0\le c\le 1)$ çoxluğuna baxsaq, görərik ki, $F^*\subset F$ və $F^*\sim[0,1]$.

Bu isə F çoxluğunun $[0,1]$-çoxluğundan böyük gücə malik olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Qeyd 1. Bu teorem kontinium gücdən daha böyük gücün varlığını göstərir. Yuxarıda isbat olunmuşdur ki, boş olmayan istənilən çoxluğun alt çoxluqlar çoxluğunun gücü verilmiş çoxluqdan daha böyük gücə malikdir. Bütün bunlar bir daha onu göstərir ki, ən böyük gücə malik olan çoxluq yoxdur.

Qeyd 2. Yuxarıda hesabi güclü və kontinium güclü çoxluqları nəzərdən keçirdik və onların bir çox mühüm xassələrini göstərdik. Çoxluqlar nəzəriyyəsində ən mühüm məsələlərdən biri də hesabi və kontinium güc arasında yerləşən gücün varlığı məsələsidir. Əsrlər boyu bu problem həll olunmamış qalmışdır. “Kontinium problemi” adlanan bu məsələ 1966-cı ildə amerikan riyaziyatçısı P.G.Koyen tərəfindən həll edilmişdir. İsbat olunmuşdur ki, çoxluqlar nəzəriyyəsinin müasir aksiomatikası əsasında bu problemin müsbət həlli yoxdur[1].

Qeyd 3. Tutaq ki, M n elementdən ibarət sonlu çoxluqdur. T ilə bu çoxluğun bütün alt çoxluqlar çoxluğunu işarə edək. T çoxluğuna bir boş çoxluq, C_n^1 sayda birelementli, C_n^2 sayda ikielementli və nəhayət çoxluğun özü ilə birlikdə

$$1+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

sayda alt çoxluq daxildir.

Bunu nəzərə alaraq aşağıdakı tərifi də vermək olar.

Tərif. Əgər M çoxluğu μ gücünə malikdirsə və onun bütün alt çoxluqları çoxluğu τ gücünə malikdirsə, bu halda $\tau=2^\mu$.

§ 1.4 teorem 3-ə əsasən alarıq ki, $2^\mu>\mu$.

Teorem 10. Hesabi və kontinium güc arasında aşağıdakı münasibət doğrudur: $C=2^a$

İsbatı: T ilə N natural ədədlər ardıcıllığının bütün alt çoxluqlar çoxluğunu, L ilə

$$(a_1,a_2,a_3,...),\quad a_k=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

[1] П.Дж.Коен. Теория множеств и континиум гипотеза, «Мир», 1969.

şəklində bütün ardıcıllıqlar çoxluğunu işarə edək. Onda məlum teoremlərə görə $\overline{\overline{\overline{T}}} = 2^a$, $\overline{\overline{L}} = C$ bərabərlikləri doğrudur.

İstənilən $N^* \in T$ elementi götürək. N^* hər hansı natural ədədlər çoxluğudur. N^*-a qarşı aşağıdakı üsulla düzəlmiş $(a_1, a_2, a_3, ...)$ ardıcıllığını qarşı qoyaq: əgər $k \in N^*$ isə $a_k = 1$, əgər $k \overline{\in} N^*$ olarsa, $a_k = 0$. Bu qayda ilə T və L çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış oluruq. Nəticədə T ilə N çoxluqlarının ekvivalent olduğunu alırıq. Bu isə $2^a = C$ deməkdir. Teorem isbat olundu.

1.6. Kantor çoxluqları.

$A = [0,1]$ parçasına daxil olan bütün həqiqi ədədlər çoxluğuna baxaq. $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{3}$ nöqtələri vasitəsilə bu parçanı üç bərabər hissəyə bölək və $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ intervalını ataq. Qalan $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ və $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ parçalarını yenidən uyğun olaraq $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ və $\frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ nöqtələri vasitəsilə üç bərabər hissəyə bölək və $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallarını ataq. Daha sonra alınmış 4 parçanı yenidən üç bərabər hissəyə bölərək orta intervalları atmaqla bu prosesi qeyri məhdud davam etdirək.

Nəticədə atılan intervallardan ibarət olan

$$G_0 = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right]$$

çoxluğunu və atılmamış hissələrdən ibarət olan $P_0 = [0,1] \,\big|\, G_0$ çoxluqlarını alırıq.

G_0 –Kantorun acıq çoxluğu, P_0 isə Kantorun mükəmməl çoxluğu adlanır.

Bu çoxluqların ədədi xarakteristikalarını öyrənmək üçün ədədin üçlük kəsr şəklində ayrılışından istifadə edəcəyik. İlk növbədə atılan $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ intervalına hansı nöqtələrin düşdüyünü öyrənək. Aydındır ki, bu ədədlərin $x = 0, a_1, a_2, a_3, ...$ $(a_k = 0,1,2)$ şəklində üçlük ayrılışında $a_1 = 1$ olmalıdır.

Bu intervalın üç nöqtələri aşağıdakı kimi üçlük ayrılışlarına malikdir:

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} 0,10000... \\ 0,02222... \end{cases}; \quad \frac{2}{3} = \begin{cases} 0,1222... \\ 0,2000... \end{cases}$$

$[0,1]$ parçasının digər bütün nöqtələrinin üçlük kəsrə ayrılışında vergüldən sonra birinci yerdə vahid ola bilməz.

Beləliklə, G_0 çoxluğunun qurulması prosesində birinci addımda $[0,1]$ parçasından elə nöqtələr atılır ki, onun üçlük ayrılışında vergüldən sonra hökmən vahid olsun.

Analoji olaraq göstərə bilərik ki, ikinci addımda elə nöqtələr atılır ki, onların üçlük ayrılışında vergüldən sonra ikinci yerdə hökmən vahid olsun. Prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirdikdən sonra atılmayan yalnız o nöqtələr qalır ki, həmin nöqtələrin üçlük ayrılışında $0, a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ işarələrindən heç biri vahidə bərabər olmasın.

Beləliklə G_0 çoxluğu o nöqtələrdən ibarətdir ki, onların üçlük ayrılışı vahidsiz mümkün deyil. P_0 isə o nöqtələrdən ibarətdir ki, onların ayrılışına vahidlər daxil deyildir.

Nəticə. Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğu kontinium gücə malikdir.

Doğrudan da, $P_0 = \{0, a_1, a_2, a_3, ...\}$, $a_k = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ olduğundan məlum teoremə görə P_0-ın c gücünə malik olduğunu alırıq.

İlk baxışda belə görünə bilər ki, P_0 çoxluğuna yalnız atılan intervalların uc nöqtələri daxildir. Amma uc nöqtələrdən ibarət olan çoxluq hesabi çoxluqdur. Ona görə də bu çoxluğa uc nöqtələrdən başqa sonsuz sayda digər nöqtələr də daxildir. Məsələn, uc nöqtəsi olmayan belə nöqtələrə ayrılışı

$$0, a_1, a_2, a_3, ... \, , \; a_n = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

şəklində olan ədədlər də daxildir, belə ki 0 və ya 2 periodik təkrarlanmasın. Bu xassə Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğunun bir "qəribəliyidir".

1.7. Çoxluqlara aid misallar və tapşırıqlar.

1. İstənilən A, B, C çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətləri isbat edin.

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

f) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

g) $A \cap B = A|(A|B)$

h) $A|(B|C) = (A|B) \cup (A \cap C)$

i) $(A|B)|C = A|(B \cup C)$

j) $A|(B \cup C) = (A|B) \cap (A|C)$

k) $A|(B \cap C) = (A|B) \cap (A|C)$

l) $A \Delta B = (A|B) \cup (B|A) = (A \cup B)|(A \cap B)$

m) $(A \Delta B)|C = (A|C) \Delta (B|C)$

n) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta (A \Delta C)$

2. $A \cup B,\ A \cap B,\ A|B,\ B|A\ \ A \Delta B$ çoxluqlarını tapın:

a) $A = \{x|\ -4 < x < 1\},\quad B = \{x|\ 0 < x < 4\}$;

b) $A = \{x|\ \ x^2 - x - 2 > 0\},\quad B = \{x|\ \ 6x - x^2 \geq 0\}$;

c) $A = \{x|\ \ \sin \pi x = 0\},\quad B = \left\{x|\ \ \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0\right\}$;

d) $A = \{(x, y)|\ \ x^2 + y^2 \leq 1\},\quad B = \{(x, y)|\ \ |x| + |y| \leq 1\}$;

e) $A = \{(x, y)|\ \ \max\left(|x|, |y|\right) \leq 1\},\quad B = \{(x, y)|\ \ |x| + |y| \leq 1\}$;

f) $A = \{(x, y)|\ \ |x| + |y| \leq 2\},\ B = \left\{(x, y)|\ \ \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} < 2\right\}$;

g) $A = \left\{\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\right\}\quad B = \{(x, y)|\ \max\left(|x+1|, |y+1|\right) \leq 2\}$

3. Əgər A və B çoxluqlarının dekart hasili $A \times B = \{(x, y)|\ x \in A,\ \ y \in B\}$ kimi təyin edilirsə, aşağıdakı hallarda $A \times B$ -ni tapın:

a) $A = \{x|\ -2 < x \leq 1\},\quad B = \{y|\ -1 \leq y < 1\}$;

b) $A = \{x|\ \ 0 \leq x \leq 1\},\ B = D \times E,$ haradaki

$B = \{y|\ \ 0 \leq y \leq 2\},\ E = \{z|\ \ 0 \leq z \leq 3\}$;

c) $A = \{x|\ \ -\infty < x < \infty\},\quad B = \{y\ \ \sin \pi y = 0\}$;

d) $A = \{x|\ \ \sin \pi x = 0\},\ B = \{y|\ \ -y < y < \infty\}$.

4. Natural ədədlər çoxluğu ilə tək ədədlər arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

5. $[0,1]$ və $[7,15]$ parçaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

6. Müstəvi üzərində rasional koordinantlara malik təpə nöqtələri olan üçbucaqlar çoxluğunun hesabi çoxluq olduğunu göstərin.

7. Radiusu və mərkəzinin koordinantları rasional ədədlər olan çevrələr çoxluğunun hesabi çoxluq olduğunu göstərin.

8. İsbat edin ki, natural ədədlərdən ibarət olan stasionar ardıcıllıqlar çoxluğu hesabidir.

9. Göstərin ki, əgər düz xətt üzərində yerləşən E çoxluğunun istənilən iki nöqtəsi arasında məsafə birdən böyük isə, onda E çoxluğu sonlu və ya hesabidir.

Göstəriş: Düz xətti $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ nöqtələri ilə hissələrə bölmək lazımdır.

10. $(0,1)$ və $(-\infty, \infty)$ parçaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

Göstəriş: $x = ctg\, \pi t$ funksiyasından istifadə edin.

11. $[a,b]$ parçasını bütün ədəd oxuna qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirən kəsilməz funksiya vardırmı?

Göstəriş: Yox. Kəsilməz funksiyanın xassələrindən istifadə edib əsaslandırın.

12. $[a,b]$ parçasını $[0,1] \cup [3,4]$ çoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirən kəsilməz funksiya ola bilərmi?

Göstəriş: Yox. Parçada kəsilməz funksiyanın aralıq qiymətləri alması haqqında teoremdən istifadə edin.

13. Müstəvi üzərində E çoxluğunun ixtiyari iki nöqtəsi arasındakı məsafə a -dan böyük olarsa (a -müsbət ədəddir), onda E çoxluğunun ən çoxu hesabi olduğunu göstərin.

Göstəriş: Müstəvini aralarındakı məsafə $\frac{a}{\sqrt{2}}$ olan $x = c$ və $y = d$ xətləri vasitəsilə hesabi sayda kvadratlara bölün və 7-ci misaldan istifadə edin.

14. Həqiqi ədədlərdən düzəlmiş bütün stasionar ardıcıllıqların kontinium güclü olduğunu göstərin.

15. Həqiqi əmsallı bütün çoxhədlilər çoxluğunun kontinium güclü çoxluq olduğunu göstərin.

16. $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan funksiyalardan ibarət ardıcıllıqlar çoxluğunun gücünü təyin edin.

17. İsbat edin ki, əgər E müstəvi üzərində qeyri-hesabi çoxluqdursa, onda mərkəzi koordinant başlanğıcında yerləşən elə dairə vardır ki, E -nin qeyri-hesabi sayda elementini özündə saxlayır.

II FƏSİL

ƏDƏD OXU ÜZƏRİNDƏ QAPALI VƏ AÇIQ ÇOXLUQLAR

2.1. Limit nöqtəsi anlayışı. Bolsano-Veyerştrass teoremi.

Tərif 1. Tutaq ki, E düz xətt üzərində nöqtəvi çoxluqdur. Əgər x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayan istənilən intervala E çoxluğunun x_0-dan fərqli heç olmazsa bir nöqtəsi daxil olarsa, onda x_0 nöqtəsinə E çoxluğunun limit nöqtəsi deyilir.

Qeyd edək ki, x_0 nöqtəsi özü E çoxluğuna daxil olada bilər, olmaya da bilər. Əgər x_0 nöqtəsi E çoxluğuna daxildirsə, amma onun limit nöqtəsi deyilsə, onda x_0-a E çoxluğunun izolə edilmiş nöqtəsi deyilir.

Göstərə bilərik ki, əgər x_0 nöqtəsi E çoxluğunun limit nöqtəsidirsə, onda bu nöqtəni öz daxilində saxlayan istənilən (α, β) intervalına E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtələri daxildir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayan (α, β) intervalına E çoxluğunun sonlu sayda nöqtələri daxildir; x_0 -dan fərqli olan bu nöqtələri $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ işarə edək $\delta = \min\{|x_0 - \xi_1|, |x_0 - \xi_2|, ..., |x_0 - \xi_n|, x_0 - \alpha,\ \beta - x_0\}$ götürək və $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ intervalına baxaq. Göründüyü kimi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ nöqtələrindən heç biri bu intervala daxil deyildir. $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset (\alpha, \beta)$ olduğundan bu intervala ümumiyyətlə E çoxluğunun x_0-dan fərqli heç bir nöqtəsi daxil olmur. Bu isə x_0 nöqtəsinin E çoxluğunun limit nöqtəsi olması şərtinə ziddir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. x_0 nöqtəsinin E çoxluğunun limit nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt E çoxluğunun müxtəlif elementlərindən ibarət olan və x_0 -a yığılan $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ardıcıllığının olmasıdır. Yəni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

İsbatı: Şərtin kafiliyi bilavasitə ardıcıllığın limitinin tərifindən çıxır. Yəni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ varsa, onda x_0-ın istənilən ətrafında sonsuz sayda x_n elementləri vardır.

Şərtin zəruriliyini göstərək. Tutaq ki, x_0 E çoxluğunun limit nöqtəsidir. Onda $(x_0 - 1,\ x_0 + 1)$ intervalından x_0-dan fərqli x_1 nöqtəsi seçə bilərik. Eyni qayda ilə $\left(x_0-\frac{1}{2},\, x_0+\frac{1}{2}\right)$ intervalından E çoxluğuna daxil olan, x_0 və x_1 -dən fərqli $x_2 \in E$ nöqtəsi seçə bilərik. n-ci addımda $\left(x_0-\frac{1}{n},\, x_0+\frac{1}{n}\right)$ intervalından $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ nöqtələrindən fərqli x_n nöqtəsi seçə bilərik. Prosesi sonsuz davam etdirdikdə nəticədə E çoxluğundan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şərtini ödəyən $\{x_n\}$ ardıcıllığı ayıra bilərik. Teorem isbat olundu.

Bu teoremə əsaslanaraq limit nöqtəsinin tərifini aşağıdakı kimi də verə bilərik:

Tərif 2. Əgər E çoxluğundan x_0 nöqtəsinə yığılan müxtəlif nöqtələrdən ibarət $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ardıcıllığı ayırmaq olarsa, onda x_0–a E çoxluğunun limit nöqtəsi deyilir.

Aşağıdakı teorem hansı çoxluqların limit nöqtəsinə malik olduğunu göstərir.

Teorem 2. (Bolsano-Veyerştrass). Hər bir sonsuz məhdud çoxluğun heç olmazsa bir limit nöqtəsi vardır (bu limit nöqtəsi çoxluğun özünə daxil ola da bilər, olmayada bilər).

İsbatı: E çoxluğu məhdud olduğundan elə $[a,b]$ parçası vardır ki, $E \subset [a,b]$.

$c=\frac{a+b}{2}$ qəbul edək və $[a,c]$, $[c,b]$ parçalarına baxaq. Bu parçalardan heç olmazsa birinə E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtələri daxildir. Həmin parçanı $[a_1,b_1]$ ilə işarə edək. $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ qəbul edərək $[a_1,c_1]$, $[c_1,b_1]$ parçalarından E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtələrini özündə saxlayan parçanı $[a_2,b_2]$ ilə işarə edək.

Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə hər biri E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtələrini özünda saxlayan bir-birinə daxil olan sonsuz sayda

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]\supset...$$

parçalar ardıcıllığını alarıq.

$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ olduğu üçün $n\to\infty$ şərtində parçaların uzunluqları $b_n-a_n\to 0$. Bir-birinə daxil olan parçalar prinsipinə görə bu parçaların hamısına daxil olan yeganə x_0 nöqtəsi vardır, belə ki, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. Göstərək ki, x_0 nöqtəsi E çoxluğunun limit nöqtəsidir. Bu məqsədlə x_0

nöqtəsini öz daxilində saxlayan (α, β) intervalını götürək. Aydındır ki, n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$ olar. Buradan alırıq ki, (α, β) intervalında E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtələri vardır. Bu isə x_0-ın limit nöqtəsi olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Qeyd. Teoremdə E çoxluğunun məhdud olması mühüm şərtdir. Bu şərt ödənməzsə, teoremin hökmü doğru olmaz. Məsələn natural ədədlər çoxluğuna baxaq. Bu çoxluq sonsuzdur, amma məhdud deyil. Bu çoxluğun heç bir limit nöqtəsi yoxdur.

Bolsano-Veyerştrass teoremini aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar.

Teorem 2*. Hər bir məhdud $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ardıcıllığından yığılan $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ $(n_1 < n_2 < ... < n_k < ...)$ altardıcıllıq ayırmaq olar.

2.2. Qapalı çoxluqlar. Əsas teoremlər.

Əvvəlcə çoxluğun limit nöqtəsi anlayışı ilə sax bağlı olan aşağıdakı anlayışların tərifini verək.

Tərif. Tutaq ki, E nöqtəvi çoxluqdur.

1. E çoxluğunun bütün limit nöqtələri çoxluğuna E çoxluğunun törəmə çoxluğu deyilir və E' kimi işarə edilir.
2. Əgər $E' \subset E$ olarsa, E çoxluğuna qapalı çoxluq deyilir.
3. Əgər $E \subset E'$ olarsa, E çoxluğuna özündə sıx çoxluq deyilir.
4. Əgər $E = E'$ olarsa, E çoxluğuna mükəmməl çoxluq deyilir.
5. $E \cup E'$ çoxluğuna E çoxluğunun qapanması deyilir və $\overline{E}$ kimi işarə olunur.

Bu tərifdən görünür ki, çoxluq o zaman qapalı adlanır ki, o bütün limit nöqtələrini öz daxilində saxlasın. Özündə sıx çoxluğun heç bir izolə edilmiş nöqtəsi yoxdur. Mükəmməl çoxluq qapalı və özündə sıx çoxluqdur.

Misallar baxaq:

1. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$, $E' = \{0\}$. Çoxluq qapalıdır, amma özündə sıx deyil.
2. $E = (a, b)$, $E' = [a, b]$. Çoxluq özündə sıxdır, amma qapalı deyildir.
3. $E = [a, b]$, $E' = [a, b]$. Çoxluq mükəmməl çoxluqdur.
4. $E = Z$, $E' = Z$, bu onu göstərir ki, bütün həqiqi ədədlər çoxluğu mükəmməl çoxluqdur.
5. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ..., 0\right\}$, $E' = \{0\}$; Çoxluq qapalıdır, amma özündə sıx deyil.

6. $E = Q$ (bütün rasional ədədlər çoxluğu). $E' = Z$; Çoxluq özündə sıxdır, amma qapalı deyil.

7. $E = \varnothing$, $E' = \varnothing$ yəni boş çoxluq mükəmməldir.

8. E-hər hansı sonlu çoxluqdur. Aydındır ki, $E' = \varnothing$. Alırıq ki, sonlu çoxluq qapalıdır, amma özündə sıx deyil.

İndi isə qapalı çoxluqlar haqqında aşağıdakı teoremləri isbat edək.

Teorem 1. İstənilən nöqtəvi çoxluğun törəmə çoxluğu qapalıdır.

İsbatı. Əgər $E = \varnothing$ olarsa, bu halda $E' = \varnothing$ və çoxluq qapalı olar.

Tutaq ki, $E' \neq \varnothing$ və x_0 nöqtəsi E' –çoxluğunun limit nöqtəsidir. Göstərək ki, $x_0 \in E'$. x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayan ixtiyari (α, β) intervalını götürək. Limit nöqtəsinin tərifinə görə bu intervalda $Z \in E'$ nöqtəsi vardır.

Onda alırıq ki, (α, β) intervalı verilmiş E çoxluğunun limit nöqtəsini öz daxilində saxlayır. Bu halda (α, β) intervalı daxilində E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtəsi olduğunu alarıq. Beləliklə alırıq ki, x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayan hər bir interval E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtəsini öz daxilində saxlayır. Deməli x_0 nöqtəsi E çoxluğunun limit nöqtəsidir, yəni $x_0 \in E'$. Alırıq ki, E' çoxluğu bütün limit nöqtələrini öz daxilində saxlayır və qapalıdır. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Əgər $A \subset B$ isə, onda $A' \subset B'$ doğrudur.

İsbatı: $x_0 \in A'$ nöqtəsi A çoxluğunun limit nöqtəsidirsə, onda o eyni zamanda B çoxluğunun da limit nöqtəsidir və deməli $x_0 \in B'$, yəni $A' \subset B'$. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. İstənilən A və B çoxluqları üçün $(A \cup B)' = A' \cup B'$ doğrudur.

İsbatı: Teorem 2-yə əsasən $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ münasibətlərindən $A' \subset (A \cup B)'$, $B' \subset (A \cup B)'$ alırıq.

Buradan $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

İndi isə $(A \cup B)' = A' \cup B'$ olduğunu göstərək.

$x_0 \in (A \cup B)'$ götürək. Onda $A \cup B$ çoxluğundan $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ şərtini ödəyən müxtəlif $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ nöqtələr ardıcıllığı ayırmaq olar. x_n nöqtələrindən sonsuz saydası A-ya daxil olduqda $x_0 \in A' \subset A' \cup B'$, sonsuz saydası B-yə daxil olduqda isə $x_0 \in B' \subset A' \cup B'$. Nəticədə $x_0 \in A' \cup B'$, $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ alarıq. Buradan $(A \cup B)' = A' \cup B'$ olması alınır. Teorem isbat olundu.

Nəticə 1. İstənilən E çoxluğunun $\overline{E}$ qapanması qapalı çoxluqdur.

Doğrudan da

$$\left(\overline{E}\right)' = (E \cup E')' = (E \cup E')' \subset E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset \overline{E},$$

yəni $\left(\overline{E}\right)' \subset \overline{E}$ və $\overline{E}$ qapalıdır.

Nəticə 2. E çoxluğunun qapalı olması üçün zəruri və kafi şərt $E = \overline{E}$ olmasıdır.

Teorem 4. Sonlu sayda qapalı çoxluqların birləşməsi də qapalı çoxluqdur.

İsbatı: Teoremi $\Phi = F_1 \cup F_2$ halı üçün isbat edək. Teorem 3-ə əsasən $\Phi' = F_1' \cup F_2'$. Eyni zamanda $F_1' \subset F_1$, $F_2' \subset F_2$ olduğundan $\Phi' \subset \Phi$ alırıq, yəni $F_1 \cup F_2$ qapalıdır. Teorem isbat olundu.

Ümumi halda teoremi riyazi induksiya üsulu ilə isbat etmək olar.

Qeyd. Sonsuz sayda qapalı çoxluqların birləşməsi qapılı olmaya da bilər.

Doğrudan da $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $(n = 1,2,3,...)$ çoxluqlarından hər biri qapalı çoxluqdur, amma onların birləşməsi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0,1]$$

qapalı çoxluq deyildir.

Teorem 5. İxtiyari sayda qapalı çoxluqların kəsişməsi də qapalı çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, F_k çoxluqları qapalı çoxluqlardır. $\Phi = \bigcap_k F_k$ işarə edək. Onda istənilən k üçün $\Phi \subset F_k$ olar. Buradan $\Phi' \subset F_k'$, nəticədə $\Phi' \subset \bigcap_k F_k = \Phi$, $\Phi' \subset \Phi$, yəni Φ qapalıdır. Teorem isbat olundu.

Tərif. Tutaq ki, E hər hansı nöqtələr çoxluğu, ω isə hər hansı intervallar sistemidir. Əgər istənilən $x \in E$ nöqtəsi üçün elə $\delta \in \omega$ intervalı varsa ki, $x \in \delta$ olsun, bu halda deyirlər ki, E çoxluğu ω intervallar sistemi ilə örtülmüşdür.

Aşağıdakı mühüm teorem doğrudur:

Teorem 6 (E.Borel). Əgər qapalı məhdud E çoxluğunu intervalların sonsuz ω sistemi vasitəsilə örtmək olarsa, onda bu intervallar sistemindən E çoxluğunu örtən sonlu ω^* sistemini ayırmaq olar.

Qeyd. Əgər E çoxluğunun məhdudluğu və ya qapalılığı şərtlərini atsaq, teoremin hökmü doğru olmaz. Məsələn, N natural ədədlər çoxluğu qapalıdır, amma məhdud deyildir.

$$\omega = \left(n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3} \right) \ (n = 1,2,3,...)$$

intervallar sistemi N çoxluğunu örtür. ω sisteminin hər bir intervalı N çoxluğunun yalnız bir nöqtəsini örtür. ω sisteminin heç bir sonlu sistem sonsuz N çoxluğunu tam örtə bilməz. Deməli, çoxluğun məhdudluğu mühüm şərtdir.

İndi isə $E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ... \right\}$ çoxluğunu götürək. Bu çoxluq məhduddur, amma qapalı deyil.

$$\omega = \left\{ \left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{2n+3}{2n(n+1)} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

intervallar sistemi E çoxluğunu örtür, belə ki, bu sistemin hər bir intervalı E çoxluğunun yalnız bir nöqtəsini örtür. Bu sistemin heç bir sonlu sistemi E çoxluğunu örtə bilməz.

Bu misallar çoxluğun məhdudluğu və qapalılığı şərtlərinin mühüm, vacib şərtlər olduğunu göstərir.

2.3. Daxili nöqtə anlayışı. Açıq çoxluqlar.

Tərif 1. Əgər x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayan elə (α, β) intervalı varsa ki, tamamilə E çoxluğuna daxil olsun, bu halda x_0 nöqtəsinə E çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir. $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E$.

Tərifdən aydın görünür ki, çoxluğun daxili nöqtəsi çoxluğun özünə daxildir (həmdə müəyyən ətrafı ilə birlikdə).

Tərif 2. Əgər E çoxluğunun bütün nöqtələri daxili nöqtələr olarsa, onda E açıq çoxluq adlanır.

Misallara baxaq:

1) Hər bir (a, b) intervalı açıq çoxluqdur.
2) Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu Z açıq çoxluqdur.
3) Boş çoxluq $\varnothing$ açıq çoxluqdur.
4) $[a, b]$ parçası açıq çoxluq deyildir, çünki onun uc nöqtələri daxili nöqtələr deyildir.

Aşağıdakı əsas teoremlər doğrudur.

Teorem 1. İstənilən sayda açıq çoxluqların birləşməsi də açıq çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ açıq çoxluqlardır. $G = \bigcup_k G_k$ işarə edək. $x_0 \in G$ nöqtəsi götürək. Onda müəyyən k_0 üçün $x_0 \in G_{k_0}$ olar. G_{k_0} açıq çoxluq olduğundan elə (α, β) intervalı vardır ki, $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G_{k_0}$. Onda eyni zamanda $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G$ olar. Bu onu göstərir ki, x_0 nöqtəsi G çoxluğunun daxili nöqtəsidir. x_0 G çoxluğunun ixtiyari nöqtəsi olduğundan G-nin açıq çoxluq olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər hər hansı çoxluq istənilən sayda intervalların birləşməsi şəklində göstərilə bilirsə, onda həmin çoxluq açıq çoxluqdur. Başqa sözlə ixtiyari sayda intervalların birləşməsindən ibarət çoxluq açıq çoxluqdur.

Teorem 2. Sonlu sayda açıq çoxluqların kəsişməsi də açıq çoxluqdur.

İsbatı: Tutaq ki, $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ açıq çoxluqlardır. $P = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$ işarə edək. Göstərək ki, G açıq çoxluqdur. $x_0 \in P$ götürək. Onda istənilən $k = 1, 2, ..., n$ üçün $x_0 \in G_k$ və elə (α_k, β_k), $k = 1, 2, ..., n$ intervallrı vardır ki, $x_0 \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k$.

$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ işarə edək. Bu halda $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset P$, yəni x_0 nöqtəsi P çoxluğunun daxili nöqtəsidir. Deməli, P açıq çoxluqdur.

Qeyd. Sonsuz sayda açıq çoxluqların kəsişməsi açıq olmayada bilər.

Məsələn, $G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$, $n = 1, 2, 3, ...$ çoxluqlarından hər biri açıq çoxluqdur, amma onların kəsişməsi olan $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ çoxluğa açıq çoxluq deyilir.

Tərif 3. Tutaq ki, E və S iki nöqtəvi çoxluqdur. Əgər $E \subset S$ olarsa, onda $S|E$ çoxluğuna E çoxluğunun S çoxluğuna qədər tamamlayıcı çoxluğu deyilir və $C_S E$ kimi işarə edilir. Xüsusi halda $S = Z = (-\infty, \infty)$ olarsa, onda tamamlayıcı çoxluq CE kimi işarə olunur.

Tamamlayıcı çoxluq anlayışından istifadə etməklə qapalı və açıq çoxluqlar arasında əlaqəni müəyyən etmək olar. Bu əlaqə aşağıdakı teorem vasitəsi ilə ifadə olunur.

Teorem 3. Əgər G açıq çoxluq isə, onda onun tamamlayıcı çoxluğu CG qapalı çoxluqdur.

İsbatı: $x_0 \in G$ nöqtəsi götürək. Onda elə (α, β) intervalı vardır ki, $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G$. Bu intervala CG çoxluğunun heç bir nöqtəsi daxil deyildir, ona görə də x_0 nöqtəsi CG çoxluğunun limit nöqtəsi ola bilməz. Eləcə də CG çoxluğunun limit nöqtəsi olan nöqtə G çoxluğuna daxil ola bilməz.

Buradan alınır ki, CG çoxluğunun bütün limit nöqtələri özünə daxildir. Yəni CG çoxluğu qapalı çoxluqdur. Teorem isbat olundu.

Teorem 4. Əgər F çoxluğu qapalı isə, onda onun tamamlayıcı çoxluğu CF açıq çoxluqdur.

İsbatı: $x_0 \in CF$ nöqtəsi götürək. Onda x_0 nöqtəsi F çoxluğunun limit nöqtəsi ola bilməz və elə (α, β) intervalı vardır ki, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, amma F çoxluğunun x_0-dan fərqli heç bir başqa nöqtəsi bu intervala daxil deyildir. x_0 nöqtəsi F-ə daxil olmadığından (α, β) intervalında F çoxluğunun heç bir nöqtəsi yoxdur və $(\alpha, \beta) \subset CF$. Deməli x_0 CF çoxluğunun daxili nöqtəsidir və CF açıq çoxluqdur. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki ,bütün həqiqi ədədlər çoxluğu və boş çoxluq qarşılıqlı tamamlayıcı çoxluqlardır və eyni zamanda həm açıq, həm də qapalı çoxluqlardır.

Asanlıqla görmək olar ki, G açıq çoxluqdursa və $[a,b]$ onu öz daxilində saxlayan parça isə onda $[a,b] \,|\, G$ qapalı çoxluqdur. Eləcədə, F qapalı çoxluqdursa və (a,b) onu öz daxilində saxlayan interval isə, onda $(a,b) \,|\, F$ açıq çoxluqdur.

Bu təkliflərin doğruluğu

$$[a,b] \,|\, G = [a,b] \cap CG$$

və

$$(a,b) \,|\, F = (a,b) \cap CF$$

eyniliklərindən alınır.

Əksinə, əgər F qapalı çoxluq və $F \in [a,b]$ isə, onda $(a,b) \,|\, F$ çoxluğu ümumiyyətlə açıq çoxluq deyildir. Məsələn, $F = [0,1]$, $[a,b] = [0,2]$ olarsa, bu halda $[0,2] \,|\, [0,1] = (1,2]$. $(1,2]$ yarımintervalı isə açıq deyildir.

Qeyd. Tutaq ki, E boş olmayan məhdud çoxluqdur $a = \inf E$, $b = \sup E$ işarə edək. $S = [a,b]$ E çoxluğun öz daxilində saxlayan ən kiçik parça adlanır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. Əgər S qapalı məhdud F çoxluğunu öz daxilində saxlayan ən kiçik parça isə, onda $C_S F = [a,b] \,|\, F$ çoxluğu açıq çoxluqdur.

İsbatı: Teoremin doğruluğunu göstərmək üçün $C_S F = (a,b) \cap CF$ olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tutaq ki, $x_0 \in C_S E$. Bu o deməkdir ki, $x_0 \in [a,b]$, $x_0 \overline{\in} F$. $x_0 \overline{\in} F$ olduğundan $x_0 \neq a,\ x_0 \neq b$. Deməli $x_0 \in (a,b)$. Bundan başqa $x_0 \in CF$, ona görə də $C_S F \subset (a,b) \cap CF$. Tərsinə, əgər $x_0 \in (a,b) \cap F$ olarsa, $\alpha \in (a,b) \subset S$, $x_0 \overline{\in} F$, yəni $x_0 \in C_S F$ olar. Yəni $(a,b) \cap CF \subset C_s F$. Nəticədə $C_S F = (a,b) \cap CE.$ Buradan isə $C_S F$ -in açıq çoxluq olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

2.4. Açıq və qapalı çoxluqların quruluşu haqqında teoremlər.

Tərif 1. Tutaq ki, G açıq çoxluqdur. Əgər (a,b) intervalı G çoxluğuna daxil isə, amma uc nöqtələri bu çoxluğa daxil deyildirsə, yəni $(a,b) \subset G,$ $a \overline{\in} G,\ b \overline{\in} G$ isə onda bu intervala G çoxluğunun təşkiledici intervalı deyilir.

Teorem 1. Əgər G boş olmayan hər hansı açıq çoxluq isə, onda çoxluğun hər bir nöqtəsi onun bir təşkiledici intervalına daxildir.

İsbatı: Tutaq ki, $x_0 \in G$. Onda $F = [x_0, \infty) \cap CG$ çoxluğu qapalı və boş olmayan çoxluq olur. F çoxluğu aşığıdan x_0 nöqtəsi ilə məhduddur. Ona görə də F çoxluğunun dəqiq aşağı sərhəddi vardır. $\mu = \inf F$. Onda $x_0 \le \mu$ olar. F qapalı çoxluq olduğundan $\mu \in F$ olar. $x_0 \in G$ olduğundan $x_0 \overline{\in} F$ və deməli, $x_0 < \mu$ olmalıdır. $\mu \in F = [x_0, \infty) \cap CG$ olmasından $\mu \overline{\in} G$ olur. Onda $[x_0, \mu) \subset G$ alarıq. Əks halda elə $y \in [x_0, \mu)$ nöqtəsi vardır ki, $y \overline{\in} G$ olar. Onda $y \in F$ və $y < \mu$ olur. Bu isə μ ədədinin təyininə ziddir. Beləliklə, elə μ ədədi var ki,

1) $x_0 < \mu$, 2) $\mu \overline{\in} G$, 3) $[x_0, \mu) \subset G$

olur.

$Q = (-\infty, x_0] \cap CG$ götürsək və $\lambda = \sup Q$ işarə etsək, onda

1) $\lambda < x_0$, 2) $\lambda \overline{\in} G$, 3) $(\lambda, x_0] \subset G$

olar.

Beləliklə, (λ, μ) intervalı $x_0 \in G$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan təşkiledici interval olar.

Teorem 2. Tutaq ki, (λ, μ) və (σ, τ) eyni bir açıq çoxluğun təşkiledici intervallarıdır. Onda bu intervallar ya kəsişmirlər, ya da üst-üstə düşürlər.

İsbatı: Tutaq ki, (λ, μ) və (σ, τ) intervalları kəsişirlər: $x \in (\lambda, \mu) \cap (\sigma, \tau)$ götürək, onda $\lambda < x < \mu,\ \ \sigma < x < \tau$ olar. Burada $\tau < \mu$ fərz etsək, onda $\tau \in (\lambda, \mu)$ olar. Bu isə $\tau \bar{\in} G$ olmasına ziddir. Deməli, $\mu \le \tau$ olmalıdır. $\mu < \tau$ olması isə $\mu \in (\sigma, \tau)$ olması deməkdir. $\mu \bar{\in} G$ olduğundan $\tau \le \mu$ olmalıdır. Deməli, $\tau = \mu$. Eyni qayda ilə $\sigma = \lambda$ olduğunuda ala bilərik. Beləliklə, (λ, μ) və (σ, τ) intervalları kəsişirsə, onda onlar üst-üstə düşürlər.

Nəticə. Açıq məhdud çoxluğun təşkiledici intervallarının sayı ən çoxu hesabidir.

Doğrudan da, hər bir təşkiledici intervaldan bir rasional ədəd götürsək və rasional ədədlərin ən çoxu hesabi sayda olduğunu nəzərə alsaq, təşkiledici intervalların sayının ən çoxu hesabi olduğunu alarıq.

Teorem 3. Hər bir boş olmayan açıq məhdud G çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən təşkiledici intervalların birləşməsindən ibarətdir:

$$G = \bigcup_k (\lambda_k, \mu_k) \ \ (\lambda_k \bar{\in} G,\ \mu_k \bar{\in} G).$$

Bu teorem ədəd oxu üzərində yerləşən bütün açıq çoxluqlar üçün doğrudur.

İndi isə qapalı F çoxluğunun quruluşunu öyrənək.

Tutaq ki, S qapalı F çoxluğunu öz daxilində saxlayan ən kiçik parçadır. Onda $C_S F$ tamamlayıcı çoxluq açıq olur, $C_S F = S|F$.

Teorem 4. Boş olmayan hər bir qapalı məhdud F çoxluğu ya parçadır, ya da müəyyən bir parçadan sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən və uc nöqtələri F çoxluğuna daxil olan intervalların atılması ilə alınır.

İsbatı: Teorem 3-ə əsasən

$$C_S F = \bigcup_k (\lambda_k, \mu_k) \ \ (\lambda_k \bar{\in} C_S F,\ \mu_k \bar{\in} C_S F)$$

olar. Əgər $A_k = (\lambda_k, \mu_k)$ işarə etsək $C_S F = \bigcup_k A_k$ olar. Onda $\lambda_k \in F,\ \mu_k \in F$ və $F = S \Big| \bigcup_k A_k$ olar. Bu isə teoremin doğru olduğunu göstərir.

Məlumdur ki, hər bir mükəmməl çoxluq qapalıdır və onun izolə edilmiş nöqtələri yoxdur.

Mükəmməl çoxluğun quruluşu haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. Hər bir boş olmayan mükəmməl çoxluq ya parçadır, ya da müəyyən bir parçadan ortaq uc nöqtələri olmayan və parçanın uc nöqtələri ilə üst-üstə düşməyən sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən intervalları atmaqla alınır.

Yuxarıda qeyd etmişdik ki, Kantorun .. mükəmməl çoxluğu kontinium gücə malikdir. İsbat olunmuşdur ki, bu bütün mükəmməl çoxluqlara xas olan bir xassədir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 6. Boş olmayan hər bir mükəmməl çoxluq kontinium gücə malikdir.

Teorem 7. (Q.Kantor-İ.Bendikson). Hesabi olmayan hər bir sonsuz qapalı E çoxluğunu $E = P \cup A$ şəklində göstərmək olar. Burada P mükəmməl çoxluq, A isə ən çoxu hesabi çoxluqdur.

Bu teoremdən nəticə olaraq alınır ki, hesabi olmayan hər bir qapalı sonsuz çoxluq kontinium gücə malikdir.

2.5. Qapalı və açıq çoxluqlara aid məsələlər.

1. $[a,b]$ parçasında verilmiş $f(x)$ funksiyası üçün $f(x) \geq \alpha$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğunun qapalı olduğunu göstərir (α - istənilən həqiqi ədəddir).

2. İsbat edin ki, hər bir qapalı çoxluq hesabi sayda açıq çoxluqların kəsişməsindən ibarətdir.

3. Göstərin ki, həqiqi ox üzərində ortaq nöqtələri olmayan parçalar çoxluğu ən çoxu hesabidir.

4. İsbat edin ki, $[a,b]$ parçasında verilmiş $f(x)$ funksiyası üçün $R[f(x) \geq \alpha]$ və $R[f(x) \leq \alpha]$ çoxluqları qapalı olarsa, onda $f(x)$ kəsilməz funksiyadır, α - istənilən həqiqi ədəddir.

5. Tutaq ki, $f_0(x)$ $[0,1]$ parçasında qeyd olunmuş kəsilməz funksiyadır. İsbat edin ki, $[0,1]$ parçasında kəsilməz olan və $f(x) \leq f_0(x)$ şərtini ödəyən bütün funksiyalar çoxluğu E qapalı çoxluqdur.

Göstəriş: Hər hansı $\varphi \in E'$ funksiyası götürək. Onda elə $\{f_n\}$ kəsilməz funksiyalar ardıcıllığı vardır ki, $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. $\forall\, x \in [0,1]$ və istənilən n üçün $f_n(x) \leq f_0(x)$ olduğundan $\varphi(x) \leq f_0(x)$ alarıq, yəni $\varphi \in E$ Deməli, E qapalıdır.

6. Tutaq ki, müstəvi üzərində radiusları $r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_n < ...$ şərtini ödəyən konsentrik çevrələr verilmişdir. Bu çevrələrin birləşməsindən ibarət çoxluq qapalıdırmı?

Göstəriş: Əgər $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ ardıcıllığı qeyri məhdud isə, onda bu çevrələrin birləşməsindən ibarət çoxluq qapalı, əgər məhdud isə onda qapalı deyildir. Ardıcıllıq məhdud olduğu halda bu çevrəli radiusu $a = \lim_{n\to\infty} r_n$ olan çevrə əlavə olunarsa, onda baxılan çevrələrin qapanmasını almaq olar.

7. Müstəvi üzəində radiusları $r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_n < ...$ olan qapalı dairələr ardıcıllığı verilmişdir. Bunların birləşməsi qapalıdırmı? Bu çoxluq açıqdırmı?

Göstəriş: Əgər $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$ olarsa, onda birləşmə bütün müstəvidən ibarət olur və çoxluq qapalıdır. Əgər $\lim_{n\to\infty} r_n = a < \infty$ olarsa, birləşmə çoxluq qapalı deyil. Hər iki halda bu çoxluq eyni zamanda açıq çoxluqdur.

8. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. E_n ilə $[a,b]$ parçasının $n \le f(x) \le n+1$ $n = 1,2,3,...$ şərtini ödəyən nöqtələri çoxluğunu işarə edək. Göstərək ki, ədəd oxu üzərində $E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup ... \cup E_{2n-1} \cup ...$ qapalı çoxluqdur.

Göstəriş: E_n çoxluqlarndan hər biri qapalı çoxluqdur. $f(x)$ parçada kəsilməz olduğundan elə N natural ədədi vardır ki, $|f(x)| \le N,\ x \in [a,b]$ üçün. Onda alırıq ki, $n > N$ üçün bütün E_n-lə r boş çoxluqdur, $E_n = \varnothing,\ n > N$ üçün. Ona görə də $E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup ...$ çoxluğu sonlu sayda boş olmayan qapalı çoxluqların birləşməsi olar. Bu isə qapalı çoxluqdur.

9. İsbat edin ki, $[a,b]$ parçasını iki boş olmayan kəsişməyən qapalı çoxluqların birləşməsi şəklində göstərmək olmaz.

Göstəriş: Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $[a,b] = F \cup \Phi,$ $F \ne \varnothing,\ \Phi \ne \varnothing,\ F \cap \Phi = \varnothing$ F və Φ qapalıdır.

F və Φ hər ikisi qapalı, boş olmayan aşağıdan məhdud çoxluqlar olduğundan onların ən kiçik nöqtəsi vardır.

Tutaq ki, a F çoxluğunun ən kiçik nöqtəsi, c isə Φ -in ən kiçik nöqtəsidir. Onda $F \cap \Phi = \varnothing$ olduğu üçün $c > a$ olar. Bu halda $[a,c] \subset F$ olar. Buradan görünür ki, $c \in F \subset \Phi$. Bu isə $F \subset \Phi = \varnothing$ olması şərtinə ziddir.

III FƏSİL
ÖLÇÜLƏN ÇOXLUQLAR

3.1. Açıq məhdud çoxluğun ölçüsü.

Həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində parçanın uzunluğu, müstəvi fiqurun sahəsi, fəza fiqurlarının həcmi anlayışlarının ümumiləşməsi olan nöqtəvi çoxluqların ölçüsü anlayışı mühüm əhəmiyyətə malikdir. Nöqtəvi çoxluqların ölçüsü anlayışı görkəmli fransız riyaziyyatcısı Anri Puankareyə məxsusdur. Əvvəlcə ən sadə quruluşa malik olan açıq çoxluqların ölçüsü anlayışı ilə tanış olaq.

Tərif 1. Düz xətt üzərində (a,b) intervalın ölçüsü dedikdə $b-a$ fərqi başa düşülür və

$$m(a,b)=b-a$$

kimi işarə edilir. Aydındır ki, $m(a,b)>0$.

Lemma. Əgər Δ intervalı daxilində bir-biri ilə kəsişməyən sonlu sayda $\delta_1,\delta_2,...,\delta_n$ intervalları yerləşərsə, onda

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \le m\Delta$$

doğrudur.

İsbatı: Tutaq ki, $\Delta=(A,B),\ \delta_k=(a_k,b_k),\ (k=1,2,...,n).$ Bu intervalların sol uc nöqtələrinin artma sırasında düzüldüyünü fərz edək, yəni $a_1<a_2<...<a_n$. Bu halda $b_k \le a_{k+1},\ (k=1,2,...,n-1)$ olmalıdır. Əks halda δ_k və δ_{k+1} intervalları kəsişərdi.

Aydındır ki,

$$q=(B-b_n)+(a_n-b_{n-1})+...+(a_2-b_1)+(a_1-A)>0.$$

Onda $m\Delta=\sum_{k=1}^{n} m\delta_k+q$ münasibətindən $\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \le m\Delta$ olduğunu alırıq.

Lemma isbat olundu.

Tərif 2. Boş olmayan açıq məhdud G çoxluğunu mG ölçüsü onun bütün δ_k təşkiledici intervallarının uzunluqları cəminə deyilir: $mG=\sum_{k} m\delta_k.$ $\{\delta_k\}$ intervallar çoxluğu sonlu və ya hesabi ola bilər.

Əgər G boş çoxluq olarsa, bu halda $mG=0$ qəbul edilir.

Əgər Δ G açıq çoxluğunu öz daxilinə alan interval olarsa, onda $mG \le m\Delta$.

Kantorun açıq çoxluğunun ölçüsünü tapaq:

Məlum olduğu kimi, G_0 Kantor çoxluğunu qurarkən birinci addımda uzunluğu $\frac{1}{3}$ olan $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalı götürülür. İkinci addımda hər birinin uzunluğu $\frac{1}{9}$ olan $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ və $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervalları götürülür. Üçüncü addımda hər birinin uzunluğu $\frac{1}{27}$ olan daha dörd interval götürülür və proses bu qayda ilə sonsuz davam etdirilir. Nəticədə

$$mG_0 = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

olduğunu alırıq.

Teorem 1. Əgər G_1 və G_2 açıq məhdud çoxluqlar isə və $G_1 \subset G_2$ isə, onda $mG_1 \le mG_2$ olar.

Teorem 2. Əgər açıq məhdud G çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda kəsişməyən açıq $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ çoxluqlarının birləşməsindən ibarət isə, onda

$$mG = \sum_k mG_k .$$

İsbatı: G_k çoxluqları açıq olduğundan sonlu və ya hesabi sayda $\delta_i^{(k)},\ i=1,2,\ldots$ təşkiledici intervalların birləşməsindən ibarətdir: $G_k = \bigcup_i \delta_i^{(k)}$.

Onda $G = \bigcup_k G_k = \bigcup_k \bigcup_i \delta_i^{(k)}$.

Əgər $C_m \cap C_n = \varnothing,\ m \ne n$ olduğunu nəzərə alsaq, $\delta_i^{(k)},\ (i=1,2,\ldots,\ k=1,2,..)$ intervalları G çoxluğu üçün təşkiledici intervallar olar. Onda

$$mG = \sum_{ki} m\delta_i^{(k)} = \sum_k\left(\sum_i m\delta_i^{(k)}\right) = \sum_{ki} mG_k$$

alarıq. Teorem isbat olundu.

Bu teorem ölçünün tam additivlik xassəsini ifadə edir.

3.2. Qapalı məhdud çoxluqların ölçüsü.

Tutaq ki, F boş olmayan qapalı məhdud çoxluqdur və S bu çoxluğu öz daxilində saxlayan ən kiçik parçadır. Məlum olduğu kimi bu halda $C_S F$ açıq çoxluqdur və onun $m[C_S F]$ ölçüsü vardır.

Tərif 1. $mF = b - a - m[C_S F]$ ədədinə boş olmayan qapalı məhdud F çoxluğunun ölçüsü deyilir.

Misallara baxaq:

1. $F = [a,b]$. Bu halda aydındır ki, $S = [a,b]$ və $C_S F = \varnothing$, onda alırıq ki, $m[a,b] = b - a$.

2. Tutaq ki, F cüt-cüt kəsişməyən sonlu sayda parçaların birləşməsindən ibarətdir, yəni ..

$$F = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup ... \cup [a_n,b_n]$$

Fərz edək ki, bu parçalar sol uclarının artması istiqamətində düzülmüşlər; onda $b_k < a_{k-1}$, $(k = 1,2,...,n-1)$ olar. Buradan alırıq ki, $S = [a_1,b_n]$ və

$$C_S F = [b_1,a_2] \cup [b_2,a_3] \cup ... \cup [b_{n-1},a_n].$$

Nəticədə,

$$mF = b_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

yəni, sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən parçaların birləşməsinin ölçüsü həmin parçaların uzunluqları cəminə bərabərdir.

3. Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğunun ölçüsünü tapaq. Bu halda $F = P_0$, $S = [0,1]$ və $C_S F = G_0$ olduğundan $mP_0 = 1 - 1 = 0$, $mP_0 = 0$ yəni, Kantorun mükəmməl çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdir. Maraqlı və təəccüblü orasıdır kı, P_0 çoxluğunun ölçüsünün sıfır olmasına baxmayaraq bu çoxluq C kontinium gücünə malikdir. Bu fakt çoxluqlar nəzəriyyəsinin paradokslarından biridir.

3.3 Məhdud çoxluqların xarici və daxili ölçüsü. Ölçülən çoxluqlar.

Tutaq ki, E hər hansı məhdud çoxluqdur.

Tərif 1. E çoxluğunu öz daxilində saxlayan bütün G açıq çoxluqlarının ölçülərinin dəqiq aşağı sərhəddinə E çoxluğunun xarici ölçüsü deyilir və $m^* E$ kimi işarə olunur:

$$m^* E = \inf_{G \supset E} \{mG\}.$$

Bu tərifdən alınır ki, hər bir məhdud çoxluğun xarici ölçüsü vardır və

$$0 \le m^* E < \infty.$$

Tutaq ki, $S = [a,b]$ E çoxluğunu öz daxilində saxlayan ən kiçik parçadır.

Tərif 2. E çoxluğuna daxil olan bütün qapalı F çoxluqlarının ölçülərinin dəqiq yuxarı sərhəddinə E çoxluğunun daxili ölçüsü deyilir və m_*E kimi işarə edilir

$$m_*E = \sup_{F \cup E}\{mF\}.$$

$E \subset [a,b] = S$ və $C_S E = S|E$ olduğundan $C_S E = [a,b]$. Onda tərifə əsasən

$$m_*E = b - a - m^*(C_S E)$$

olduğunu alarıq. Buradan $0 \le m_*E \le b - a$ alınır.

Teorem 1. İstənilən məhdud E çoxluğunun xarici ölçüsü onun daxili ölçüsündən kiçik deyildir, yəni $m_*E \le m^*E$.

İsbatı: E çoxluğunu öz daxilində saxlayan $S = [a,b]$ parçasını götürək. Onda $C_S E = S|E$ çoxluğu üçün $C_S E \subset [a,b]$ və $(E \cup C_S E) \subset [a,b] = S$ olar.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərin tərifinə əsasən elə açıq G və Q çoxluqları vardır ki, $E \subset G$, $C_S E \subset Q$ və $[a,b] \subset (G \cup Q)$ olsun. Onda

$$mG < m^*E + \frac{\varepsilon}{2}, \ \ mQ < m^*(C_S E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Buradan $b - a \le mG + mQ < m^*E + m^*(C_S E) + \varepsilon.$

$\varepsilon > 0$ ixtiyari kiçik ədəd olduğundan $b - a \le m^*E + m^*(C_S E)$ olar. Bu bərabərsizlikdən $m_*E = b - a - m^*(C_S E) \le m^*E$ $\quad m_*E \le m^*E$ olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Aşağıda göstərilən mühüm teoremlər də doğrudur.

Teorem 2. Hər bir açıq məhdud G çoxluğu üçün $m^*G = m_*G = mG$ bərabərliyi doğrudur.

Teorem 3. Hər bir qapalı məhdud F çoxluğu üçün $m^*F = m_*F = mF$ bərabərliyi doğrudur.

Tərif 3. Əgər E çoxluğunun m^*E xarici ölçüsü və m_*E daxili ölçüsü bərabər olarsa, yəni $m^*E = m_*E$ olarsa, onda E çoxluğuna ölçülən çoxluq deyilir və onun ölçüsü $mE = m^*E = m_*E$ kimi təyin edilir. Bu çoxluğun Lebeq ölçüsü adlanır.

Qeyd edək ki, ölçüsü sıfır olan E çoxluğunun istənilən A alt çoxluğu da ölçüləndir və $mA = 0$.

Doğrudan da, $A \subset E$ olduğundan $m^* A \le mE = 0$. Digər tərəfdən $0 \le m_* A \le m^* A = 0$ olduğundan $m_* A = m^* A$ alırıq. Yəni A çoxluğu ölçüləndir və ölçüsü sıfra bərabərdir.

Tərif 3-ə əsasən teorem 2 və teorem 3-dən alınır ki, hər bir açıq məhdud və hər bir qapalı məhdud çoxluq ölçüləndir.

Teorem 4. Əgər E məhdud çoxluğu Δ parçası daxilində yerləşərsə, onda E və $C_S E$ tamamlayıcı çoxluğu eyni zamanda ya ölçüləndirlər ya da ölçülən deyildirlər.

İsbatı. Tutaq ki, E çoxluğu ölçüləndir. Onda tərifə əsasən

$$m_* E = b - a - m^*(C_S E)$$

Buradan

$$m^*(C_S E) = b - a - m_* E \qquad (*)$$

Digər tərəfdən, E çoxluğu $C_S E$ çoxluğu üçün tamamlayıcı çoxluq olur. Odur ki,

$$m_*(C_S E) = b - a - m^* E. \qquad (**)$$

Əgər $m^* E = m_* E$ olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$m^*(C_S E) = m_*(C_S E)$$

olduğunu alırıq. Bu o deməkdir ki, $C_S E$ çoxluğu ölçüləndir. Eyni qayda ilə $C_S E$ çoxluğu ölçülən olduqda A çoxluğunun da ölçülən olduğunu göstərə bilərik. Əgər E çoxluğu ölçülən deyilsə, onda $m^* E > m_* E$. Onda (*) və (**) bərabərliklərinə əsasən

$$m_*(C_S E) < m^*(C_S E).$$

Bu bərabərsizlik $C_S E$ çoxluğunun ölçülən olmadığını göstərir.

Teorem 5. Hər bir məhdud hesabi çoxluq ölçüləndir və onun ölçüsü sıfra bərabərdir.

İsbatı: Tutaq ki, $E = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Kifayət qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədini götürək. Bu çoxluğun hər bir elementini öz daxilində saxlayan intervallar sistemi seçək:

$$\delta_1 = \left(x_1 - \frac{\varepsilon}{2^2}, x_1 + \frac{\varepsilon}{2^2} \right), \delta_2 = \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{2^3}, x_2 + \frac{\varepsilon}{2^3} \right), ...,$$

$$\delta_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right), ...$$

Göründüyü kimi istənilən n üçün $x_n \in \delta_n$, $n = 1,2,...$. Onda $E \subset \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ və

$$0 \le m_* E \le m^* E < \sum_{i=1}^{\infty} m\delta_i = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \ .$$

Buradan $\varepsilon > 0$ sonsuz kiçik ədəd olduğundan $0 \le m_* E \le m^* E \le 0$ alırıq. Deməli $m_* E = m^* E = 0$. Teorem isbat olundu.

Teorem 6. Əgər məhdud E çoxluğu cüt-cüt kəsişməyən sonlu və ya hesabi sayda ölçülən çoxluqların birləşməsindən ibarət isə,

$$U = \bigcup_k E_k, \ \ E_k \cap E_k = \varnothing, \ k \ne k',$$

onda E çoxluğu da ölçüləndir və

$$mE = \bigcup_k mE_k$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. Teoremin isbatı aşağıdakı bərabərsizliklərdən alınır:

$$\sum_k mE_k = \sum_k m_* E_k \le m_* E \le m^* E \le \sum_k m^* E_k = \sum_k mE_k .$$

İsbat edilən bu teorem ölçünün tam additivlik xassəsi adlanır.

Ümumiyyətlə aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 7. İstənilən sonlu sayda ölçülən çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi də ölçülən çoxluqdur.

Əgər E_1 və E_2 ölçülən çoxluqlar isə, onda onların $E_1 | E_2$ fərqi də ölçülən çoxluqdur və $mE = mE_1 - mE_2$ bərabərliyi doğrudur.

3.4. Ölçülən çoxluqlar sinfi. Borel çoxluqları.

Yuxarıda biz çoxluğun daxili və xarici ölçüləri anlayışını daxil etdik və onların bəzi xassələrini göstərdik. Bu anlayışların köməyi ilə çoxluğun Lebeq mənada ölçülən olmasının tərifini verdik və onun da əsas xassələrini qeyd etdik.

3.3. –də isbat edilmiş teorem 5-ə görə hər bir məhdud hesabi çoxluq ölçüləndir və onun Lebeq ölçüsü sıfra bərabərdir.

Amma Kantorun mükəmməl çoxluğu P_0 göstərir ki, bu teoremin tərsi doğru deyildir. Yəni, ölçülən və ölçüsü sıfra bərabər olan çoxluq hesabi olmaya da bilər.

Ona görə də aşağıdakı tərifləri daxil edirik:

Tərif 1. Əgər E çoxluğunu hesabi sayda qapalı çoxluqların cəmi (birləşməsi) şəklində göstərmək olarsa, yəni $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, belə ki, F_k qapalı çoxluqlardır, onda deyirlər ki, E çoxluğu F_σ tipli çoxluqdur.

Tərif 2. Əgər E çoxluğunu hesabi sayda açıq çoxluqların kəsişməsi şəklində göstərmək olarsa, $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$ onda deyirlər ki, E çoxluğu G_δ tipinə aiddir.

3.3-də qeyd edilmiş teorem 7-yə əsasən aşağıdakı teoremi alırıq:

Teorem 1. F_σ yaxud G_δ tipli hər bir məhdud çoxluq ölçülən çoxluqlardır.

İsbatı: Doğrudan da çoxluq F_σ tipinə aiddirsə, onda cəmin məhdud olmasından hər bir həddin məhdud olması çıxır. Eləcədə hər bir hədd çoxluqlar qapalı olduğundan ölçüləndirlər.

Əgər E çoxluğu G_δ tipli məhdud çoxluq isə, onda E-ni öz daxilində saxlayan hər hansı Δ intervalı götürsək, E çoxluğunu $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}(\Delta\cap G_k)$ şəklində göstərə bilərik. Bu bərabərlikdən E çoxluğunun ölçülən olmasını alarıq.

Tərif 3. Əgər E çoxluğu qapalı və açıq çoxluqların köməyi ilə sonlu və ya hesabi sayda birləşmə və kəsişmə əməlləri vasitəsilə alınırsa, onda E çoxluğuna Borel çoxluğu deyilir. Məhdud Borel çoxluqları Borel mənada ölçülən çoxluqlar yaxud (B) ölçülən çoxluqlar adlanır. Misal üçün, F_σ və G_δ tip çoxluqlar Borel çoxluqlarıdır. Teorem 1-in isbatında aparılan mühakimələrin köməyi ilə isbat etmək olar ki, (B) ölçülən çoxluqlar eyni zamanda Lebeq mənada ölçüləndir.

Bu faktın tərsi doğru deyildir. Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar vardır ki, (B) ölçülən deyildir.

İlk dəfə M.Ya. Suslin tərəfindən Lebeq mənada ölçülən, amma Borel mənada ölçülən olmayan effektiv bir misal qurulmuşdur. Onun tərəfindən A-çoxluqlar adlanan Lebeq mənada ölçülən geniş çoxluqlar sinfi müəyyən edilmişdir. Bu sinif bütün (B) çoxluqlar sinfini əhatə edir və ondan kifayət qədər geniş sinifdir.

Aşağıdakı mühüm sual ortaya çıxır.

Ümumiyyətlə, məhdud, Lebeq mənada ölçülən olmayan çoxluq varmı? Aşağıdakı teorem göstərir ki, bu məsələni birbaşa həll etmək mümkün deyildir.

Teorem 2. Lebeq mənada ölçülən bütün çoxluqlardan ibarət olan M çoxluğunun gücü bütün ədədi çoxluqlar çoxluğunun gücünə bərabərdir, yəni $\overline{\overline{M}}=2^C$.

İsbatı. Aydındır ki, $\overline{\overline{M}} \le 2^C$.

Digər tərəfdən ölçüsü sıfra bərabər olan və c kontinium gücünə malik olan (məsələn, Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğu) ölçülən E çoxluğu götürək. Bu çoxluğun bütün alt çoxluqlar çoxluğunu S ilə işarə edək. Sıfır ölçülü hər bir çoxluğun istənilən alt hissəsinin xarici ölçüsü sıfıra bərabər və ölçülən olduğundan $S \subset M$, $\overline{\overline{S}} = 2^C$. Ona görə də $\overline{\overline{M}} > 2^C$. Nəticədə $\overline{\overline{M}} = 2^C$ alırıq. Teorem isbat olundu.

İndi isə aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3. Ölçülə bilməyən məhdud çoxluq vardır.

Teoremi isbat etmək üçün aşağıdakı misalı göstərək.

$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ parçasını götürək və aşağıdakı kimi siniflərə bölək. İki x və y nöqtələrini yalnız o zaman eyni sinifə daxil edəcəyik ki, onların fərqi $x-y$ rasional ədəd olsun. Bunu aşağıdakı kimi edə bilərik: hər bir $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ nöqtəsinə qarşı elə $K(x)$ sinfini qarşı qoyaq ki, həmin sinif $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ çoxluğunun $y = x + r$ şəklində elementlərindən ibarət olsun. r rasional ədəddir. Xüsusi halda $x \in K(x)$.

$K(x)$ çoxluğuna daxil olmayan t ədədi üçün $s = t + r$ şəklində ədədlər çoxluğunu $K(t)$ ilə işarə edək. Məsələn,

$$K\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{3} + r\right\},\ K(0) = \{r\}, K\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = \left\{\frac{\sqrt{3}}{5} + r\right\}\dots .$$

Bu qayda ilə $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ parçası siniflərə bölünür. Beləliklə, eyni sinfə yalnız rasional ədədlə fərqlənən ədədlər çoxluğu daxil edilir. Hər bir sinif hesabi çoxluq olub bir-biri ilə kəsişmirlər. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, bu siniflər kəsişirlər. $z \in K(x) \cap K(y)$ nöqtəsi götürək. Bu ədəd üçün $z = x + r_1 = y + r_2$. Onda $x - y = r_2 - r_1$. Bu isə onu göstərir ki, x və y eyni sinifə daxildir. Onda siniflərin qurulması qaydasına görə $K(x) = K(y)$ olar. Bu qayda ilə verilmiş parçanın nöqtələri siniflərə bölünmüş olur.

Hər bir sinifdən bir nöqtə götürməklə A çoxluğunu quraq. Göstərək ki, A çoxluğu ölçülməyən çoxluqdur. Bu məqsədlə $[-1,1]$ parçasına daxil olan bütün rasional ədədlər çoxluğunu nömrələyək: $r_0 = 0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$. A çoxluğundan $\varphi_k(x) = x + r_k$ inikası (sürüşmə) vasitəsilə alınan çoxluğu A_k ilə işarə edək. Xüsusi halda $A_0 = A$. Bu qayda ilə alınmış $A_0, A_1, A_2, \ldots$ çoxluqları konqruyent olub, kəsişmirlər. Doğrudan da $A_k \cap A_n \neq \varnothing$ olduqda $z \in A_k \cap A_n$ nöqtəsi üçün $z = x_k + r_k = x_n + r_n$. Buradan $x_k - x_n = r_n - r_k$. Odur ki, x_k və x_n eyni bir sinifdən olur və $x_k, x_n \in A$ olar. Bu isə mümkün deyil. Çünki A –nın qurulması qaydasına görə hər sinifdən A-ya bir nöqtə daxildir. Konqruyent çoxluqlar üçün

$$m_* A = m_* A_k = \alpha,\ m^* A = m^* A_k = \beta\ \ (k = 0,1,2,\ldots)$$

$x \in A \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $r \in [-1,1]$ olduğundan $y \in A_k$ üçün $y = x + r_k$.

Buradan $A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Onda $\bigcup_k A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Ona görə də

$$\sum_k m_* A_k \leq m_*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq m_*\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = 3.$$

Buradan $\alpha + \alpha + \ldots + \alpha + \ldots \leq 3$, deməli $\alpha = 0$.

Göstərək ki, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_k A_k$.

İstənilən $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ nöqtəsi götürək. Bu nöqtə siniflərdən birinə, tutaq ki, $K(x)$ sinfinə daxildir. $K(x)$ sinfindən bir nöqtə, tutaq ki, x_0 nöqtəsi A-ya daxildir. Onda $x - x_0 = r_{k_0}$, $x = x_0 + r_{k_0} \in A_{k_0} \subset \bigcup_k A_k$. Ona görə də $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_k A_k$ münasibətinə görə

$$m^*\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = 1 \leq m^*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k m^* A_k = \beta + \beta + \beta + \ldots$$

Buradan $\beta > 0$ alınır. Son nəticədə $0 = m_* A < m^* A$ alınır. Bu isə A çoxluğunun ölçülən olmadığını göstərir.

3.5. Çoxluqlar nəzəriyyəsinin ölçü problemləri haqqında qısa məlumat

Yuxarıda göstərilən misal Lebeq mənada ölçülən olmayan məhdud çoxluğun varlığını isbat edir. Bu nəticə görkəmli riyaziyyatçılarda Lebeq mənada ölçü anlayışının müəyyən çatışmazlığa malik olması fikrini ortaya sürməyə əsas vermişdir. Ona görə də ölçü anlayışının təkmilləşməsi və inkişaf etdirilməsi zərurəti ortaya çıxmışdır. Bütün bunları öyrənmək üçün məsələnin dəqiq qoyuluşunu bilmək vacibdir.

Nöqtəvi çoxluqların ölçülməsi məsələsini iki formada qoymaq mümkündür.

I. Ölçü nəzəriyyəsinin "çətin" məsələsi.

Bu halda məsələ aşağıdakı kimi qoyulur. Hər bir məhdud çoxluğa qarşı onun ölçüsü adlanan mənfi olmayan elə μE kəmiyyəti qarşı qoymaq tələb edilir ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

1) Əgər $E = [0,1]$ isə, onda $\mu E = 1$ olsun,

2) Əgər A və B çoxluqları konquryent isə, onda $\mu A = \mu B$ olsun,

3) Əgər E çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən E_k $(k = 1,2,...)$ çoxluqlarının birləşməsi olarsa, onda $\mu E = \sum_k \mu E_k$ (ölçünün additivliyi).

Burada məsələ xətti halda, yəni birölçülü fəzada, daha doğrusu ədəd oxu üzərindəki çoxluqlar üçün qoyulmuşdur. Məsələni ikiölçülü, yəni müstəvi üzərindəki çoxluqlar üçün, ümumiyyətlə, n ölçülü R^n çoxluğu üçün də qoymaq olar. Amma, bu halda $[0,1]$ parçası $[0,1;0,1]$ kvadratı ilə, ümumi halda n ölçülü vahid kub ilə əvəz edilməlidir.

İsbat olunmuşdur ki, ölçü nəzəriyyəsinin "çətin" məsələsi R_1 fəzasında belə həll olunan deyildir.

II. Ölçü nəzəriyyəsinin "asan" məsələsi.

Bu halda da məsələ demək olar ki, "çətin" məsələdə olduğu kimi qoyulur. Yeganə fərq 3-cü şərtdə E çoxluğunun sonlu sayda E_k çoxluqlarının cəmi şəklində olduğu hal üçün qoyulur. Yəni, ölçünün tam additivliyi əvəzinə onun sonlu additiv olması şərtinin ödənməsi tələb edilir.

Bu məsələ ilə əlaqədar aşağıdakı mühüm nəticələri göstərə bilərik.

Teorem 1 (S. Banax). Ölçü nəzəriyyəsinin "asan" məsələsi R_1 və R_2 fəzalarında həll olunandır, amma məsələnin həlli yeganə deyildir.

Teorem 2 (F.Hausdorf). $n \geq 3$ olduqda R_n fəzasında ölçü nəzəriyyəsinin "asan" məsələsi həll olunan deyildir.

Bu nəticələrin əsas fərqi orasındadır ki, məsələnin şərtinə daxil olan konqruyentlik anlayışı hərəkət anlayışı ilə sıx bağlı olduğundan və çoxölçülü fəzalarda hərəkətlər qrupu daha geniş olduğundan bu qruplarda invariant qurmaq məsələsi daha çətindir.

Ümumiyyətlə, Lebeq mənada ölçü anlayışının daha təbii olması fikri üstünlük təşkil edir.

3.6. Çoxluğun Jordan ölçüsü haqqında anlayış.

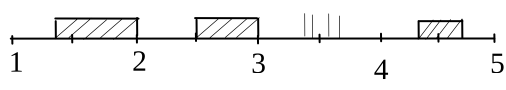
Yuxarıda biz nöqtəvi çoxluqların quruluşunu nəzərdən keçirdik. Bu nöqtələr çoxluğunun ədəd oxu üzərində yerləşdiyi hissələrin uzunluğunu xarakterizə edən kəmiyyət haqqında heç bir məlumat verilməmişdir. Ədəd oxu üzərində, müstəvidə və fəzada uyğun olaraq uzunluq, sahə, həcm anlayışlarının nöqtəvi çoxluqlar üçün heç bir ümumiləşməsi verilməmişdir.

Bütün bu qeyd olunan məsələlər çoxluqların Jordan ölçüsü anlayışı ilə sıx bağlıdır.

Görkəmli riyaziyyatçı Anri Lebeq tərəfindən yeni ölçü anlayışı meydana gəldikdən sonra çoxluğun Jordan ölçüsü anlayışı riyazi tədqiqatlarda öz əhəmiyyətini itirmişdir. Buna baxmayaraq çoxluğun Jordan ölçüsü anlayışı daha mürəkkəb Lebeq ölçüsü anlayışını dərindən başa düşmək üçün bir vasitə olmaqla bərabər, ölçü nəzəriyyəsinin inkişafında bir mərhələ rolunu oynamışdır.

İndi isə çoxluğun Jordan ölçüsü anlayışını izah edək. Tutaq ki, ədəd oxu üzərində hər hansı məhdud E nöqtəvi çoxluğu verilmişdir. Fərz edək ki, ədəd oxu üzərində hər hansı uzunluq vahidi qəbul edilmişdir. Aşağıdakı sual ortaya çıxır. Düz xətt üzərində baxılan E çoxluğunun tutduğu yerin uzunluğu dedikdə nə başa düşülür? Məsələn, $[0,1]$ parçası daxilində Kantor çoxluqlarının tutduğu yerin uzunluğu $[0,1]$ parçasının hansı hissəsini təşkil edir? Eləcə də bu parça daxilində yerləşən rasional ədədlər çoxluğunun uzunluğu nədir? Ümumiyyətlə bu çoxluqların uzunluğundan danışmaq olarmı?

E çoxluğunu öz daxilində saxlayan $[a,b]$ parçasını götürək. a və b uclarını tam ədəd olaraq seçək. $[a,b]$ parçasının uzunluğu $b-a=k$ tam ədəd olar. $[a,b]$ parçasını k bərabər hissəyə bölək. Alınmış parçalardan hər birini birinci ranqlı parçalar adlandıraq. Bu parçalardan neçəsinin tamamilə E çoxluğunun nöqtələri ilə dolduğunu, neçəsinin isə E çoxluğundan heç olmazsa bir nöqtəni öz daxilində saxlayan parçalar olduğunu sayırıq.



Şəkildə dörd sayda birinci ranqlı parçalar vardır. Göründüyü kimi bu parçalardan heç biri E çoxluğunun nöqtələri ilə tam dolmamışdır. E çoxluğunun nöqtələrinin daxil olduğu parçaların sayı isə dörddür. E-nin nöqtələri ilə tam dolmuş parçaları "dolmuş" parçalar, E-nin nöqtələri ilə tam dolmayan parçaları "saxlayan" parçalar adlandırırıq.

Birinci ranqlı "dolmuş" parçaların uzunluqları cəmini l_1 ilə, birinci ranqlı "saxlayan" parçaların uzunluqları cəmini isə L_1 ilə işarə edək. Şəkildə $l_1=0$,

$L_1 = 4$. Birinci ranqlı parçalardan hər birini yenidən s sayda hissələrə bölək (şəkildə $s = 2$). Bu hissələrə ikinci ranqlı parçalar deyəcəyik. Yenidən ikinci növ "dolmuş" parçaların uzunluqları cəmini l_2 ilə, "saxlayan" parçaların uzunluqları cəmini isə L_2 ilə işarə edək (şəkildə $l_2 = \frac{1}{2}$, $L_2 = 3$).

İkinci ranqlı parçalardan hər birini yenidən s sayda hissələrə bölməklə alınan üçüncü ranqlı parçalardan "saxlayan" parçaların uzunluqları cəmini l_3 ilə, "dolmuş" parçaların uzunluqları cəmini L_3 ilə işarə edək. Prosesi hər bir parçanı s yerə bölməklə sonsuz davam etdirək. Nəticə də mənfi olmayan ədədlərdən ibarət $L_1, L_2, ..., L_n, ...,$ $l_1, l_2, ..., l_n, ...$ ardıcıllıqlarını alırıq.

Birinci ardıcıllıq yuxarı Jordan ardıcıllığı, ikinci ardıcıllıq isə aşağı Jordan ardıcıllığı adlanır. Göründüyü, kimi yuxarı Jordan ardıcıllığı monoton azalan, aşağı Jordan ardıcıllığı isə monoton artan ardıcıllıqdır. Yuxarı Jordan ardıcıllığı aşağıdan aşağı Jordan ardıcıllığının istənilən həddi ilə, aşağı Jordan ardıcıllığı isə yuxarıdan yuxarı Jordan ardıcıllığının ixtiyari həddi ilə məhduddur. Onda hər iki ardıcıllığın yığılan ardıcıllıq olduğunu alırıq.

Bu ardıcıllıqların limiti üst-üstə düşə də bilər, bir-birindən fərqli də ola bilər. Aydındır ki, bu ardıcıllıqların limitləri o zaman bərabər olar ki, $\lim\limits_{n\to\infty}(L_n - l_n) = 0$ olsun.

Tərif. Yuxarı Jordan ardıcıllığının limitinə E çoxluğunun Jordan mənada xarici ölçüsü deyilir və $\text{mes}^* E$ kimi işarə olunur. Aşağı Jordan ardıcıllığının limitinə E çoxluğunun Jordan mənada daxili ölçüsü deyilir və $\text{mes}_* E$ kimi işarə edilir.

Əgər E çoxluğunun daxili və xarici ölçüləri üst-üstə düşərsə, bu halda E çoxluğu Jordan mənada ölçülən adlanır və onların ümumi qiymətinə çoxluğun Jordan ölçüsü deyilir.

$$\text{mes} E = \text{mes}^* E = \text{mes}_* E$$

$\text{mes}^* E - \text{mes}_* E = \lim\limits_{n\to\infty}(L_n - l_n)$ fərqinin ciddi mənası vardır. O aşağıdakından ibarətdir:

n ranqlı "saxlayan" parçalarla, eyni ranqlı "dolmuş" parçaların $G_n - F_n$ fərqinin qapanmasına baxaq. Bu çoxluq E çoxluğunun bütün sərhəd nöqtələrini öz daxilində saxlayan parçalardan ibarətdir. $G_n - F_n$ çoxluğunu təşkil edən parçaların uzunluqları cəmi $L_n - l_n$-ə bərabərdir (n ranqlı parçalar üçün). $n \to \infty$ şərtində $L_n - l_n$ kəmiyyəti E-nin sərhəd nöqtələri çoxluğunun xarici ölçüsünə bərabər olan limitə yığılır. Onda aydındır ki, E çoxluğu o zaman Jordan mənada ölçülən olar ki, E -nin bütün sərhəd nöqtələri çoxluğunun xarici ölçüsü sıfra bərabər olsun (yəni $\lim\limits_{n\to\infty}(L_n - l_n) = 0$ olsun).

Çoxluğun Jordan ölçüsünün tapılmasına aid misallara baxaq.

1. Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğunun ölçüsünü tapaq. $[0,1]$ parçasını və onun daxilində yerləşən P_0 çoxluğunu götürək.

Birinci ranqlı parça olaraq $[0,1]$ parçasını götürək: birinci ranqlı "dolmuş" parça yoxdur. "Saxlayan" birinci ranqı parça olaraq $[0,1]$ parçasını götürək. Onda $l_1 = 0,\ L_1 = 1$ olar.

Birinci ranqlı parçanı üç bərabər hissəyə bölək və bunları ikinci ranqlı parçalar adlandıraq. İkinci ranqlı "dolmuş" parça yoxdur, amma iki sayda $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ "saxlayan" parçalar vardır. Deməli, $l_2 = 0,\ L_2 = \frac{2}{3}$.

İkinci ranqlı bu parçalardan hər birini yenidən üç bərabər hissəyə bölək və bunları üçüncü ranqlı çoxluq adlandıraq. Üçüncü ranqlı parçalar içərisində yenə də "dolmuş" parçalar yoxdur, deməli $l_3 = 0$. Üçüncü ranqlı dörd sayda $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9},1\right]$ "saxlayan" parçalar vardır, yəni $L_3 = \frac{4}{9}$.

Prosesi bu qayda ilə qeyri-məhdud sayda davam etdirsək, nəticədə

$$L_1 = 0,\ L_2 = \frac{2}{3}, L_3 = \frac{4}{9},\dots, L_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\dots$$

$$l_0 = 0,\ l_2 = 0, l_3 = 0,\dots, l_n = 0,\dots$$

yuxarı və aşağı Jordan ardıcıllıqlarını alarıq.

Birinci ardıcıllıq monoton azalaraq sıfra yaxınlaşır, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 0$.

İkinci ardıcıllıq sıfırlardan ibarət stasionar ardıcıllıqdır və $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 0$.

Onda alırıq ki, P_0 çoxluğunun Jordan ölçüsü $\mathrm{mes}P_0 = 0$.

2. $[0,1]$ parçasında yerləşən rasional ədədlər çoxluğunun Jordan ölçüsünü tapaq.

Yuxarıdakı misalda olduğu kimi $[0,1]$ parçasını hissələrə bölsək bütün eyni ranqlı parçalar içərisində "dolmuş" parçalar yoxdur. Ona görə də $l_1 = 0,\ l_2 = 0,\dots, l_n = 0,\dots$. Eləcədə bütün eyni ranqlı çoxluqlardan hamısı "saxlayan" parçalardır, yəni $L_1 = 1,\ L_2 = 1,\dots, L_n = 1,\dots$.

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} l_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}(L_n - l_n) = 1 \neq 0$$

olduğundan bu çoxluğun Jordan mənada ölçülən olmadığını alırıq.

Eyni qayda ilə mühakimə aparmaqla $[0,1]$ parçası daxilində irrasional ədədlər çoxluğunun da Jordan mənada ölçülən olmadığını alırıq.

Qeyd. Göstərilən bu misallar verilmiş çoxluğun Lebeq və Jordan ölçülərinin ciddi fərqlərini göstərir.

Indi isə Jordan mənada ölçülən çoxluqların əsas xassələrini göstərən teoremləri verək.

Teorem 1. Əgər E_1 və E_2 Jordan mənada ölçülən çoxluqlar isə və $E_1 \subset E_2$ isə, onda $\text{mes}E_1 \leq \text{mes}E_2$.

Teorem 2. Əgər E_1 və E_2 Jordan mənada ölçülən çoxluqlar isə, onda $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ və $E_1 | E_2$ çoxluqlarıda Jordan mənada ölçüləndir.

Teorem 3. Əgər E_1 və E_2 Jordan mənada ölçüləndirsə və $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ isə, onda $\text{mes}(E_1 \cup E_2) = \text{mes}E_1 + \text{mes}E_2$.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər E çoxluğu sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən Jordan mənada ölçülən hissələrdən ibarət olarsa, yəni $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, $E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$ olarsa, onda $mE = \sum_{k=1}^{n} mE_k$ (Jordan ölçüsünün additivlik xassəsi).

Nəticə 2. Əgər E_1 və E_2 Jordan mənada ölçülən çoxluqlar isə və $E_1 \subset E_2$ isə onda

$$\text{mes}(E_1 | E_2) = mE_1 - mE_2.$$

Qeyd 1. Çoxluqların birləşməsinin Jordan mənada ölçülən olmasından onun hissələrinin ölçülən olması çıxmır. Məsələn, $[0,1]$parçası Jordan mənada ölçüləndir. Amma onun hissələri olan $[0,1]$-ə daxil olan rasional və irrasional ədədlər çoxluqları Jordan mənada ölçülməyən çoxluqlardır.

Qeyd 2. Jordan ölçüsü tam additivlik xassəsinə malik deyildir. Yəni, hesabi sayda Jordan mənada ölçülən çoxluqların cəmi Jordan mənada ölçülən olmaya da bilər.

Doğrudan da, bir nöqtədən ibarət olan çoxluqlar Jordan mənada ölçüləndir və onun ölçüsü sıfra bərabərdir. Ancaq verilmiş parçanın bütün rasional nöqtələri çoxluğu Jordan mənada ölçülən deyil.

3.7. Ölçülən çoxluqlara aid çalışmalar.

1) $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2^{k-1}},1-\frac{1}{2^{k}}\right)\times\left[0,\frac{1}{2^{k-1}}\right]$ çoxluğunun ölçüsünü tapın.

Cavab: $m(A)=\frac{2}{3}$

2) $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{k-1}},1\right]\times\left[\frac{1}{2^{k}},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$ çoxluğunun ölçüsünü tapın.

Cavab: $m(B)=\frac{1}{3}$

3) Kantorun G_0 açıq çoxluğunun ölçüsünü tapın:

Cavab: $m(G_0)=1$

4) Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğunun ölçüsünü tapın.

Cavab: $m(P_0)=0$

5) $G=(0,1)\setminus\left\{\frac{1}{k},k\in N\right\}$ açıq çoxluğunun ölçüsünü tapın.

Cavab: $mG=1$

6) R_2 fəzasında $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}(0,1)\times\left[\frac{1}{2^{k}},\frac{1}{2^{k-1}}\right]$ açıq çoxluğunun ölçüsünü tapın.

Cavab: $m(G)=1$

7) Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar ölçüləndir və onların ölçüsünü tapın.

a) $E=\{x\in R_1;\ \sin x>0\}$.

b) $E=\{x\in R_1;\ 0<\cos x<1\}$.

8) Aşağıdakı çoxluqların ölçülərini tapın.

a) $E=\left\{x\in(-\infty,\infty);\ |\operatorname{arctg} x|\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

b) $E=\{x\in[0,2\pi];\ |\operatorname{arcctg} x|\le 1\}$.

c) $E=\{x\in(-\infty,\infty);\ \ln x-\ln 5<0\}$.

d) $E=\{x\in[3,4];\ 3\sin^2 x+4\sin x-7\le 0\}$.

e) $E=\{x\in[0,\pi];\ 4\sin 2x\cdot\cos 2x-\sqrt{2}\ge 0\}$.

f) $E=\{x\in(-\infty,\infty);\ |3-2x|\le 7\}$.

Cavab: a) $mE=2$, b) $mE=1{,}75\pi$, c) $mE=5$, d) $mE=1$,
e) $mE=0{,}25\pi$, f) $mE=7$.

9) Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar ölçüləndir və onların ölçüsünü tapın.

a) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[2^k, 2^k+\frac{1}{k}\right]$.

b) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{2^k}, \sqrt{2^k+1}\right]$.

c) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[k^k, k^k+\frac{1}{k\ln k}\right]$.

d) $E=\{(x,y)\in R_2;\ x\geq 0;\ [x]\leq y<[x+1]\}$.

e) $E=\left\{(x,y)\in R_2;\ x\geq 0;\ [x]\leq y<[x]+\frac{1}{2^{[x]}}\right\}$.

Cavab: a) $mE=\infty$, b) $mE=\infty$, c) $mE=\infty$, d) $mE=\infty$, e) $mE=2$.

IV FƏSİL
ÖLÇÜLƏN FUNKSİYALAR

4.1. Ölçülən funksiyanın tərifi və əsas xassələri.

Tutaq ki, E hər hansı nöqtəvi çoxluqdur. Əgər E çoxluğunun hər bir nöqtəsinə qarşı müəyyən $f(x)$ ədədi qarşı qoyulmuşsa, bu halda deyirlər ki, E çoxluğunda $f(x)$ funksiyası təyin edilmişdir. Funksiya sonlu və ya müəyyən işarəyə malik sonsuz qiymət ala bilər. Əgər istənilən $x \in E$ üçün $-\infty < f(x) < \infty$ olarsa, $f(x)$ sonlu funksiya adlanır.

$E\,(f > a)$ simvolu ilə E çoxluğunun $f(x) > a$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu işarə olunur.

Eyni qayda ilə $E\,(f \geq a), E\,(f = a), E\,(f \leq a),\quad E\,(a < f < b)$ simvollarını da daxil edə bilərik.

Tərif 1. Tutaq ki, $f(x)$ ölçülən E çoxluğunda təyin edilmiş funksiyadır. Əgər E çoxluğu və istənilən sonlu a üçün $E\,(f > a)$ çoxluqları ölçülən isə, onda $f(x)$ funksiyasına E çoxluğunda ölçülən funksiya deyilir.

Teorem 1. Sıfır ölçülü çoxluqda təyin edilmiş istənilən $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.

İsbatı: Tutaq ki, E sıfır ölçülü çoxluqdur, $mE = 0$. Onda istənilən a həqiqi ədədi üçün $E\,(f > a) \subset E$. Buradan $m^*E\,(f > a) \leq mE = 0$ olar. Digər tərəfdən $m_*E\,(f > a) \leq m^*E(f > a) \leq 0$ olduğundan $m_*E\,(f > a) =$ $= m^*E(f > a) = 0$ alırıq. Yəni $mE\,(f > a) = 0$. Bu isə $f(x)$ funksiyasının ölçülən olması deməkdir.

Teorem 2. Əgər $f(x)$ funksiyası ölçülən E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $f(x)$ funksiyası istənilən ölçülən $A \subset E$ altçoxluğunda da ölçülən funksiyadır.

Toremin isbatı $A(f > a) = A \cap E(f > a)$ bərabərliyindən alınır.

Teorem 3. Tutaq ki, $f(x)$ sonlu və ya hesabi sayda ölçülən E_k çoxluqlarının cəmindən ibarət olan ölçülən $E = \bigcup_k E_k$ çoxluğunda təyin edilmişdir.

Əgər $f(x)$ funksiyası E_k çoxluqlarının hər birində ölçülən isə, onda E çoxluğunda ölçüləndir.

Teoremin isbatı $E\,(f > a) = \bigcup_k E_k(f > a)$ bərabərliyindən alınır.

Tərif 2. Eyni bir E çoxluğunda təyin edilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün $mE\,(f \neq g) = 0$ şərti ödənərsə,onda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları ekvivalent funksiyalar adlanır və $f(x) \sim g(x)$ kimi göstərilir.

Tərif 3. Əgər hər hansı təklif E çoxluğunun ölçüsü sıfır olan $E_0 \subset E,\ mE_0 = 0$ çoxluğundan başqa E-nin bütün nöqtələrində ödənərsə, onda deyirlər ki, bu təklif E çoxluğunda sanki hər yerdə doğrudur.

Bu tərifdən alınır ki, eyni bir E çoxluğunda təyin edilmiş ekvivalent funksiyalar sanki hər yerdə bərabərdirlər.

Teorem 4. Əgər ölçülən E çoxluğunda verilmiş ölçülən $f(x)$ funksiyası $g(x)$ funksiyasına ekvivalent isə, onda $g(x)$ funksiyası da ölçülən funksiyadır.

İsbatı: Tutaq ki, $A = E\,(f \neq g)$. $mA = 0$ olduğu üçün $B = E \setminus A$ ölçülən çoxluqdur. Deməli $f(x)$ B çoxluğunda ölçüləndir. B çoxluğunda $f(x) = g(x)$ olduğundan $g(x)$-da B çoxluğunda ölçülən olar. $g(x)$ eyni zamanda A çoxluğunda da ölçülən olduğundan $E = A \cup B$ çoxluğunda da ölçülən olar.

Teorem 5. Əgər $f(x)$ ölçülən E çoxluğunda verilmiş ölçülən funksiya isə, onda $E\,(f \geq a), E\,(f = a), E\,(f \leq a),\ E\,(a < f)$ çoxluqlarından hər biri ölçülən çoxluqdur.

Teoremin isbatı aşağıdakı bərabərliklərdən alınır:

$$E\,(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$$

$$E\,(f = a) = E\,(f \geq a) \setminus E\,(f > a)$$

$$E\,(f \leq a) = E \setminus E\,(f > a)$$

$$E\,(a < f) = E \setminus E\,(f \geq a)$$

Qeyd. Əgər $E\,(f \geq a), E\,(f \leq a),\ E\,(a < f)$ çoxluqlarından biri ölçülən olarsa, onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olar.

Teorem 6. Əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən isə, onda istənilən k sonlu ədədi üçün

1) $f(x) + k$, 2) $k \cdot f(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$, 5) $\frac{1}{f(x)},\ f(x) \neq 0$

funksiyaları da E çoxluğunda ölçüləndir.

Teoremin isbatı aşağıdakı münasibətlərdən alınır:

1. $E\,(f + k > a) = E(f > a - k)$

2. $E\,(kf > a) = \begin{cases} E(f > \frac{a}{k}), & k > 0, \\ E(f < \frac{a}{k}), & k < 0, \end{cases}$

3. $E\,(|f| > a) = \begin{cases} E, & a < 0, \\ E(f > a) \cup E(f < -a), & a \geq 0. \end{cases}$

4. $E\,(f^2 > a) = \begin{cases} E, & a < 0, \\ E(|f| > \sqrt{a}), & a \geq 0. \end{cases}$

5. $E\,(\frac{1}{f} > a) = \begin{cases} E(f > 0), & a = 0, \\ E(f > 0) \cap E(f < \frac{1}{a}), & a > 0, \\ E(f > 0) + E(f < 0) \cap E(\frac{1}{a}), & a < 0. \end{cases}$

Lemma. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ E çoxluğunda verilmiş ölçülən funksiyalar isə, onda $E\,(f > g)$ çoxluğu ölçüləndir.

İsbatı: $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ ilə bütün rasional ədədlər çoxluğunu işarə edək. Onda

$$E(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(E(f \geq r_k) \cap E(g < r_k))$$

bərabərliyinə əsasən $E\,(f > g)$ çoxluğunun ölçülən olduğunu alırıq.

Teorem 7. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ E çoxluğunda verilmiş sonlu ölçülən funksiyalardır. Onda

1) $f(x) - g(x)$, 2) $f(x) + g(x)$, 3) $f(x) \cdot g(x)$, 4) $\frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0)$

funksiyaları da ölçülən funksiyalardır.

İsbatı: 1) İstənilən a ədədi üçün $g(x) + a$ ölçülən funksiyadır. Onda yuxarıdakı lemmaya görə $E\,(f > g + a)$ çoxluğu da ölçüləndir. $E\,(f - g > a) = E\,(f > g + a)$ bərabərliyindən $f(x) - g(x)$-in ölçülən olması alınır.

2) $f(x) + g(x)$ funksiyasının ölçülən olması $f(x) + g(x) = f(x) - [g(x)]$ bərabərliyindən alınır.

3) $f(x) \cdot g(x)$ hasilinin ölçülən olması

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}\left\{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2\right\}$$

bərabərliyindən alınır.

4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)}\cdot f(x)$ şəklində yazaq $\dfrac{1}{g(x)}$ və $f(x)$-in ölçülən olduğu halda hasilində ölçülən olmasına görə $\dfrac{f(x)}{g(x)}$-in ölçülən olmasını alırıq.

Bu teorem göstərir ki, ölçülən funksiyalar üzərində hesab əməlləri ölçülən funksiyalar çoxluğunda cəbri əməllərdir, yəni bu sinifdən kənar çıxmır.

4.2. Ölçülən funksiyalara aid misallar.

1. Göstərin ki, ölçülən E çoxluğunda sabit olan $f(x)=c$ funksiyası ölçüləndir.
   Həlli. İstənilən a həqiqi ədədi üçün doğru olan
$$E\ (f>a)=\begin{cases}E, & a<c,\\ \varnothing, & a>c\end{cases}$$
E və $\varnothing$ çoxluqları ölçülən olduğundan $E\ (f>a)$ çoxluğu da ölçüləndir. Deməli, $f(x)=c$ ölçüləndir.

2. Göstərin ki, $E=[a,b]$ parçasında pilləvari (hissə-hissə sabit) funksiya ölçülən funksiyadır.
   Həlli. Məlum olduğu kimi $f(x)$ funksiyası o zaman pilləvari adlanır ki, $[a,b]$ parçasını $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ nöqtələri vasitəsilə elə hissələrə bölmək olsun ki, $(x_0,x_1),(x_1,x_2),...(x_{n-1},x_n)$ intervallarının hər birində $f(x)$ funksiyası sabit olsun:
$$f(x)=c_k,\ \ x\in(x_k,x_{k+1}),\ \ (k=0,1,2,...,n-1).$$
Əvvəlki misala görə $f(x)$ funksiyası $E_k=(x_k,x_{k+1}),\ k=0,1,2,...,n-1$ çoxluqlarının hər birində ölçüləndir. Onda $f(x)$ funksiyası $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}E_k$ çoxluğunda da ölçülən olar.

Digər tərəfdən $E=[a,b]=\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}E_k\right)\cup E_0,\ E_0=\{a,x_1,x_2,...,b\}$ və $mE_0=0$ olduğundan $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olar.

3. Göstərin ki, $E=[A,B]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.
   Həlli. Əvvəlcə göstərək ki, istənilən a ədədi üçün $F=E\ (f\le a)$ çoxluğu qapalıdır. Tutaq ki, x_0 nöqtəsi F çoxluğunun limit nöqtəsidir. Onda

F çoxluğundan x_0 nöqtəsinə yığılan $\{x_n\}$ ardıcıllığı seçmək olar, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $f(x_n) \le a$.

$f(x)$ funksiyası kəsilməz olduğundan $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$.

Onda $f(x_n) \le a$ bərabərsizliyində $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək $f(x_0) \le a$ olduğunu alarıq. Buradan F-in qapalı çoxluq olduğu alınır.

E və F çoxluqları qapalı olduğundan ölçülən çoxluqlardır.

$$E\,(f > a) = E | E\,(f \le a)$$

bərabərliyindən $E\,(f > a)$-nın ölçülən olması alınır. Bu isə $f(x)$-in ölçülən olması deməkdir.

4. Göstərin ki, M çoxluğu və onun xarakteristik funksiyası adlanan $\varphi_M(x)$ funksiyası eyni zamanda ya ölçülən, ya da olçülməyəndir.

Həlli. Tutaq ki, $\varphi_M(x)$ ölçülən funksiyadır. Onda $M = E\,(\varphi_M > 0)$ çoxluğu da ölçüləndir.

Əksinə, M ölçülən çoxluq olduqda

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} 0, & a \ge 1 \\ M, & 0 < a < 1 \\ E, & a < 0 \end{cases}$$

münasibətindən $\varphi_M(x)$ funksiyasının ölçülən olmasını alırıq.

5. $[0,1]$ parçasında

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x-\text{irrasional olduqda} \\ 1, & x-\text{rasional olduqda} \end{cases}$$

bərabərliyi ilə təyin edilən və Dirixle funksiyası adlanan funksiyanın ölçülən olduğunu göstərin.

Həlli. Məlumdur ki, Dirixle funksiyası

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} [\cos m!\pi x]^2 .$$

bərabərliyi vasitəsilə də təyin edilir.

Doğrudan da x-rasional ədəd, yəni $x = \frac{p}{q}$ olduqda kifayət qədər böyük m ədədi üçün $m!x$ tam ədəd olur. Odur ki, $\cos m!\pi x = \pm 1$ və deməli $f(x) = 1$ olur. Əgər x irrasional olarsa, onda $|\cos m!\pi x| < 1$ olduğundan $f(x) = 0$ olur. $g(x) = 0,\ x \in [0,1]$ funksiyası sabit funksiya olduğundan ölçüləndir. $E(f \ne g) = \{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$. Burada $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ parçasında yerləşən rasional ədədlər çoxluğudur. Bu çoxluğun ölçüsü sıfır olduğundan $f(x) \sim g(x)$ olduğunu alırıq. Nəticədə $f(x)$ funksiyasının da ölçülən olmasını alırıq.

Qeyd 1. Məlum olduğu kimi Dirixle funksiyası $[0,1]$ parçasının bütün nöqtələrində kəsilən funksiyadır. Amma bu funksiya ölçülən funksiyadır.

Qeyd 2. Məlum olduğu kimi ölçüsü müsbət olan hər bir çoxluğun ölçülməyən alt hissəsi vardır. Bu alt çoxluğa uyğun xarakteristik funksiya ölçülməyən funksiyadır. Deməli, ölçülə bilməyən sonsuz sayda funksiyalar vardır.

4.3. Ölçülən funksiyalar ardıcıllığı. Ölçüyə görə yığılma.

Yuxarıda göstərdik ki, ölçülən funksiyalar çoxluğunda hesab əməlləri, çıxma, toplama, hasil və nisbət cəbri əməllərdir, yəni bu əməllərin nəticəsi də ölçülən funksiyalar sinfinə daxildir. Aşağıda qeyd edilən teorem göstərir ki, oxşar xassə limitə keçmə əməli üçün də doğrudur.

Teorem 1. Tutaq ki, E çoxluğunda ölçülən $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ funksiyalar ardıcıllığı verilmişdir. Əgər istənilən $x \in E$ üçün sonlu və ya sonsuz

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limiti varsa, onda $F(x)$ funksiyası da ölçüləndir.

İsbatı: İstənilən a ədədini qeyd edək və aşağıdakı çoxluqlara baxaq:

$$A_m^{(k)} = E\left(f_k > a + \frac{1}{m}\right), \quad B_m^{(n)} = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_m^{(k)}.$$

Bu çoxluqlar ölçülən çoxluqlardır. Teoremi isbat etmək üçün

$$E(F > a) = \bigcup_{n,m} B_m^{(n)} \qquad (*)$$

bərabərliyinin doğruluğunu göstərmək kifayətdir.

Bu məqsədlə, əvvəlcə $x_0 \in E(F > a)$ götürək. Onda $F(x_0) > a$ olar. Bu halda elə m natural ədədi tapmaq olar ki, $F(x_0) > a + \frac{1}{m}$ olsun. $f_k(x) \to F(x_0)$ olduğundan elə n nömrəsi tapmaq olar ki, $k \geq n$ olduqda

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

Bu onu göstərir ki, $k \geq n$ olduqda $x_0 \in A_m^{(k)}$. Onda $x_0 \in B_m^{(n)}$ və $x_0 \in \bigcup_{n,m} B_m^{(n)}$. Buradan alırıq ki,

$$E(F > a) \subset \bigcup_{n,m} B_m^{(n)}.$$

İndi isə tərsinə daxilolmanın doğruluğunu göstərək. Ona görə də $x_0 \in \bigcup_{n,m} B_m^{(n)}$ götürək. Onda müəyyən qeyd olunmuş n,m üçün $x_0 \in B_m^{(n)}$. Bu o deməkdir ki, $k \geq n$ üçün $x_0 \in A_m^{(k)}$. Başqa sözlə, $k \geq n$ olduqda $f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}$. Sonuncu bərabərsizlikdə $k \to \infty$ şərtində limitə keçsək, $F(x_0) > a$ olduğunu alarıq. Bu isə $x_0 \in E(F > a)$ olması deməkdir. Yəni, $\bigcup_{n,m} B_m^{(n)} \subset E(F > a)$. Nəticədə (*) bərabərliyinin doğruluğunu alırıq. Buradan $F(x)$-in ölçülən olması alınır. Teorem isbat olundu.

Qeyd. Bu teoremin aşağıdakı ümumiləşməsi də doğrudur.

Teorem 2. Əgər E çoxluğunda ölçülən olan $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ funksiyalar ardıcıllığı $F(x)$-ə E çoxluğunda sanki hər yerdə yığılırsa, onda $F(x)$ funksiyası da ölçüləndir.

Tərif. Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda ölçülən və sanki hər yerdə sonlu $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ funksiyalar ardıcıllığı və sanki hər yerdə sonlu $f(x)$ funksiyası verilmişdir.

Əgər istəilən müsbət σ ədədi üçün

$$\lim_{n\to\infty} \left[mE(|f_n - f| \geq \sigma) \right] = 0$$

şərti ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f_n(x)$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına ölçüyə görə yığılandır.

Beləliklə, biz ölçülən funksiyalar ardıcıllığının üç növ; bütün E çoxluğunun hər bir nöqtəsində, E çoxluğunda sanki hər yerdə və ölçüyə görə yığılma. İndi bu yığılmalar arasında əlaqəni göstərən bəzi teoremləri isbat edək.

Teorem 3. (A.Lebeq) Əgər ölçülən $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunda $f(x)$-ə sanki hər yerdə yığılırsa, onda bu ardıcıllıq $f(x)$-ə ölçüyə görədə yığılır.

İsbatı: Aydındır ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən funksiyadır. B ilə $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının E çoxluğunda $f(x)$-ə yığılmadığı nöqtələr çoxluğunu, $A = E\,(|f| = \infty)$, $A_n = E\,(|f_n| = \infty)$ işarə edək. Onda teoremin şərtinə görə $Q = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \cup A \cup B$ çoxluğunun ölçüsü $mQ = 0$ olar.

İxtiyari $\delta > 0$ ədədi üçün

$$E_k(\delta) = E(|f_k - f| \geq \sigma),\ R_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta),\ M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta)$$

işarə edək. Aydındır ki, $R_1(\delta) \supset R_2(\delta) \supset ... \supset R_n(\delta) \supset ....$

Onda məlum teoremə görə

$$\lim_{n\to\infty} mR_n(\delta) = mM.$$

Göstərək ki, $M \subset Q$ $x_0 \overline{\in} Q$. Bu halda $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$. Onda tərifə görə $\forall\, \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə n nömrəsi vardır ki, $k \geq n$ olduqda $\left| f_k(x_0) - f(x) \right| < \varepsilon$. Buradan alırıq ki, $x_0 \overline{\in} E_k(\delta)$, $k \geq n$ olur. Buradan $x_0 \overline{\in} R_n(\delta)$ və $x_0 \overline{\in} M$ alınır.

Beləliklə, Q çoxluğuna daxil olmayan nöqtə M çoxluğuna da daxil olmur. Buradan $M \subset Q$ olması alınır.

Onda $mM \leq mQ = 0$.

Nəticədə

$$\lim_{n\to\infty} mR_n(\delta) = mM = 0.$$

$E_n(\delta) \subset R_n(\delta)$ münasibətindən $\lim_{n\to\infty} E_n(\delta) = 0$ olduğunu alırıq. Bu isə ardıcıllığın $f(x)$-ə ölçüyə görə yığılması deməkdir. Teorem isbat olundu.

İsbat olunmuş teoremin tərsi doğru deyildir, yəni, ölçüyə nəzərən yığılmadan sanki hər yerdə yığılma alınmır. Bunu göstərmək üçün aşağıdakı misala baxaq.

Misal. $E = [0,1)$ yarımintervalında hər bir natural k ədədi üçün $f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), ..., f_k^{(k)}(x), ...$ funksiyalarını

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər} \quad x \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right], \\ 0, & \text{əgər} \quad x \overline{\in} \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right). \end{cases}$$

$i = 1,2,...,k$ kimi təyin edək.

Xüsusi halda $k = 1$ olduqda $f_1^{(1)}(x) = 1$, $x \in [0,1)$, $k = 2$ olduqda

$$f_1^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ 0, & \text{əgər} \quad x \overline{\in} \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \end{cases},$$

$$f_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ 1, & \text{əgər} \quad x \overline{\in} \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \end{cases},$$

$k = 3$ olduqda

$$f_1^{(3)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } \ x \in [0,3) \\ 0, & \text{əgər } \ x \overline{\in} \left[\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases},$$

$$f_2^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \ x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right) \\ 1, & \text{əgər } \ x \overline{\in} \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases},$$

$$f_3^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \ x \in \left[0, \frac{2}{3}\right) \\ 1, & \text{əgər } \ x \overline{\in} \left[\frac{2}{3}, 1\right) \end{cases}.$$

Bu funksiyalardan aşağıdakı kimi ardıcıllıq düzəldək:

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x), \ \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x), \varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x), \varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x), \ldots$$

İstənilən $0 < \delta \leq 1$ ədədi üçün $\varphi_n(x) = f_1^{(k)}(x)$ olduqda $E(|\varphi_n - 0| \geq \delta) = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$. Buradan $mE(|\varphi_n - 0| \geq \delta) = \frac{1}{k}$. $n \to \infty$ şərtində $k \to \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} mE(|\varphi_n - 0| \geq \delta) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Beləliklə $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ funksiyalar ardıcıllığı $E = [0,1)$ çoxluqunda $\varphi(x) = 0$ funksiyasına ölçüyə görə yığılır. Göstərək ki, bu ardıcıllıq istənilən $x \in [0,1)$ nöqtəsində dağılandır.

Doğrudan da, hər bir k natural ədədi üçün elə i nömrəsi vardır ki, $x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$ olduqda $f_i^{(k)}(x_0) = 1, i \neq j$ olduqda isə $f_j^{(k)}(x_0) = 0$. Ona görə də $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0), \ldots$ ədədi ardıcıllığı 0 və 1 ədədlərindən düzəlmiş olur. Ona görə də bu ardıcıllıq dağılandır.

Qeyd. Bu misal göstərir ki, ölçüyə görə yığılma sanki hər yerdə yığılmadan daha ümumi anlayışdır.

Buradan aşağıdakı təbii sual ortaya çıxır.

Ölçüyə görə yığılma limit funksiyasını birqiymətli təyin edirmi? Yəni, ölçüyə görə yığılan ardıcıllığın limiti yeganədirmi?

Bu suala aşağıdakı teoremlər cavab verir.

Teorem 4. Əgər $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ölçülən E çoxluğunda ölçüyə görə $f(x)$ funksiyasına yığılırsa, onda həmin ardıcıllıq $f(x)$ funksiyasına ekvivalent olan $g(x)$ funksiyasına da ölçüyə görə yığılır.

Teorem5. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına yığılandır. Onda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları bir-birinə ekvivalentdir.

Qeyd. Bu iki teorem onu göstərir ki, ölçüyə görə yığılan ardıcıllığın limiti ekvivalentlik mənada yeganədir.

Yuxarıdakı misalda göstərdik ki, ölçüyə görə yığılan funksiyalar ardıcıllığı heç bir nöqtədə yığılmaya bilər, amma aşağıdakı teorem göstərir ki, ölçüyə nəzərən yığılan hər bir funksiyalar ardıcıllığından sanki hər yerdə yığılan alt ardıcıllıq ayırmaq olar.

Teorem 6 (F.Riss). Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardcıllığı ölçülən E çoxluğunda ölçüyə nəzərən yığılandır. Onda bu ardıcıllıqdan $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılan $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x),..., f_{n_k}(x),... \ (n_1 < n_2 < ... < n_k < ...)$ alt ardıcıllığı ayırmaq olar.

Qeyd. Lebeq teoremi (teorem 3) sanki hər yerdə yığılan ölçülən funsiyalar ardıcıllığının ölçüyə görə yığılan olduğunu göstərdi. Amma Riss teoremi ölçüyə görə yığılan ardıcıllıqdan yalnız sanki hər yerdə yığılan alt ardıcıllığın ayrıla bilməsini göstərir.

Aşağıda qeyd edəcəyimiz teorem isə ölçülən funksiyalar ardıcıllığının sanki hər yerdə yığılması ilə ardıcıllığın müntəzəm yığılması arasında əlaqə yaradır.

Teorem 7 (D.F.Yeqorov). Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda ölçülən, sanki hər yerdə sonlu $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ ardıcıllığı ölçülən və sanki hər yerdə sonlu $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılır:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Onda istənilən $\delta > 0$ ədədi üçün elə $E_\delta \subset E$ çoxluğu vardır ki,

1) $mE_\delta > mE - \delta$
2) E_δ çoxluğunda bu ardıcıllıq $f(x)$-ə müntəzəm yığılsın.

4.4. Ölçülən funksiyaların quruluşu haqqında teoremlər.

Hər hansı bir funksiyanı, yaxud funksiyalar sistemini öyrənərkən hər şeydən əvvəl bu funksiyanı təqribi olsa belə, daha sadə quruluşa malik olan funksiya ilə əvəz etmək, yaxud yaxınlaşdırmaq məsələsi otaya çıxır.

Məsələn, çoxhədlinin sadə vuruqlara ayrılması, rasional kəsrlərin sadə kəsrlərə ayrılması bu kimi məsələlərdəndir. Eləcədə kəsilməz funksiyaların qüvvət sırasına yaxud triqonometrik sıraya ayrılması bu tipli məsələlərdəndir.

Məqsədimiz yeni öyrəndiyimiz ölçülən funksiyaların kəsilməz funksiyalarla yaxımlaşması məsələsini öyrənməkdir. Bütün bunlar bizə ölçülən funksiyaların quruluşunu öyrənməyə imkan verir. Aşağıda biz isbatsız olaraq bu istiqamətdə ən fundamental nəticələr hesab edilən teoremləri göstərəcəyik.

Teorem 1. Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda təyin edilmiş ölçülən, sanki hər yerdə sonlu $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə ölçülən və məhdud $g(x)$ funksiyası tapmaq olar ki, $mE(f \neq g) < \varepsilon$ olsun.

Teorem 2 (Borel). Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyası verilmişdir. İxtiyari $\sigma > 0$ və $\varepsilon > 0$ ədədləri üçün $[a,b]$ parçasında kəsilməz elə $\psi(x)$ funksiyası tapmaq olar ki, $mE(|f - \psi| \geq \sigma) < \varepsilon$ olsun. Bu halda, əgər $|f(x)| \leq K$ olarsa, onda $\psi(x)$ funksiyasını da elə seçmək olar ki, $|\psi(x)| \leq K$ olsun.

Bu teoremdən nəticə olaraq alınır ki, $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyası üçün elə kəsilməz $\psi_n(x)$ funksiyalar ardıcıllığı vardır ki, bu ardıcıllıq $f(x)$-ə ölçüyə görə yığılsın.

Teorem 3 (M.Freşe). $[a,b]$ parçasında verilmiş hər bir ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılan kəsilməz funksiyalar ardıcıllığı vardır.

Teorem 4 (N.N.Luzin). Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə kəsilməz $\varphi(x)$ funksiyası tapmaq olar ki, $mE(f \neq \varphi) < \varepsilon$ olsun. Əgər, xüsusi halda $|f(x)| \leq K$ olarsa, onda $|\varphi(x)| \leq K$ olar.

Göstərilən teoremlərdə biz ölçülən funksiyaların kəsilməz funksiyalar vasitəsilə əvəz edilməsi haqqında əsas teoremləri qeyd etdik.

Kəsilməz funksiyalarn çoxhədlilər vasitəsilə yaxınlaşması haqqında teoremlərdən istifadə etməklə, ölçülən funksiyalarında çoxhədlilərlə yaxınlaşması haqqında teoremləri ala bilərik.

Teorem 5 (K.Veyerştrass). Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $P(x)$ çoxhədlisi vardır ki, istənilən $x \in [a,b]$ üçün

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

Veyerştrass teoremindən istifadə etməklə Borel və Freşe teoremlərini başqa formada da ifadə etmək olar.

Teorem 6 (M.Freşe). Tutaq ki, $f(x)$ funsiyası $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu funksiyadır. Onda $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə $f(x)$-ə yığılan çoxhədlilər ardıcıllığı vardır.

Göstərilən teoremlərlə sıx şəkildə bağlı olan kəsilməz periodik funksiyaların triqonometrik çoxhədlilərlə yaxınlaşması haqqında aşağıdakı teoremi də ifadə edək.

Teorem 7 (K.Veyerştrass). Tutaq ki, $f(x)$ 2π periodlu kəsilməz funksiyadır. İstənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə triqonometrik

$$T_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin xk)$$

çoxhədlisi vardır ki, $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

4.5. Ölçülən fuksiyalara aid çalışmalar.

1. Göstərin ki, $f^3(x)$ və $f(x)$ funksiyaları E çoxluğunda eyni zamanda ölçülən funksiyalardır.

Cavab: Faktın doğruluğu istənilən a üçün $E(f^3(x) > a) = E(f(x) > \sqrt[3]{a})$ bərabərliyindən alınır.

2. Göstərin ki, $f^2(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olmasından $f(x)$ funksiyasının da E çoxluğunda ölçülən olması çıxmaya da bilər.

Göstəriş: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \in CA \end{cases}$ (A - hər hansı ölçülməyən çoxluqdur) funksiyasına baxmalı.

3. Göstərin ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən isə onda $|f(x)|$ funksiyasıda E çoxluğunda ölçüləndir. Bu faktın tərsinin doğru olmadığını göstərin.

Göstəriş: 2-ci misalda göstərilən funksiyaya baxın.

4. Göstərin ki, əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ və $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ funksiyaları da E çoxluğunda ölçüləndirlər.

Göstəriş: $m(x)$ və $M(x)$ funksiyalarının E-də ölçülən funksiyalar olması

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

bərabərliklərindən və misal 3-ün hökmündən alınır.

5. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası istənilən $[\alpha,\beta]$, $a<\alpha<\beta<b$ parçasında ölçülən isə, onda bütün $[a,b]$ parçasında da ölçüləndir. Bu faktın tərsinin doğru olmadığını göstərin.

İsbatı: a ədədinə yığılan $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>...$ ardıcıllığını və b ədədinə yığılan $\beta_1<\beta_2<\beta_3<...$ ardıcıllığını götürək.

Aydındır ki, $(a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i]$.

Şərtə görə $f(x)$ funksiyası istənilən $[\alpha_i,\beta_i]$ parçasında ölçülən olduğundan istənilən c ədədi üçün

$$E_i=[\alpha_i,\beta_i]\cap E(f(x)>c)$$

çoxluğu ölçüləndir. Eyni zamanda

$$\bigcup_i E_i=(a,b)\cap E(f(x)>c).$$

Onda alırıq ki, $(a,b)\cap E(f(x)>c)$ çoxluğu istənilən c üçün ölçüləndir. Bu o deməkdir ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında ölçüləndir. $[a,b]$ parçası (a,b) intervalından ölçüsü sıfra bərabər olan iki nöqtə ilə fərqləndiyindən $f(x)$-in $[a,b]$ parçasında ölçülən olduğunu alırıq.

6. P_0 kantor çoxluğu ilə ölçülməyən E çoxluğunun kəsişməsində x^2 funksiyasına, $[0,1]$ parçasının digər nöqtələrində x^3 fuksiyasına bərabər olan $f(x)$ funksiyası ölçülən olarmı?

Həlli. Bu funksiya ölçülən olar. Çünki, o $\varphi(x)=x^3$ funksiyasında ölçüsü sıfıra bərabər olan çoxluqda fərqlənir. Ona görə də $f(x)$ və $\varphi(x)$ ekvivalent funksiyalardır. $\varphi(x)$ $[0,1]$ parçasında ölçülən olduğundan $f(x)$-də bu parçada ölçülən olar.

7. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində törəməsi varsa, onda $f'(x)$ törəməsi də $[a,b]$ parçasında ölçüləndir.

İsbatı: $\varphi(x)=\dfrac{f\left[x+\frac{1}{n}\right]-f(x)}{\frac{1}{n}}$ funksiyalarına baxaq. Bu funksiyalar $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ parçasında təyin olunmuş ölçülən funksiyalardır.

İstənilən $x\in\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ üçün $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f'(x)$ törəməsi vardır. Onda alırıq ki, $f'(x)$ funksiyası $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ parçasında ölçüləndir.

$[a,b)$ yarımintervalı $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ $(n=1,2,...)$ parçalarının birləşməsi olduğundan $f'(x)$ funksiyasının $[a,b)$-də ölçülən olduğunu, eləcə də $[a,b]$-də ölçülən olduğunu alırıq.

8. İsbat edin ki, əgər E ölçülən çoxluq isə, onda onun $\chi_E(x)$ xarkteristik funksiyasıda ölçüləndir. Əgər E ölçülməyən çoxluq isə, onda $\chi_E(x)$ xarakteristik funksiyası da ölçülməyən funksiyadır.

İsbatı: Məlum olduğu kimi xarakteristik funksiya

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\in\bar{E}\end{cases}$$

kimidir. Onda

$$E(\chi_E(x)>a)=\begin{cases}R, & a<o\ \ (R-\text{bütün heqiqi oxdur})\\ E, & 0\le a<1\\ \varnothing, & a\ge 1\end{cases}$$

Bu bərabərlikdən görünür ki, E ölçülən olduğu halda $\chi_E(x)$ funksiyası da ölçülən, E ölçüməyən olduğu halda $\chi_E(x)$ -da ölçüməyən funksiya olar.

9. İsbat edin ki, rasional ədədlər çoxluğunun $\chi(x)$ xarakteristik funksiyasının istənilən funksiyaya hasili ölçülən funksiyadır.

İsbatı: $\chi(x)$ xarakteristik funksiyası yalnız ölçüsü sıfra bərabər olan çoxluqda sıfırdan fərqli qiymətlər alır, yəni $\chi(x)$ eyniliklə sıfır olan funksiyaya ekvivalentdir. Onda istənilən $f(x)$ funksiyası üçün $\chi_E(x)\cdot f(x)$ funksiyası da eyniliklə sıfır funksiyaya ekvivlentdir, yəni ölçülən funksiyadır.

10. İstənilən $[a,b]$ parçasında

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ rasional olduqda}\\ 0, & x \text{ irrasional olduqda}\end{cases}$$

Dirixle funksiyasının ölçülən olduğunu göstərin.

11. $E=[0,4]$ parçasında Dirixle funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqların ölçülərini tapın:

a) $E(D>1)$, b) $E(D<1)$, c) $E(D>-2)$, d) $E(D=1)$, e) $E(0<D<1)$.

Cavablar: a) $mE(D>1)=0$, b) $mE(D<1)=4$,
c) $mE(D<-2)=4$, d) $mE(D=1)=0$, e) $mE(0<D<1)=0$.

12. Göstərin ki, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında Dirixle funksiyasının $\cos x$ funksiyasına hasili ölçülən funksiyadır.

13. $E=(0,\pi)$ intervalında $f(x)=\sin x$ funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqların ölçüsünü tapın.

a) $E(f\ge 0)$, b) $E(f>\frac{1}{2})$, c) $E(f\le\frac{1}{2})$, d) $E(f\ge 1)$,
e) $E(\frac{1}{2}\le f\le\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Cavablar: a) $mE(f\ge 0)=\pi$, b) $mE(f>\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$,
c) $mE(f\le\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$, d) $mE(f\ge 1)=0$,
e) $mE(\frac{1}{2}\le f\le\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$.

14. $E=[-2,2]$ çoxluğunda $f(x)=2-x$ funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqları tapın.

a) $E(f>0)$, b) $E(f>4)$, c) $E(f=0)$, d) $E(f=4)$,
e) $0<a<4$ olduqda $E(f>a)$.

15. Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in[-4,0] \text{ olduqda}\\ \sqrt{x}, & x\in[0,4] \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyası $[-4,4]$ parçasında ölçüləndir.

16. Göstərin ki,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \in [-5,0] \text{ olduqda} \\ \ln x, & x \in [0,5] \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası $[-5,5]$ parçasında ölçüləndir.

V FƏSİL
Lebeq inteqralı

5.1. Riman inteqralının tərifi və varlığı şərtləri haqqında.

Əvvəlcə müəyyən inteqralın O.Koşi və B.Riman tərəfindən verilmiş tərifini nəzərdən keçirək. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş məhdud funksiyadır. $[a,b]$ parçasını $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə $[x_k, x_{k+1}]$ hissələrə bölürük və hər bir kiçik parçadan bir ξ_k nöqtəsi götürməklə

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

inteqral cəmi düzəldirik. $\lambda = \max\limits_k (x_{k+1} - x_k)$ işarə edək.

Əgər $\lambda \to 0$ şərtində σ inteqral cəminin nə $[a,b]$ parçasının kiçik hissələrə bölünməsi qaydasından, nədə bu hissələrdə ξ_k nöqtələrinin seçilməsi qaydasından asılı olmayaraq sonlu limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyanın Riman inteqralı deyilir və

$$(R)\int_a^b f(x)dx$$

kimi işarə edilir. Sonlu inteqrala malik olan funksiyalara Riman mənada inteqrallanan funksiyalar deyilir. Məlumdur ki, funksiyanın sonlu Riman inteqralının varlığı üçün onun məhdud olması zəruri şərtdir. İlk dəfə Koşi tərəfindən istənilən kəsilməz funksiyanın Riman inteqralının varlığı isbat olunmuşdur. Buna baxmayaraq bir çox kəsilən funksiyalarda sonlu Riman inteqralına malikdir. Məsələn, istənilən monoton kəsilən funksiya inteqrallanandır.

Amma, məhdud funksiyalar vardır ki, onun sonlu Riman inteqralı yoxdur. Məsələn, $[0,1]$ parçasında $D(x)$ Dirixle funksiyasına baxaq:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{rasional olduqda} \\ 0, & x - \text{irrasional olduqda} \end{cases}$$

Əgər $[0,1]$ parçasını hissələrə bölərək inteqral cəmini düzəltsək və bu zaman ξ_k nöqtələrini rasional nöqtələr götürsək inteqral cəmi $\sigma = 1$, əgər ξ_k nöqtələrini irrasional nöqtələr götürsək $\sigma = 0$ olar. Bu onu göstərir ki, σ inteqral cəminin $\lambda \to 0$ şərtində limiti yoxdur. Yəni $D(x)$ Riman mənada inteqrallanan deyildir.

Göründüyü kimi, sadə məhdud funksiyaların belə Riman inteqralı yoxdur. Bu onu göstərir ki, Riman inteqralının ciddi çatışmazlığı vardır. Bu çatışmazlığın səbəbi aşağıdakından ibarətdir. Riman inteqral cəmini düzəldərkən biz əvvəlcə $[a,b]$ parçasını kiçik $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n+1},x_n]$ (bu parçaları $e_1,e_2,...,e_n$ ilə işarə edək) hissələrinə bölürük və hər bir kiçik e_k parçasından bir ξ_k nöqtəsi götürməklə $\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)me_k$ cəmini düzəldirik və tələb edirik ki, bu cəmin limiti ξ_k nöqtələrinin e_k daxilində seçilməsindən asılı olmasın. Başqa sözlə ξ_k olaraq e_k çoxluğu daxilində istənilən nöqtə götürülə bilər və bunun seçilməsi σ cəminə təsir göstərməməlidir. Bu isə yalnız o zaman mümkündür ki, ξ_k nöqtələri e_k daxilində dəyişdikdə $f(\xi_k)$ qiymətləri bir-birinə sonsuz yaxın olsunlar. e_k çoxluğu daxilində x nöqtələrini bir-birinə yaxın edən $[x_k,x_{k+1}]$ parçalarının kiçik olmasıdır. x nöqtələri bir-birinə kifayət qədər yaxın olduqda uyğun $f(\xi_k)$-lar o zaman yaxın olar ki, $f(x)$ kəsilməz funksiya olsun. Yəni arqumentlər kifayət qədər yaxın olduqda funksiyanın uyğun qiymətləridə sonsuz yaxın olsun. Bu halda σ inteqral cəmində ξ_k-ların kiçik e_k daxilində dəyişməsi $f(\xi_k)$-nın sonsuz kiçik dəyişməsinə səbəb olur və bu səbəbdən də σ cəminin limitinə təsir etmir. Amma kəsilən funksiyalar üçün arqumentin sonsuz kiçik dəyişməsi funksiyanın qiymətinin sonsuz böyük dəyişməsinə səbəb olur. Bu səbəbdən σ inteqral cəmi sonsuz böyük qiymətlər ala bilər və onun sonlu limiti ola bilməz. Ona görə də Riman inteqralının tərifi yalnız kəsilməz funksiyalar üçün özünü tam doğruldur. Digər sinifdən olan funksiyaların Riman inteqralının varlığı təsadüfi xarakter daşıyır.

Sonralar görəcəyik ki, funksiyanın Riman mənada inteqralın varlığı üçün zəruri şərt "həddən artıq" kəsilən olmamasıdır. İsbat olunmuşdur ki, əgər $f(x)$ funksiyası ən çoxu hesabi sayda birinci növ kəsilmə nöqtələrinə malik olarsa, bu halda funksiya Riman mənada inteqrallanandır.

5.2. Lebeq inteqralını tərifi və bəzi xassələri.

Riman inteqralının tərifini verərkən gördük ki, bu inteqral yalnız kəsilməz funksiyalar sinfi və ən çoxu hesabi sayda birinci növ kəsilməyə malik olan funksiyalar üçün özünü doğruldur. Daha geniş sinif məhdud funksiyalar Riman mənada inteqrallanan olmur. Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün Lebeq inteqralının yeni tərifini vermişdir. İnteqralın bu tərifi daha geniş funksiyalar üçün yararlıdır. Bu inteqral anlayışı çoxluğun və funksiyanın ölçülən olması anlayışları ilə bağlıdır.

İnteqral anlayışını daha geniş funksiyalar üçün ümumiləşdirmək məqsədi ilə Lebeq başqa bir üsul təklif etmişdir. Bu üsulun əsas mahiyyəti ondan ibarətdir ki, inteqral cəmi düzəldilərkən e_k çoxluqları x nöqtələrinin ədəd oxu üzərində özlərinin yaxın olması prisipinə görə deyil, $f(x)$ funksiyasının aldığı qiymətlərin yaxınlığına görə düzəldilir. Bu məqsədlə Lebeq absis oxu üzərində $[a,b]$ parçasını deyil, ordinant oxu üzərində funksiyanın aldığı qiymətləri öz daxilində saxlayan $[A,B]$ parçasını hissələrə bölür: $A = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = B$.

e_k $e_k = E(y_k \le f < y_{k+1})$ $(k = 0,1,...,n-1)$ çoxluqlarını düzəldək. Göründüyü kimi e_k-ya daxil olan nöqtələrdə $f(x)$ funksiyanın qiymətləri yaxın olur və $[y_k, y_{k+1})$ yarımintervalına daxil olurlar. Baxmayaraq ki, bu halda x nöqtələri özləri bir-birindən kifayət qədər uzaq yerləşə bilərlər.

İndi Lebeq inteqralının dəqiq tərifini verək.

Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda ölçülən məhdud $f(x)$ funksiyası verilmişdir, belə ki,

$$A < f(x) < B \tag{1}$$

$[A,B]$ parçasını $A = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = B$ nöqtələri ilə $[y_k, y_{k+1})$ yarımintervallarına bölək və $e_k = E(y_k \le f < y_{k+1})$ işarə edək.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, e_k çoxluqları aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) e_k çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlər, $e_k \cap e_{k'} = \varnothing$ $(k \ne k')$.

2) e_k çoxluqları ölçüləndirlər,

3) $e_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_k$,

4) $mE = \sum\limits_{k=0}^{n-1} me_k$.

Aşağı və yuxarı Lebeq cəmlərini təyin edək:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} me_k,$$

Əgər $\lambda = \max\ (y_{k+1} - y_k)$ işarə etsək, alarıq:

$$0 \le S - s \le \lambda \cdot mE \tag{2}$$

Lemma 1. Tutaq ki, s_0 və S_0 $[A,B]$ parçasının hər hansı bölgüsünə uyğun aşağı və yuxarı Lebeq cəmləridir. Əgər $[A,B]$ parçasının bu bölgüsünə yeni bölgü nöqtələri əlavə etsək, bu zaman aşağı Lebeq cəmləri azalmır, yuxarı Lebeq cəmləri isə artmır.

İsbatı: Tutaq ki, əvvəlki bölgü nöqtələrinə yeni yeni bir $y_k < \bar{y} < y_{k+1}$ bölgü nöqtəsi əlavə olunmuşdur. Onda $e_k = E(y_k \le f < y_{k+1})$, $e'_k = E(y_k \le f < \bar{y})$, $e''_k = E(\bar{y} \le f < y_{k+1})$ çoxluqları üçün $e_k = e'_k \cup e''_k$, $e'_k \cap e''_k = \varnothing$, $me_k = me'_k + me''_k$ olar. $y_k < \bar{y}$ olduğundan yaza bilərik:

$$y_k me_k = y_k me'_k + y_k me''_k \le y_k me'_k + \bar{y} me''$$

Onda

$$s_0 = \sum_{i=0}^{k-1} y_i me_i + y_k me_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i me_i \le \sum_{i=0}^{k-1} y_i me_i +$$

$$+ y_k me'_k + \bar{y}_k me''_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i me_i = s_i$$

yəni $s_0 \le s$ alırıq.

Eyni qayda ilə $S \le S_0$ olduğunuda göstərə bilərik.

Nəticə: Heç bir aşağı Lebeq cəmi, yuxarı Lebeq cəmini aşmır.

İsbatı: $[A, B]$ parçasının iki müxtəlif bölgüsünü götürək. Bu bölgülərə uyğun olan aşağı Lebeq cəmlərini s_1, s_2, yuxarı Lebeq cəmlərini S_1 və S_2 ilə işarə edək. $[A, B]$ paçasının birinci və ikinci bölgü nöqtələrindən ibarət olan üçüncü bölgünü də götürək. Bu bölgüyə uyğun Lebeq cəmlərini uyğun olaraq s_3 və S_3 ilə işarə edək. Lemma 1-ə əsasən $s_1 \le s_3$ və $S_3 \le S_2$ alarıq. Əgər $s_3 \le S_3$ olduğunu nəzərə alsaq $s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2$, yəni $s_1 \le S_2$ alarıq. Hər hansı S_0 yuxarı cəmi götürək. Onda istənilən s aşağı cəmi üçün $s \le S_0$ olar. Onda alırıq ki, bütün aşağı Lebeq cəmləri ardıcıllığı yuxarıdan məhduddur. Onda onun dəqiq yuxarı sərhəddi vardır: $U = \sup\{s\}$. Nəticədə $U \le S_0$ olduğunu alarıq.

Əgər yuxarı cəmlər ardıcıllığını götürsək, onda $\{S\}$ ardıcıllığının aşağıdan məhdud olduğunu alarıq. Onda $\{S\}$-in dəqiq aşağı sərhəddi vardır $V = \inf\{S\}$.

Onda $[A, B]$ parçasının ixtiyari bölgüsü üçün $s \le U \le V \le S$ olduğunu alarıq.

(2) bərabərsizliyinə görə $S - s \le \lambda mE$ olduğunu nəzərə alsaq $0 \le \mathrm{V} - U \le \lambda mE$ olar. Buradan $\lambda \to 0$ şərtində $U = \mathrm{V}$ alırıq.

Tərif. u və v ədədlərinin ümumi qiymətinə $f(x)$ funksiyasının E çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və $(L)\int_E f(x)dx$ kimi işarə edilir.

Yuxarıda deyilənlərdən alırıq ki,hər bir ölçülən məhdud funksiya Lebeq mənada inteqrallanandır. Yəni daha geniş sinifdən olan funksiyalar Lebeq mənada inteqrallanandır.

5.3. Lebeq inteqralının əsas xassələri.

Bilavasitə tərifindən istifadə etməklə ölçülən məhdud funksiyaların inteqralının bəzi xassələrini göstərə bilərik.

Teorem 1. Əgər ölçülən $f(x)$ funksiyası ölçülən E çoxluğunda $a \le f(x) \le b$ şərtini ödəyirsə, onda

$$a \cdot mE \le \int_E f(x)dx \le b \cdot mE$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı: İstənilən n natural ədədi üçün $A = a - \frac{1}{n}$, $B = b + \frac{1}{n}$ qəbul edək. Onda $A < f(x) < B$, $x \in E$ olar.

$[A, B]$ parçasının $A = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = B$ bölgüsünü götürək. Onda $A \le y_k \le B$ bərabərsizliyinə əsasən

$$Ame_k \le y_k me_k \le Bme_k$$

$$A\sum_{k=1}^{n-1} me_k \le \sum_{k=1}^{n-1} y_k me_k \le B\sum_{k=1}^{n-1} me_k$$

$$AmE \le s \le BmE$$

alırıq. Əgər bu bərabərsizlikdə $\lambda \to 0$ şərtində limitə keçsək və $A = a - \frac{1}{n}$, $B = b + \frac{1}{n}$, olduğunu nəzərə alsaq

$$\left(a - \frac{1}{n}\right)mE \le \int_E f(x)dx \le \left(b + \frac{1}{n}\right)mE .$$

olduğunu alarıq.

n ixtiyari ədəd olduğundan buradan

$$amE \le \int_E f(x)dx \le bmE$$

alarıq. Teorem isbat edildi.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər $f(x)$ funksiyası E ölçülən çoxluğunda sabit olarsa, yəni $f(x) = c$, onda

$$\int_E f(x)dx = cmE$$

doğrudur.

Nəticə 2. Əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda mənfi deyilsə, yəni $f(x) \geq 0$, onda

$$\int_E f(x)dx \geq 0.$$

Nəticə 3. Əgər $mE = 0$ isə, onda E çoxluğunda ölçülən məhdud istənilən funksiya üçün

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Teorem 2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası ölçülən E çoxluğunda ölçülən və məhdud funksiyadır. Əgər E çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişmyən E_k, $E_k \cap E_{k'} = \varnothing$ $k \neq k'$ çoxluqlarının birləşməsindən ibarət isə, yəni $E = \bigcup_k E_k$, onda

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx$$

doğrudur. Bu xassə Lebeq inteqralının tam additivlik xassəsi adlanır.

İsbatı: Əvvəlcə tutaq ki, E çoxluğu iki çoxluğun birləşməsindən ibarətdir $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Tutaq ki, $A < f(x) < B$ və $A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B$ bu parçanın bölgüsüdür.

$$e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1})$$
$$e'_k = E_1(y_k \leq f < y_{k+1})$$
$$e''_k = E_2(y_k \leq f < y_{k+1})$$

çoxluqlarını götürək.

Göründüyü kimi $e_k = e'_k \cup e''_k$, $e'_k \cap e''_k = \varnothing$.

Bu bölgüyə uyğun aşağı Lebeq cəmini düzəldək,

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k ,$$

burada $me_k = me'_k + me''_k$ olduğundan

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e'_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e''_k$$

olar. Bu bərabərlikdə $\lambda \to 0$ şərtində limitə keçsək

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx .$$

Bu bərabərlik E çoxluğunun iki çoxluğun birləşməsi olduğu halda teoremin doğru olduğunu göstərir. E-nin istənilən sonlu sayda çoxluqların birləşməsi olduğu halda teorem riyazi induksiya metodu ilə isbat olunur.

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k \cap E_{k'} = \varnothing,\ k \neq k'$ halına baxaq.

$mE = \sum_{k=1}^{n} mE_k$ olduğundan $n \to \infty$ şərtində

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} mE_k \to 0 , \qquad (*)$$

$R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$ işarə edək.

Teorem E-nin istənilən sonlu sayda çoxluqların cəmi olduğu halda doğru olduğundan alarıq

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx + \int_{R_n} f(x)dx .$$

Teorem 1-ə görə

$$AmR_n \leq \int_{R_n} f(x)dx \leq BmR_n$$

və $mR_n \to 0,\ n \to \infty$ olduğundan

$$\int_{R_n} f(x)dx \to 0,\ n \to \infty$$

alırıq. Nəticədə

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx$$

alırıq. Teorem isbat olundu.

Teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər ölçülən E çoxluğunda verilmiş ölçülən məhdud $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları ekvivalentdirsə, onda

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Doğrudan da, əgər $A = E(f \neq g),\ B = E(f = g)$ olarsa, onda $mA = 0$ və

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx = 0$$

olar.

Digər tərəfdən B çoxluğunda funksiyalar eyniliklə bərabər olduğundan

$$\int_B f(x)dx = \int_B g(x)dx.$$

Sonuncu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$ alarıq.

Məlumdur ki, $D(x)$ Dirixle funksiyası $\varphi(x)=0$ funksiyasına ekvivalentdir. $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$ olduğundan $\int_0^1 D(x)dx = 0$ olduğunu alırıq. Yəni, Dirixle funksiyası Lebeq mənada inteqallanandır və onun inteqralı sıfra bərabərdir.

Buradan xüsusi halda alınır ki, əgər $f(x)$ funksiyası sıfra ekvivalent isə, onda onun inteqralı sıfra bərabərdir. Amma bu təklifin tərsi doğru deyildir. Məsələn, $[-1,1]$ parçasında

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

funksiyasına baxaq.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -1+1 = 0$$

Amma göründüyü kimi funksiya sıfra ekvivalent deyildir.

Nəticə 2. Əgər E çoxluğunda mənfi olmayan ölçülən məhdud $f(x)$ funksiyasının inteqralı sıfra bərabərdirsə, $\int_E f(x)dx = 0,\ (f(x) \geq 0)$ onda bu funksiya sıfra ekvivalentdir $f(x) \sim 0$.

Göstərmək olar ki,

$$E(f>0) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(f > \frac{1}{n}\right)$$

bərabərliyi doğrudur.

Əgər $f(x)$ funksiyası sıfra ekvivalent olmazsa, onda elə n_0 nömrəsi olmalıdır ki, $mE\left(f > \frac{1}{n_0}\right)$ olsun.

$A = E\left(f > \frac{1}{n_0}\right)$, $B = E \backslash A$ işarə etsək, onda $\int_A f(x)dx \geq \frac{1}{n_0}\sigma$, $\int_B f(x)dx \geq 0$ olar.

Bu bərabərsizlikləri toplasaq, nəticədə

$$\int_E f(x)dx \geq \frac{1}{n_0}\sigma$$

olduğunu alarıq. Bu isə şərtə ziddir. Deməli, $f(x) \sim 0$ olmalıdır. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Əgər ölçülən E çoxluğunda ölçülən və məhdud $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları verilmişsə, onda

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

İsbatı: Tutaq ki, $x \in E$ üçün $A_1 < f(x) < B_1$ və $A_2 < g(x) < B_2$. $[A_1, B_1]$ və $[A_2, B_2]$ parçalarını $A_1 = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = B_1$ və $A_2 = z_0 < z_1 < z_2 < ... < z_n = B_2$ nöqtələri ilə hissələrə bölək və $e_i' = E(y_i \leq f < y_{i+1})$, $e_k'' = E(z_k \leq g < z_{k+1})$ $T_{ik} = e_i' \cap e_k''$, $i = 0,1,...,n-1$, $k = 0,1,...,m-1$ işarə edək.

T_{ik} çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlər və ölçüləndirlər:

$$E = \bigcup_{i,k} T_{ik}, \quad mE = \sum_{i,k} mT_{ik}.$$

İnteqralın additivlik xassəsinə görə yaza bilərik:

$$\int_E (f(x)+g(x))dx = \sum_{i,k} \int_{T_{ik}} (f(x)+g(x))dx$$

$y_i + z_k \leq f(x) + g(x) < y_{i+1} + z_{k+1}$ olduğundan teorem 1-ə əsasən alarıq:

$$(y_i + z_k)mT_{ik} \leq \int_{T_{ik}} (f(x)+g(x))dx \leq (y_{i+1} + z_{k+1})mT_{ik}.$$

Alınmış bərabərsizlikləri $i = 0,1,...,n-1$, $k = 0,1,...,m-1$ qiymətləri üçün yazıb, tərəf-tərəfə toplasaq, nəticədə

$$\sum_{i,k}(y_i + z_k)mT_{ik} \leq \int_E (f(x)+g(x))dx \leq \sum_{i,k}(y_{i+1} + z_{k+1})mT_{ik} \text{ alarıq.}$$

Bərabərsizliyin sol və sağ tərəflərini hesablayaq:

$$\sum_{i,k}(y_i + z_k)mT_{ik} = \sum_{i,k} y_i mT_{ik} + \sum_{i,k} z_k mT_{ik} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \left(\sum_{k=0}^{m-1} mT_{ik}\right) + \sum_{k=0}^{m-1} z_k \left(\sum_{i=0}^{n-1} mT_{ik}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_i m\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} T_{ik}\right) + \sum_{k=0}^{m-1} z_k m\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T_{ik}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_i m\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} (e_i' \cap e_k'')\right) + \sum_{k=0}^{m-1} z_k m\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} (e_k' \cap e_i'')\right) =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} y_i m\left(e_i' \cap \bigcup_{k=0}^{m-1} e_k''\right)+\sum_{k=0}^{m-1} z_k m\left(e_k'' \cap \bigcup_{i=0}^{n-1} e_i'\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} y_i m(e_i' \cap E)+\sum_{k=0}^{m-1} z_k m(e_k'' \cap E)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} y_i m e_i' + \sum_{k=0}^{m-1} z_k m e_k'' = s_f + s_g$$

Analoji üsulla

$$\sum_{i,k}(y_{i+1}+z_{k+1})mT_{ik} = S_f + S_g$$

almaq olar. Burada s_f, s_g, S_f, S_g ilə $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının uyğun olaraq aşağı və yuxarı Lebeq cəmləri işarə olunmuşdur.

Nəticədə

$$s_f + s_g \le \int_E (f(x)+g(x))dx \le S_f + S_g$$

alarıq.

Sonuncu bərabərsizlikdə hər iki bölgüyə uyğun intervallardan ən böyüyünün sıfra yaxınlaşma şərtində limitə keçsək, tələb olunan bərabərliyi alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 4. Tutaq ki, $f(x)$ ölçülən E çoxluğunda ölçülən məhdud funksiyadır. Onda istənilən c sabiti üçün

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx$$

doğrudur.

İsbatı: Tutaq ki, $c>0$ və $A<f(x)<B.$ $[A,B]$ parçasını $A=y_0<y_1<y_2<...<y_n=B$ hissələrə bölək və $e_k = E(y_k \le f < y_{k+1}),$ $k=0,1,2,...,n-1$ çoxluqlarına baxaq: $E=\bigcup_k^{n-1} e_k,\ \ e_k \cap e_i = \varnothing,\ k \ne i.$

İnteqralın tam additivlik xassəsinə görə

$$\int_E cf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{e_k} cf(x)dx,$$

$x \in e_k$ çoxluğunda $cy_k \le cf(x) < cy_{k+1}$ olduğundan teorem 1-ə əsasən alarıq:

$$cy_k me_k \le \int_{e_k} cf(x)dx < cy_{k+1} me_k.$$

Bu bərabərsizlikdə $k=0,1,...,n-1$ qiymətləri verərək alınmış bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplasaq, nəticədə alarıq:

$$cs_f \le \int_E cf(x)dx < cS_f.$$

Burada s_f və S_f uyğun olaraq aşağı və yuxarı Lebeq cəmləridir. Sonuncu bərabərsizlikdə $\lambda \to 0$ şərtində limitə keçsək tələb olunan bərabərliyi alarıq.

Tutaq ki, $c < 0$. Onda

$$0 = \int_E [cf(x) + (-c) f(x)]dx = \int_E cf(x)dx + \int_E (-c) f(x)dx =$$

$$= \int_E cf(x)dx + (-c)\int_E f(x)dx$$

bərabərliyindən

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx$$

alarıq.

Nəticə. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ ölçülən E çoxluğunda verilmiş ölçülən məhdud funksiyalar isə, onda

$$\int_E \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_E f(x)dx - \int_E g(x)dx$$

Doğrudan da,

$$\int_E \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_E [f(x) + (-1)g(x)]dx =$$

$$= \int_E f(x)dx + (-1)\int_E g(x)dx =$$

$$= \int_E f(x)dx - \int_E g(x)dx.$$

Teorem 5. Tutaq ki, $f(x)$ və $F(x)$ ölçülən E çoxluğunda ölçülən məhdud funksiyalardır.

Əgər istənilən $x \in E$ üçün $f(x) \le F(x)$ olarsa, onda

$$\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx$$

doğrudur.

İsbatı: Doğrudan da $F(x) - f(x) \ge 0$ şərtindən alınır ki,

$$\int_E \big(F(x) - f(x)\big)dx \ge 0$$

Buradan $\int_E F(x)dx - \int_E f(x)dx \ge 0,$ yaxud

$$\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx$$

alınır.

Teorem 6. Tutaq ki, $f(x)$ ölçülən E çoxluğunda verilmiş ölçülən məhdud funksiyadır. Onda

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx$$

doğrudur.

İsbatı: $A = E\ (f \ge 0),\ B = E\ (f < 0)$ işarə edək. Onda $E = A \cup B,\ A \cap B = \varnothing.$

Bu halda yaza bilərik:

$$\int_E f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx = \int_A |f(x)|dx - \int_B |f(x)|dx$$

Digər tərəfdən

$$\int_E |f(x)|dx = \int_A |f(x)|dx + \int_B |f(x)|dx$$

olduğundan alarıq:

$$\left|\int_E f(x)dx\right| = \left|\int_A |f(x)|dx - \int_B |f(x)|dx\right| \le \int_A |f(x)|dx +$$

$$+ \int_B |f(x)|dx = \int_E |f(x)|dx$$

Teorem isbat olundu.

5.4. Lebeq inteqralı işarəsi altında limitə keçmə teoremi.

Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda ölçülən məhdud funksiyalardan ibarət olan $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ funksiyalar ardıcıllığı verilmişdir. Fərz edək ki, bu ardıcıllıq hər hansı bir mənada ölçülən məhdud $F(x)$ funksiyasına yığılandır (E çoxluğunda hər yerdə, sanki hər yerdə, ölçüyə görə).

Bu halda

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx \qquad (1)$$

bərabərliyi doğru olarmı? Əgər bu bərabərlik doğru olarsa, onda deyirlər ki, Lebeq inteqralı altında limitə keçmə doğrudur.

Qeyd edək ki, (1) bərabərliyi həmişə doğru olmur. Məsələn,

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin nx, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right) \\ 0, & x \in \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right] \end{cases}$$

ardıcıllığına baxaq. İstənilən $x \in E$ üçün $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Lakin

$$\int_E f_n(x)dx = \int_0^{\pi/n} n \sin nx dx + \int_{\pi/n}^{\pi} 0\, dx = n \cdot \frac{1}{n}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi/n} = 2$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = 2 \neq \int_E 0 \cdot dx = 0 .$$

Deməli, (1) bərabərliyinin doğru olması üçün $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı hansısa əlavə şərti ödəməlidir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem (A.Lebeq). Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda ölçülən və məhud funksiyalardan təşkil edilmiş $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ ardıcıllığı ölçüyə görə ölçülən və məhdud $f(x)$ funksiyasına yığılır. Əgər elə M ədədi varsa ki, istənilən $x \in E$ üçün $|f_n(x)| \leq M$, $n = 1,2,...$ olsun, bu halda inteqral işarəsi altında limitə keçmə doğrudur, yəni

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx \tag{2}$$

İsbatı: Əvvəlcə, göstərək ki, sanki bütün $x \in E$ üçün

$$|F(x)| \leq M \tag{3}$$

doğrudur.

Riss teoreminə görə $F(x)$-ə ölçüyə görə yığılan $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığından sanki hər yerdə $F(x)$-ə yığılan $\{f_{n_k}(x)\}$ alt ardıcıllığı ayırmaq olar. E çoxluğunun sanki hər yerdə $f_{n_k}(x) \to F(x)$ şərtini ödəyən nöqtələrində $|f_{n_k}(x)| \leq M$ bərabərsizliyində limitə keçsək (3) bərabərsizliyini alarıq.

Tutaq ki, $\sigma > 0$ istənilən ədəddir.

$A_n(\sigma) = E\,(|f_n - F| \geq \sigma)$, $B_n(\sigma) = E\,(|f_n - f| < \sigma)$ işarə edək.

Onda

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_b F(x)dx\right| \leq \int_A |f_n(x) - F(x)|dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|dx.$$

Digər tərəfdən $|f_n(x) - F(x)| \leq |f_n(x)| + |F(x)|$ bərabərsizliyinə görə sanki bütün x-lər üçün $A_n(\sigma)$ çoxluğunda $|f_n(x) - F(x)| \leq 2M$.

Buradan

$$\int\limits_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)| dx \le 2MmA_n(\sigma). \qquad (4)$$

Eləcədə inteqralın məlum xassəsinə görə alarıq:

$$\int\limits_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)| dx \le \sigma \cdot mB_n(\sigma) \le \sigma \cdot mE.$$

Nəticədə

$$\left| \int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E F(x)dx \right| \le 2M \cdot mA_n(\sigma) + \sigma \cdot mE$$

alarıq.

İstənilən $\sigma > 0$ ədədi üçün $\varepsilon > 0$ elə seçilə bilər ki, $\sigma \cdot mE < \varepsilon/2$ olsun. Bu σ ədədini qeyd edərək ardıcıllığın ölçüyə görə yığılan olduğunu nəzərə alsaq elə N nömrəsi tapa bilərik ki, $n > N$ olduqda və istənilən $\varepsilon > 0$ üçün $2M \cdot mA_n(\sigma) < \varepsilon/2$ ödənsin.

Nəticədə, $n > N$

$$\left| \int\limits_E f_n(x)dx - \int\limits_E F(x)dx \right| < \varepsilon$$

olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Qeyd. İsbat edilmiş teorem $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının $F(x)$ funksiyasına E-nin bütün nöqtələrində, yaxud sanki bütün nöqtələrində yığıldığı halda doğrudur.

5.5. Riman və Lebeq inteqrallarının müqayisəsi.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur. $\delta > 0$ ədədi və $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsi götürək.

$m_\delta(x_0)$ və $M_\delta(x_0)$ ilə uyğun olaraq $f(x)$ funksiyasının $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ intervalında dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhəddini işarə edək: $m_\delta(x_0) = \inf\{f(x)\}$, $M_\delta(x_0) = \sup\{f(x)\}$, $(x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0)$.

Aydındır ki, $m_\delta(x_0) \le f(x) \le M_\delta(x_0)$, $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap [a,b]$.

Eləcədə, əgər δ azalarsa, bu halda $m_\delta(x_0)$ azalmır, $M_\delta(x_0)$ isə artmır. Yəni δ azaldıqda $m_\delta(x_0)$ arta bilər, $M_\delta(x_0)$ isə azala bilər. Ona görə də sonlu

$$m(x_0) = \lim_{\delta \to +0} m_\delta(x_0), \; M(x_0) = \lim_{\delta \to +0} M_\delta(x_0)$$

limitləri vardır və bu zaman

$$m_\delta(x_0) \le m(x_0) \le M(x_0) \le M_\delta(x_0)$$

Tərif. $m(x)$ və $M(x)$ funksiyalarına $f(x)$ funksiyasını aşağı və yuxarı Ber funksiyaları deyilir.

Teorem 1 (R.Ber). Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində sonlu qiymət alır. $f(x)$ funksiyasının bu nöqtədə kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt $m(x_0) = M(x_0)$ olmasıdır.

İsbatı: Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, $|x - x_0| < \delta$ olduqda $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ olsun.

Başqa sözlə $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ olduqda $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ olar. Buradan alınır ki,

$$f(x_0) - \varepsilon \le m_\delta(x_0) \le M_\delta(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon.$$

Nəticədə $f(x_0) - \varepsilon \le m(x_0) \le M(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon$ olduğunu alırıq. ε ədədinin istənilən ədəd olmasına əsasən $m(x_0) = M(x_0)$ olduğunu alırıq. Şərtin zəruriliyi isbat olundu.

İndi isə şərtin kafiliyini göstərək. Tutaq ki, $m(x_0) = M(x_0)$ ödənir. Bu halda $m(x_0) = M(x_0) = f(x_0)$ olar.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və δ ədədini elə kiçik seçək ki,
$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \le m(x_0),\ M(x_0) \le M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon$
ödənsin. Bu bərabərsizliklərdən

$$f(x_0) - \varepsilon \le m_\delta(x_0),\ \ M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$

alınır.

Əgər $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ olarsa, onda $f(x)$ $m_\delta(x_0)$ və $M_\delta(x_0)$ arasında dəyişər. Ona görə də $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Başqa sözlə $|x - x_0| < \delta$ olduqda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, yəni $f(x)$ funhksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. Teorem isbat olundu.

Əsas lemma. $[a,b]$ parçasının aşağıdakı şəkildə sonsuz sayda bölgülərinə baxaq:

$$a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_{n_1}^{(1)} = b$$

$$a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \ldots < x_{n_2}^{(2)} = b$$

....

$$a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \ldots < x_{n_i}^{(i)} = b$$

....

belə ki, $i \to \infty$ şərtində $\lambda_i = \max\left|x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}\right| \to 0$.

$m_k^{(i)}$ ilə $f(x)$ funksiyasının $\left[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right]$ parçasında dəqiq aşağı sərhədlərini işarə edək. Aşağıdakı şəkildə $\varphi_i(x)$ funksiyalar ardıcıllığı düzəldək:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} m_k^{(i)}, & x \in \left(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right) \\ 0, & x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)} \text{ olduqda} \end{cases}$$

Əgər x_0 nöqtəsi $x_k^{(i)}$, $(i = 1,2,3,\ldots,\ k = 0,1,2,\ldots,n)$ nöqtələrindən heç biri ilə üst-üstə düşməzsə, onda

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x_0) = m(x_0).$$

İsbatı: Hər hansı i nömrəsini qeyd edək və $\left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right]$ ilə i-ci bölgü zamanı x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayan parçanı işarə edək. x_0 nöqtəsi heç bir bölgü nöqtəsi ilə üst-üstə düşmədiyi üçün $x_{k_0}^{(i)} < x_0 < x_{k_0+1}^{(i)}$.

Onda kifayət qədər kiçik $\delta > 0$ üçün $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right]$. Buradan alınır ki, $m_{k_0}^{(i)} \le m_\delta(x_0)$ yaxud $\varphi_i(x_0) \le m_\delta(x_0)$. Burada $\delta \to 0$ şərtində limitə keçsək, $\varphi_i(x_0) \le m_0(x_0)$ olar. Əgər $m_0(x_0) = -\infty$ olarsa, $m(x_0) = -\infty$ olar. Bu halda istənilən i üçün $\varphi_i(x_0) = m(x_0)$ olduğundan lemma isbat olunur.

Tutaq ki, $m(x_0) > -\infty$ və $h < m(x_0)$. Onda elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, $m_\delta(x_0) > h$ olar. Bu δ ədədini qeyd edib, elə böyük i nömrəsi seçək ki, $i > i_0$ olduqda $\left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Burada $\left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right]$ parçası x_0 nöqtəsini öz daxilində saxlayır.
Belə i nömrəsinin varlığı $\lambda \to 0$ şərtindən alınır. Buradan həmin i nömrələri üçün $m_{k_0}^{(i)} \ge m_\delta(x_0) > h$, yaxud $\varphi_i(x_0) > h$ alırıq.

Beləliklə, istənilən $h < m(x_0)$ üçün elə i_0 vardır ki, $i > i_0$ üçün $h < \varphi_i(x_0) \le m(x_0)$.

Buradan alırıq ki, $\varphi_i(x_0) \to m(x_0)$. Lemma isbat olundu.

Analoji qayda $M_k^{(i)}$ ilə $f(x)$ funksiyasının $\left[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right]$ parçasında dəqiq yuxarı sərhəddini işarə etsək və

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} M_k^{(i)}, & x \in \left(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right) \\ 0, & x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)} \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası təyin etsək, onda $x_0 \in [a,b]$ və $x_0 \ne x_k^{(i)}$ $(i = 1,2,3,\ldots,\ \ k = 0,1,2,\ldots)$ üçün

$$\lim_{i\to\infty} \Phi_i(x) = M(x_0)$$

olduğunu göstərə bilərik.

Nəticə 1. $m(x)$ və $M(x)$ Ber funksiyaları ölçülən funksiyalardır.

İsbatı: Əsas lemmada götürülən bölgü nöqtələri $\left\{x_k^{(i)}\right\}$, $(i = 1,2,3,\ldots,\ \ k = 0,1,2,\ldots,n_i)$ hesabi saydadır və ölçüsü sıfra bərabərdir. Lemmadan alınır ki, sanki hər yerdə $\varphi_i(x) \to m(x),\ i \to \infty$ $\varphi_i(x)$ funksiyaları pilləvari funksiyalar olduğundan ölçüləndir. Onda limit funksiyasıda ölçüləndir. Yuxarı Ber funksiyasının da ölçülən olduğunu analoji üsulla göstərə bilərik.

Nəticə 2. Əgər əsas lemmanın şərtlərində $f(x)$ funksiyası məhdud olarsa, onda

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)dx \to (L)\int_a^b m(x)dx.$$

Doğrudan da, əgər $|f(x)| \le M$ olarsa, aydındır ki, $|\varphi_i(x)| \le M$ və $|m(x)| \le M$.

Buradan alınır ki, bu funksiyalar Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalardır və inteqral işarəsi altında limitə keçmə doğrudur.

Nəticə 2-ni aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar:

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} \int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \varphi_i(x)dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}\left[x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}\right] = s_i,$$

burada s_i i-ci bölgüyə uyğun aşağı Darbu cəmidir. Onda 2-ci nəticəni $i \to \infty$ şərtində

$$s_i \to (L)\int_a^b m(x)dx$$

kimi ifadə edə bilərik.

Analoji olaraq S_i yuxarı Darbu cəmi üçün

$$S_i \to (L)\int_a^b M(x)dx, \ \ i \to \infty$$

alarıq. Bu iki münasibətdən $i \to \infty$ şərtində

$$S_i - s_i \to (L)\int_a^b (M(x) - m(x))dx$$

alınır.

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, məhdud $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt $S_i - s_i \to 0$ olmasıdır. Onda bunu nəzərə alsaq $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqrallanması üçün zəruri və kafi şərtin

$$(L)\int_a^b (M(x) - m(x))dx = 0$$

olmasıdır.

Bu sonuncu bərabərlikdən $M(x) - m(x) \sim 0$ yaxud $m(x) \sim M(x)$ olduğu alınır.

Bu nəticəni Teorem 1 ilə müqaisə etsək, aşağıdakı teoremi alarıq:

Teorem 2. Məhdud $f(x)$ funksiasının Riman mənada inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt həmin funksiyanın sanki hər yerdə kəsilməz olmasıdır.

Bu teorem funksiyanın Riman mənada inteqrallanan olması üçün olduqca qiymətli və yüksək səviyyəli bir teoremdir. Bu teorem funksiyanın Riman mənada inteqrallanan olması üçün onun "çox kəsilən olmaması" fikrini əsaslandıran güclü bir teoremdir.

İndi tutaq ki, $f(x)$ funksiyası Riman mənada inteqrallanandır. Onda o zəruri olaraq məhduddur və sanki hər yerdə $m(x) = M(x)$. $m(x) \le f(x) \le M(x)$ olmasından alınır ki, sanki hər yerdə $f(x) = m(x)$. $f(x)$ ölçülən $m(x)$ funksiyasına ekvivalent olduğundan, özüdə ölçüləndir.

Hər bir ölçülən məhdud funksiya Lebeq mənada inteqrallanan olduğundan $f(x)$ funksiyası da Lebeq mənada inteqrallanan olur. Yəni hər hansı funksiyanın Riman mənada inteqrallanan olmasından onun Lebeq mənada inteqrallanan olması alınır.

Nəhayət, $f(x) \sim m(x)$ olmasından

$$(L)\int_a^b f(x)dx \to (L)\int_a^b m(x)dx .$$

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, $s_i \to (R)\int_a^b f(x)dx$ doğrudur. Burada s_i aşağı Darbu cəmidir.

Onda $s_i \to (L)\int_a^b m(x)dx$ olduğunu nəzərə alsaq

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə aşağıdakı mühüm teoremi alırıq:

Teorem 3. Riman mənada inteqrallanan hər bir funksiya Lebeq mənada da inteqrallanandır və hər iki inteqral bir-birinə bərabərdir.

Məlum olduğu kimi bu teoremin tərsi doğru deyildir. Yuxarıda Dirixle funksiyasının misalında bunu göstərmişik.

5.6. Riman və Lebeq inteqralına aid misallar.

1. $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan funksiya $[a,b]$ parçasının boş olmayan açıq $G \subset [a,b]$ çoxluğunun bütün nöqtələrində kəsilən funksiya ola bilərmi?

Cavab: Xeyr, ola bilməz. Əgər funksiya hər hansı boş olmayan açıq $G \subset [a,b]$ çoxluğunun bütün nöqtələrində kəsilən olarsa, onda onun kəsilmə nöqtələri çoxluğunun ölçüsü müsbət olar. Belə funksiya isə Riman mənada inteqrallanan ola bilməz.

2. Misal göstərin ki, $f(x)$ funksiyasının istənilən $[\alpha,\beta]$, $a < \alpha < \beta < b$ parçasında Riman mənada inteqrallanan olmasından onun $[a,b]$ parçasında Riman inteqralının olması çıxmır.

Cavab:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ olduqda} \\ 0, & x = 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası $0 < \alpha < \beta < 1$ olduqda istənilən $[\alpha,\beta]$ parçasında inteqrallanandır, amma $[0,1]$ parçasında inteqrallanan deyildir.

3. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası istənilən $[\alpha,\beta]$, $a < \alpha < \beta < b$ parçasında Riman mənada inteqrallanan isə və funksiya bütün $[a,b]$

parçasında məhdud isə, onda o $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandır

İsbatı:Şərtə görə funksiya $a<\alpha<\beta<b$ olan bütün $[\alpha,\beta]$ parçalarında Riman mənada inteqrallanan olduğuna görə $\left[a+\frac{c}{n}, b-\frac{c}{n}\right]$, $c=\frac{b-a}{3}$, $n=1,2,3,\ldots$ şəklində bütün parçalarda inteqrallanandır. Ona görə də hər bir belə parçada onun kəsilmə nöqtələrinin ölçüsü sıfra bərabərdir. E_n ilə $\left[a+\frac{c}{n}, b-\frac{c}{n}\right]$ parçasında funksiyanın kəsilmə nöqtələri çoxluğunu işarə edək. Onda $[a,b]$ parçasında funksiyanın kəsilmə nöqtələri çoxluğu bütün E_n çoxluqlarının birləşməsindən ibarət olar (ola bilər ki, bu çoxluğa a və b nöqtələri, yaxud bunlardan biri əlavə olunsun). İstənilən n üçün $mE_n=0$ olduğundan $m\left(\bigcup_n E_n\right)=0$ olar. Alırıq ki, funksiyanın $[a,b]$ parçasında kəsilmə nöqtələri çoxluğu sıfır ölçüyə malikdir. Deməli, funksiya $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandır.

4. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının hər bir həddi $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandır. Tutaq ki bu ardıcıllıq $[a,b]$ parçasında $\varphi(x)$ funksiyasına yığılandır və elə A ədədi vardır ki, istənilən $x\in[a,b]$ və istənilən n üçün $|f_n(x)|\le A$ şərti ödənilir. Bu şərtlərdən $\varphi(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan olması alınırmı?

Cavab: $\varphi(x)$ funksiyası Riman mənada inteqrallanan olamaya da bilər (baxmayaraq ki, $\varphi(x)$ funksiyası həmişə Lebeq mənada inteqrallanandır).

Aşağıdakı misala baxaq:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_1,\ldots,r_n,\ldots \text{ olduqda}\\ 0, & [a,b]-\text{nin digər nöqtələrində}\end{cases}$$

(burada $r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots$ - $[a,b]$ parçasında yerləşən rasional ədədlər çoxluğudur).

$\varphi(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında yerləşən bütün rasional nöqtələr çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır. Bu funksiya $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində kəsilən olduğundan Riman mənada inteqrallana bilməz.

5. İsbat edin ki, $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan funksiyalar ardıcıllığı müntəzəm yığılırsa, onda limit funksiya da Riman mənada inteqrallanandır. İsbat edin ki, limit funksiyanın inteqralı, ardıcıllığın hədlərinin inteqrallarının limitinə bərabərdir.

İsbatı: Tutaq ki, $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$-ə müntəzəm yığılır. Göstərək ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır.

a) $f(x)$ funksiyası məhduddur. Doğrudan da, əgər $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$-ə müntəzəm yığılırsa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün, xüsusi halda $\varepsilon = 1$ üçün elə N nömrəsi vardır ki, bütün $n \geq N$ nömrələri üçün $|f_n(x) - f(x)| < 1$. $n = N$ olduqda $|f(x) - f_N(x)| < 1$ olar. Buradan $f_N(x) - 1 < f(x) < f_N(x) + 1$. $f_N(x)+1$ və $f_N(x)-1$ məhdud oldugundan $f(x)$-in məhdudluğunu alırıq.

b) $f(x)$-in kəsilmə nöqtələri çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdir. Doğrudan da, E_n ilə $f_n(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri çoxluğunu işarə etsək, $mE_n = 0$ və $m\left(\bigcup_n E_n\right) = 0$ alarıq. $[a,b] \Big| \bigcup_n E_n$ çoxluğuna daxil olan hər bir x_0 nöqtəsində $f_n(x)$ funksiyaları kəsilməzdir. Onda $f(x)$ funksiyası kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm limiti olduğundan x_0 nöqtəsində kəsilməz olar. Ona görə $f(x)$ funksiyası yalnız $\bigcup_n E_n$ çoxluğunda kəsilən ola bilər. Alırıq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında məhduddur və kəsilmə nöqtələri çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdir. Nəticədə $f(x)$-in Riman mənada inteqrallanan olduğunu alırıq. $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$-ə müntəzəm yığılan olduğundan $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ olmasından

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

yaxud

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

olduğunu alırıq.

6. "Əgər E - $[a,b]$ parçasında sıfır ölçülü çoxluq isə, onda onun $\chi(x)$ xarakteristik funksiyası $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandır" təklifi doğrudurmu?

Cavab: Xeyr. Doğru deyil. Məsələn, E $[0,1]$ parçasına daxil olan rasional ədədlər çoxluğu olarsa, onda $mE = 0$ olar. Amma E çoxluğunun xarakteristik funksiyası $\chi(x)$-ın kəsilmə nöqtələri çoxluğu bütün $[0,1]$ parçası ilə üst-üstə düşür. Ona görə də bu funksiya $[0,1]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan ola bilməz.

7. "Əgər E - $[a,b]$ parçasında heç yerdə sıx olmayan çoxluq isə, onda onun xarakteristik funksiyası $\chi(x)$ $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandır" təklifi doğrudurmu?

Cavab: Doğru deyildir. Məsələn, tutaq ki, E –ölçüsü $\frac{1}{2}$-ə bərabər olan, $[0,1]$ parçasında yerləşən heç yerdə sıx olmayan mükəmməl çoxluqdur. Onda bu çoxluğun xarakteristik funksiyası $\chi_E(x)$ ölçüsü $\frac{1}{2}$-ə bərabər olan E çoxluğunun bütün nöqtələrində kəsilən olar və Riman mənada inteqrallanan olmaz.

8. Tutaq ki, E - $[a,b]$ parçası daxilində yerləşən ölçüsü sıfra bərabər olan qapalı çoxluqdur. Bu çoxluğun xarakteristik funksiyası $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan olarmı?

Cavab: Bəli. Qapalı çoxluğun bütün sərhəd nöqtələri bu çoxluğun özünə daxil olur. Onda E çoxluğunun sərhəd nöqtələri çoxluğunun ölçüsü sıfıra bərabər olar. $\chi_E(x)$ xarakteristik funksiyası E-nin yalnız sərhəd nöqtələrində kəsilən olduğundan $X_E(x)$-in Riman mənada inteqrallanan olduğunu alırıq.

9. $$f(x)=\begin{cases} x^3, & x \text{ irrasional olduqda,} \\ 1, & x \text{ rasional olduqda} \end{cases}$$
funksiyası $[0,1]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandırmı? Funksiyanın Lebeq inteqralını tapın.

Həlli: $[0,1]$ parçasının bütün nöqtələri $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələridir ($x=1$ nöqtəsindən başqa) və ölçüsü sıfırdan böyükdür. Ona görə də bu funksiya Riman mənada inteqrallanan deyildir. Amma funksiya ölçülən və məhdud olduğundan Lebeq inteqralı vardır. İnteqralı hesablamaq üçün $f(x)$ funksiyasını ona ekvivalent olan $\varphi(x)=x^3$ funksiyası ilə əvəz edirik. $\varphi(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandır və

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1 \varphi(x)dx=(L)\int_0^1 x^3dx=(R)\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

10. İsbat edin ki, əgər $E\subset[a,b]$ ölçülən çoxluq isə, onda onun $\chi_E(x)$ xarakteristik funksiyası lebeq mənada inteqrallanandır və $(L)\int_a^b f(x)dx=mE$.

İsbatı: $X_E(x)$ funksiyası ölçülən və məhdud olduğundan Lebeq mənada inteqrallanandır. İnteqralı hesablamaq üçün $[a,b]$ parçası iki E və EC hissələrinə bölək. $(CE=[a,b]\,|E)$.

Onda alarıq:

$$(L)\int_a^b \chi_E(x)dx=(L)\int_E \chi(x)dx+(L)\int_{CE}\chi_E(x)dx=$$
$$=mE+0=mE$$

11. $(L)\int_0^1 f(x)dx$ -i hesablayın:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x\ \ \dfrac{1}{3}-\text{dən böyük irrasional ədəd olduqda} \\ x^3, x\ \ \dfrac{1}{3}-\text{dən kiçik irrasional ədəd olduqda} \\ 0,\quad x\ \text{rasional ədəd olduqda} \end{cases}$$

Həlli. $[0,1]$ parçasını $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ və $\left[\frac{1}{3},1\right]$ parçalarına bölək: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ parçasında funksiya x^3 ilə, $\left[\frac{1}{3},1\right]$ parçasında isə x^3 ilə ekvivalentdir. Onda alırıq:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{1/3}x^3dx+\int_{1/3}^1 x^2dx=\frac{1}{4\cdot 3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\right)=\frac{35}{108}.$$

12. $[0,1]$ parçasından

$$\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right),\ldots,\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right),\ldots$$

intervallarının atılması ilə alınan E çoxluğunda $f(x)=3x^2$ funksiyasının Lebeq inteqralını 0,01 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli: E çoxluğu $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right],\ldots,\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right],\ldots$ parçalarının və ölçüsü sıfır olan iki 0 və 1 nöqtələrinin birləşməsindən ibarətdir. Bu parçaların hər birində funksiya Riman mənada inteqrallanır, ona görə də

$$(L)\int_E f(x)dx=(R)\int_E f(x)dx=\int_{1/3}^{1/2}3x^2\,dx+$$
$$+\int_{1/5}^{1/4}3x^2\,dx+\ldots+\int_{1/2n+1}^{1/2n}3x^2\,dx==\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\ldots.+\frac{1}{(2n)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Bu sıra mütləq yığılandır və onun cəmi 0,01 dəqiqliklə 0, 10-a bərabərdir.

13. D Kantorun mükəmməl çoxluğu, CD isə onun $[0,1]$ parçasına kimi tamamlayıcı çoxluğu olarsa,

Asanlıqla görmək olar ki, $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2^k}$. $n \to \infty$ şərtində $k \to \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Amma $f_n(x)$ ardıcıllığı $[0,1]$ parçasının heç bir nöqtəsində sıfra yığılan deyildir.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cap CD \quad \text{olduqda} \\ \cos \pi x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap CD \quad \text{olduqda} \\ x^2, & x \in D \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

funksiyası üçün $(L)\int_0^1 f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli.

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^{1/2} \sin \pi x\,dx + (L)\int_{1/2}^1 \cos \pi x\,dx =$$

$$= (R)\int_0^{1/2} \sin \pi x\,dx + (R)\int_{1/2}^1 \cos \pi x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x \Big|_0^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin \pi x \Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{\pi}\left(\sin \pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}(0-1) + \frac{1}{\pi}(0-1) = 0$$

14. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə törəməsi varsa və $f'(x)$ törəməsi $[a,b]$ parçasında məhdud isə, onda $f'(x)$ Lebeq mənada inteqrallanandır.

İsbatı: $f'(x)$ törəməsi $[a,b]$ parçasında ölçülən olduğundan və bundan başqa şərtə görə məhdud olduğundan onun $[a,b]$ parçasında sonlu Lebeq inteqralı vardır.

15. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ $[a,b]$ parçasında ölçülən məhdud mənfi olmayan funksiyalar ardıcıllığıdır. Tutaq ki, $n \to \infty$ şərtində $(L)\int_a^b f_n(x)dx \to 0$. Bu münasibətdən E-də hər yerdə, yaxud sanki hər yerdə $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olması alınırmı?

Həlli: Xeyr. Aşağıdakı misala baxaq:

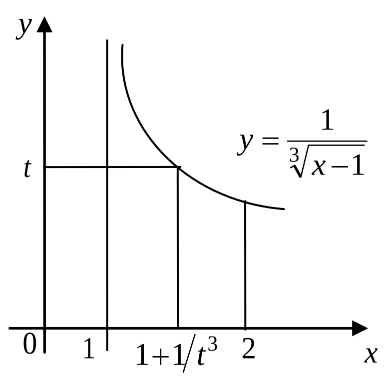
Tutaq ki, $n = 2^k + i$, belə ki, $k = 0,1,2,...,0 \le i < 2^k$ $E = [0,1]$ parçasında aşağıdakı kimi ardıcıllıq düzəldək:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right] \\ 0, & [0,1] \text{ parçasının digər nöqtələrində} \end{cases}$$

16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ funksiyanın $(1,2)$ intervalında Lebeq inteqralını tapın.

Həlli: Bu inteqralı hesablamaq üçün onun $t > 1$ ədədi ilə kəsiyini quraq:

$$[f(x)]_t = \begin{cases} t, & x \in \left(1, 1 + \frac{1}{t^3}\right] \quad \text{olduqda} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & x \in \left[1 + \frac{1}{t^3}, 2\right) \quad \text{olduqda.} \end{cases}$$



Kəsiyin inteqralını hesablayaq:

$$(L)\int_{(1,2)} [f(x)]_t dx = \int_1^{1+1/t^3} t dx + \int_{1+1/t^2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$=\left(t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-t\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2t^2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2t^2}$$

$f(x)$-in inteqralını hesablamaq üçün kəsiyin inteqralını $t\to\infty$ şərtində limitini tapmaq lazımdır.

$$(L)\int\limits_{(1,2)} f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2t^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

17. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ və $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ funksiyaları $(0{,}1)$ intervalında cəmlənəndirlərmi?

Göstəriş. 16-cı misalın həllində olduğu kimi kəsiyin inteqralı vasitəsilə $(L)\int\limits_{(1,2)}\frac{1}{x}dx=\infty$ və $(L)\int\limits_{(1,2)}\frac{1}{x^2}dx=\infty$ olduğunu göstərə bilərik. Yəni $\dfrac{1}{x}$ və $\dfrac{1}{x^2}$ funksiyaları $(0{,}1)$ intervalında cəmlənən deyildirlər.

18. D - Kantorun mükəmməl çoxluğu üzrə

$$f(x)=0\begin{cases} t, & x\in D \text{ olduqda} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\in\overline{D} \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyasının Lebeq inteqralını tapın.

Həlli: $mD=0$ olduğundan $f(x)$ funksiyası $[0{,}1]$ parçasında

$$f(x)=0\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\in[0{,}1] \text{ olduqda} \\ 0, & x=0 \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyasına ekvivalentdir. Onda

$$(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)dx=(L)\int\limits_{[0,1]}\varphi(x)dx=\int\limits_{[0,1]}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Sonuncu inteqralda inteqralaltı funksiyanın kəsiyinin inteqralını hesablayıb onun limitini tapsaq

$$(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)dx=\frac{3}{2}$$

olduğunu alırıq.

19. $$f(x)=0\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x-irrasional \text{ olduqda} \\ x^3, & x-rasional \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyanın $(L)\int_0^1 f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $(0,1]$ yarımintervalında $f(x)$ funksiya $\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyasına ekvivalent olduğundan

$$(L)\int_{[0,1]} f(x)dx = (L)\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$$

alarıq.

20. Aşağıdakı funksiyaların göstərilən çoxluqlar üzrə Lebeq inteqrallarını hesablayın.

a) $E=\left[\frac{1}{16},\frac{5}{4}\right],\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, & x\in J\cap\left[\frac{1}{16},1\right],\\ \frac{4}{x}, & x\in J\cap\left[1,\frac{5}{4}\right],\\ \sin^2 x, & x\in Q\cap\left[\frac{1}{16},\frac{5}{4}\right]\end{cases}$

burada J irrasionla ədədlər çoxluğu, Q - isə rasional ədədlər çoxluğudur.

b) $E=[0,1],\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^3}, & x\in J\cap[0,1],\\ 7x, & x\in Q\cap[0,1].\end{cases}$

c) $E=[0,\pi],\ f(x)=\begin{cases}x\cos^2 x, & x\in J\cap[0,\pi],\\ \sin^2 x, & x\in Q\cap[0,\pi].\end{cases}$

d) $E=[0,2],\ f(x)=\begin{cases}\frac{arctgx}{1+x^2}, & x\in J\cap\left[0,\sqrt{3}\right],\\ -\frac{1}{x+2}, & x\in J\cap\left[\sqrt{3},2\right],\\ \cos^2 x, & x\in Q\cap[0,2].\end{cases}$

e) $E=[0,1],\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in J\cap\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ \ln x, & x\in J\cap\left[\frac{1}{3},1\right],\\ 0, & x\in Q\cap[0,1].\end{cases}$

21. Lebeq inteqralının tərifinə görə $\int_0^4 \sqrt{x}dx$ inteqralını hesabayın.

Həlli. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyası $E=[0,4]$ parçasında kəsilməz olduğundan ölçülən funksiyadır. Funksiyanın aldığı qiymətlər çoxluğu $[0,2]$ parçasını doldurur. $[0,2]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək:

$$y_0=0,\ y_1=\frac{2}{n},...,y_k=k\cdot\frac{2}{n},...,y_n=2..$$

Bu bölgüyə uyğun $e_k=E(y_k\le f<y_{k+1}),\ k=0,1,2,...,n-1$ çoxluqlarını tapaq:

$$\frac{2k}{n}\le\sqrt{x}<\frac{2(k+1)}{n},\quad k=0,1,2,...,n-1$$

olduğundan

$$e_k=\left[\left(\frac{2k}{n}\right)^2,\left(\frac{2(k+1)}{n}\right)^2\right],\ me_k=\frac{4}{n^2}\left[(k-1)^2-k^2\right].$$

Bu bölgüyə uyğun funksiyanın aşağı Lebeq cəmini tapaq:

$$s=\sum_{k=0}^{n-1}y_k me_k=\frac{8}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k\left[(k+1)^2-k^2\right]=$$

$$=\frac{8}{n^3}\left[(n-1)n^2-\left(1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2\right)\right]=$$

$$=\frac{8}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k\left[(n-1)n^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]=$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{4}{3^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{16}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}s=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$$

Yəni $(L)\int_0^4\sqrt{x}dx=5\frac{1}{3}.$

VI FƏSİL
CƏMLƏNƏN VƏ KVADRATI İLƏ CƏMLƏNƏN FUNKSİYALAR

1.6. Qeyri-məhdud funksiyaların Lebeq inteqralı. Cəmlənən funksiyalar və onun bəzi xassələri.

Yuxarıda biz ölçülən məhdud funksiyaların Lebeq inteqralı anlayışı ilə tanış olduq, onun bir çox əsas xassələrini nəzərdən keçirdik və Riman inteqralı ilə müqayisəsini verdik. Məlumdur ki, əgər inteqralaltı funksiya qeyri-məhdud olarsa, yaxud inteqrallanma oblastı sonsuz olarsa, bu halda baxılan funksiyanın adi mənada Riman inteqralı olmur və Riman inteqralının ümumiləşməsi olan birinci və ikinci növ qeyri-məxsusi inteqrallara baxılır.

V fəsildə biz Lebeq inteqralının tərifini ölçülən məhdud funksiyalar üçün verdik. Təbii olaraq aşağıdakı sual ortaya çıxır. Ölçülən qeyri-məhdud oblastlar üçün Lebeq inteqralını necə ümumiləşdirmək olar?

I. Əvvəlcə ölçülən və mənfi olmayan funksiyalar üçün Lebeq inteqralını təyin edək.

Tutaq ki, $f(x)$ ölçülən E çoxluğunda təyin edilmiş mənfi olmayan ölçülən funksiyadır.

Lemma 1. Tutaq ki, $f(x)$ ölçülən E çoxluğunda təyin edilmiş mənfi olmayan ölçülən funksiyadır və N ixtiyari natural ədəddir. Aşağıdakı kimi funksiya təyin edək:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{əgər} \quad f(x) \le N, \\ N, & \text{əgər} \quad f(x) > N. \end{cases}$$

Onda $[f(x)]_N$ funksiyasıda ölçülən funksiyadır.

İsbatı: Asanlıqla yoxlamaq olar ki, aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$E([f]_N > a) = \begin{cases} E(f > a), & \text{əgər} \quad a < N, \\ \varnothing, & \text{əgər} \quad a \ge N. \end{cases}$$

Buradan teoremin isbatı alınır.

Qeyd: $[f(x)]_N$ funksiyasına $f(x)$ funksiyasının "kəsiyi", yaxud "$f(x)$ funksiyasının N ədədi ilə kəsiyi" deyilir.

Lemmadan çıxır ki, $f(x)$ funksiyası ölçüləndirsə, onun "kəsiyi"də ölçüləndir.

Lemmanın şərtlərindən çıxır ki, $[f(x)]_N$ funksiyası məhduddur. Ona görə də $[f(x)]_N$ Lebeq mənada inteqrallanandır. Digər tərəfdən $[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le [f(x)]_3 \le \ldots$ olduğundan $\int_E [f(x)]_1 \le \int_E [f(x)]_2 \le \int_E [f(x)]_3 \le \ldots$ ardıcıllığının sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{N\to\infty}\int_E [f(x)]_N \, dx \qquad (*)$$

limiti vardır.

Tərif. (*) limitinə $f(x)$ funksiyasının E çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və $\int_E f(x)dx$ kimi işarə edilir.

Əgər bu inteqral sonlu olarsa, onda $f(x)$ funksiyası Lebeq mənada inteqrallanan, yaxud E çoxluğunda cəmlənən funksiya adlanır. E çoxluğunda cəmlənən bütün funksiyalar çoxluğunu $L_1(E)$ ilə işarə edirlər.

Əgər $f(x)$ mənfi olmayan ölçülən məhdud funksiya olarsa, onda kifayət qədər böyük N üçün $[f(x)]_N \equiv f(x)$ olar və inteqralın yeni tərifi əvvəlcədən məlum olan təriflə eyni olar.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda cəmlənən isə, onda o bu çoxluqda sanki hər yerdə sonludur.

İsbatı: $A = E(f = +\infty)$ işarə edək. A çoxluğunda $[f(x)]_N = N$ olduğundan

$$\int_E [f(x)]_N \, dx \geq \int_A [f(x)]_N \, dx = N \cdot mA.$$

Əgər $mA > 0$ olarsa, onda $\int_E [f(x)]_N \, dx$ inteqralı $N \to \infty$ şərtində sonsuz artardı. Bu isə $f(x)$ funksiyasının cəmlənən olması şərtinə ziddir.

Teorem 2. Əgər $mE = 0$ olarsa, onda istənilən mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda cəmlənən funksiyadır və $\int_E f(x)dx = 0$.

Tutaq ki, $f(x)$ E çoxluğunda ölçülən və istənilən işarəli funksiyadır.

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{əgər} \quad f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{əgər} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{əgər} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

işarə edək. Aydındır ki, $f_+(x)$ və $f_-(x)$ ölçülən və mənfi olmayan funksiyalardır. Odur ki, bu funksiyalar üçün $\int_E f_+(x)dx$, $\int_E f_-(x)dx$ inteqralının mənası vardır. Əgər hər iki inteqral sonlu olarsa, bu halda $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ funksiyasının inteqralı

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Teorem 3. Ölçülən E çoxluğunda ölçülən $f(x)$ funksiyasının cəmlənən olması üçün zəruri və kafi şərt $|f(x)|$ funksiyasının inteqrallanan olmasıdır. Bu zaman

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx .$$

İsbatı: $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ və $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ olduğundan

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx , \quad \int_E |f(x)|dx = \int_E f_+(x)dx + \int_E f_-(x)dx.$$

Bu bərabərsizliklərə görə alarıq:

$$\left|\int_E f(x)dx\right| = \left|\int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx\right| \le$$

$$\le \int_E f_+(x)dx + \int_E f_-(x)dx = \int_E |f(x)|dx.$$

Teorem isbat olundu.

6.2. Sonsuz ölçülü çoxluqlar üzrə inteqral.

İndi isə sonsuz ölçülü çoxluqlar üzrə inteqralı öyrənək.

Tutaq ki, hər biri sonlu ölçüyə malik olan $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$ çoxluqlar ardıcıllığı verilmişdir. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ çoxluğuna bu ardıcıllığın limiti deyilir və $E = \lim_{n\to\infty} E_n$ kimi işarə olunur.

$mE_1 \le mE_2 \le mE_3 \le ...$ olduğu üçün sonlu və ya sonsuz $\lim_{n\to\infty} mE_n$ limiti vardır. Bu limitə E çoxluğunun ölçüsü deyilir və $mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$ kimi işarə olunur. Əgər bu limit sonsuz olarsa, E çoxluğuna sonsuz ölçülü çoxluq deyilir.

Tutaq ki, E sonsuz ölçülü çoxluqdur və hər biri sonlu ölçülü olan monoton artan $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$ çoxluqlar ardıcıllığının limitidir. Mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir. Onda

$$\int_{E_1} f(x)dx \le \int_{E_2} f(x)dx \le \int_{E_3} f(x)dx \le \dots .$$

Buradan sonlu və ya sonsuz $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx$ limitinin varlığı alınır.

Bu limitə $f(x)$ funksiyasının E çoxluğunda Lebeq inteqralı deyilir və $(L)\int_E f(x)dx$ kimi işarə olunur.

Əgər baxılan limit sonlu olarsa, onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda inteqrallanan və ya cəmlənən funksiya adlanır.

Məlumdur ki, E çoxluğu müxtəlif monoton çoxluqlar ardıcıllığının limiti şəklində göstərilə bilər. İsbat etmək olar ki, $f(x)$ funksiaysının inteqralının təyini bu ardıcıllıqların seçilməsindən asılı deyildir. Yəni E çoxluğu hər biri sonlu ölçülü monoton artan $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ və $E_1' \subset E_2' \subset E_3' \subset \dots$ çoxluqlar ardıcıllığının limiti kimi göstərilmişsə, $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n' = E$ isə, onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n'} f(x)dx .$$

Əgər E çoxluğunda ölçülən $f(x)$ funksiyası müxtəlif işarəli olarsa, onu $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ şəklində göstərib, $\int_E f_+(x)dx$ və $\int_E f_-(x)dx$ inteqrallarını təyin etmək olar.

Əgər hər iki inteqral sonlu olarsa, onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda inteqrallanan funksiya adlanır.

Qeyd edək ki, $f(x)$ funksiyasının sonsuz ölçülü E çoxluğunda inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt $|f(x)|$ funksiyasının E çoxluğunda inteqrallanan olmasıdır.

Məlumdur ki, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyasının $(-\infty, \infty)$ intervalında qeyri-məxsusi inteqralı vardır və $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx = \pi$.

Lakin bu funksiya üçün $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$.

6.3. Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzliyi

Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzliyi adlandırılan xassəsini ifadə edən aşağıdakı mühüm teoremi isbat edək.

Teorem. Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda cəmlənən $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, ölçüsü $me < \delta$ şərtini ödəyən istənilən $e \subset E$ çoxluğu üçün $\left| \int_e f(x)dx \right| < \varepsilon$ olsun.

İsbatı: $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda cəmlənən funksiya olduğundan $|f(x)|$ funksiyası da cəmlənəndir. İnteqralın tərifinə görə bu halda

$$\lim_{N\to\infty} \int_E \left[|f(x)| \right]_N dx = \int_E |f(x)| dx. \tag{1}$$

Limitin tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N_0 nömrəsi vardır ki,

$$0 \le \int_E |f(x)| dx - \int_E \left[|f(x)| \right]_{N_0} dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

$|f(x)| - \left[|f(x)| \right]_{N_0} \ge 0$ olduğundan istənilən $e \subset E$ çoxluğu üçün

$$\int_e \left\{ |f(x)| - \left[|f(x)| \right]_{N_0} \right\} dx = \int_E \left\{ |f(x)| - \left[|f(x)| \right]_{N_0} \right\} dx .$$

(2) bərabərsizliyinə görə

$$\int_e |f(x)| dx - \int_e \left[|f(x)| \right]_{N_0} dx < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Buradan

$$\int_e |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_E \left[|f(x)| \right]_{N_0} dx .$$

$\left[|f(x)| \right]_{N_0} \le N_0, \quad x \in E$ olduğundan $\delta > \frac{\varepsilon}{2N_0}$ qəbul etsək, onda

$$\int_e |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 me < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \delta = \varepsilon \tag{3}$$

alarıq. Nəticədə

$$\left| \int_e f(x)dx \right| \le \int_e |f(x)| dx < \varepsilon$$

alarıq. Teorem isbat olundu.

6.4. Mücərrəd funksiyaların Lebeq inteqralı

Fərz edək ki, X hər hansı bir çoxluqdur, belə ki, bu çoxluğun bütün alt çoxluqları vahidi X olan σ-cəbr əmələ gətirir. Tutaq ki, bu çoxluqda σ-additiv μ ölçüsü təyin olunmuşdur. Bu çoxluğa daxil olan hər bir A çoxluğuna μ ölçülən çoxluq deyilir.

Tərif 1. Əgər X çoxluğunda təyin edilmiş ölçülən həqiqi $f(x)$ funksiyası hesabi sayda müxtəlif qiymətlər alırsa, onda ona sadə funksiya deyilir.

Tutaq ki, $f(x)$ sadə funksiyası $y_1, y_2, y_3, \dots\ y_i \neq y_j,\ i \neq j$ qiymətlərini alır. $A_n = \{x : x \in A,\ f(x) = y_n\}$ çoxluqlarını düzəldək.

Tərif 2. Əgər $\sum\limits_n y_n \mu(A_n)$ sırası mütləq yığılan sıra olarsa, bu sıranın cəminə $f(x)$ funksiyasının A çoxluğunda Lebeq inteqralı deyilir və

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum\limits_n y_n \mu(A_n) \tag{1}$$

kimi işarə olunur. Əgər inteqral sonlu isə, $f(x)$ μ ölçüsünə nəzərən inteqrallanan və ya cəmlənən funksiya adlanır.

Əgər $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda sonlu Lebeq inteqralına malik olan $\{f_n(x)\}$ sadə funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm limiti olarsa, bu halda

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)dx = I \tag{2}$$

limitinə $f(x)$ funksiyasının A çoxluğunda inteqralı deyilir və

$$\int\limits_A f(x)d\mu \tag{3}$$

kimi işarə olunur.

Misallara baxaq:

1) Tutaq ki, P_0 və G_0 Kantor çoxluqlarıdır. Aşağıdakı kimi funksiya təyin edək

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in P_0 \quad \text{olduqda} \\ \dfrac{1}{2^n}, & x \in G_0 \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

Bu funksiyanın $[0,1]$ parçasında Lebeq inteqralını tapın.

Həlli. Göründüyü kimi funksiya ölçüsü sıfra bərabər olan $\mu P_0 = 0$ çoxluqda x^2 şəklində, uzunluğu $\frac{1}{3^n}$-ə bərabər olan atılan G_n çoxluqlarında isə $\frac{1}{2^n}$-ə bərabər qiymətlər alır. Onda tərifə görə

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{P_0} f(x)dx + \int_{G_0} f(x)dx = 0 + \int_{G_0} f(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{4}.$$

(burada uzunluğu $\frac{1}{3^k}$ olan intervallarının sayı 2^{k-1}-dir).

2) Tutaq ki, $[0,1]$parçasında

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x - \text{irrasional olduqda} \\ 1, & x - \text{rasional olduqda} \end{cases}$$

funksiyası verilmişdir. Bu funksiyanın Lebeq inteqralını tapın.

Həlli. Məlumdur ki, rasional nöqtələr çoxluğu hesabidir və onun ölçüsü sıfra bərabərdir. Ona görə də $f(x) \sim x^3$ olur. Ekvivalent funksiyaların Lebeq inteqralları bərabər olduğundan

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

olar.

3) Tutaq ki, $[0,1]$ parçasında $f(x)$ funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur: $x \in P_0$ olduqda funksiya $f(x) = 10$ kimi, $x \in G_0$ olduqda isə hər bir atılan intervalda funksiyanın qrafiki diametri bu interval olan yuxarı yarımçevrə olur. Bu funksiyanın Lebeq inteqralını tapın.

Həlli. $G_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$ işarə edək. Diametri $\beta_k - \alpha_k$ olan yarımçevrənin əhatə etdiyi sahə uyğun müəyyən inteqrala bərabər olur, yəni $\frac{\pi(\beta_k - \alpha_k)^2}{8}$ olur.

Onda

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \int_{P_0} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{8} (\beta_k - \alpha_k)^2$$

olar.

Əgər $\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{3}$, $\beta_2-\alpha_2=\beta_3-\alpha_3=\frac{1}{3^2}$,

$\beta_4-\alpha_4=\beta_5-\alpha_5=\beta_6-\alpha_6=\beta_7-\alpha_7=\frac{1}{3^3}$,

$\beta_8-\alpha_8=\beta_9-\alpha_9=\beta_{10}-\alpha_{10}=...=\beta_{15}-\alpha_{15}=\frac{1}{3^4}, \beta_{16}-\alpha_{16}=...=\frac{1}{3^5}=...$ olduğunu nəzərə alsaq

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2^2}{3^6}+...+\frac{2^{k-1}}{3^{2n}}+...\right)=\frac{\pi}{56}$$

olar.

4) Tutaq ki, $[0,1]$ parçasında

..

şəklində funksiya verilmişdir. Bu funksiyanın Lebeq inteqralını tapın

Həlli: A ilə $[0,1]$ parçasının rasional ədədlər çoxluğunu, B ilə $[0,1]$ parçasının $\frac{1}{3}$-dən böyük irrasional nöqtələr çoxluğunu, C ilə $\frac{1}{3}$-dən kiçik irrasional nöqtələr çoxluğunu işarə edək. Göründüyü kimi $x\in A$ olduqda $f(x)\sim 0$, $x\in B$ olduqda $f(x)\sim 3x^2$ və $x\in G$ olduqda $f(x)\sim 4x^3$ olur. Əgər $[0,1]=A\cup B\cup C$ olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_A f(x)dx+(L)\int_B f(x)dx+(L)\int_C f(x)dx=$$

$$=0+\int_{\frac{1}{3}}^1 3x^2dx+\int_0^{\frac{1}{3}} 4x^2dx=x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}+x^4\Big|_0^{\frac{1}{3}}=\frac{79}{81}.$$

5) Tutaq ki, $[0,1]=P_0\cup G_0$ Kantor çoxluqları, $\theta(x)$ isə Kantor funksiyadır. Bu funksiyanın Lebeq inteqralını tapın.

Həlli. Məlum olduğu kimi $\theta(x)$ Kantor funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunur: Birinci atılan $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalında $\theta(x)=\frac{1}{2}$, ikinci atılan $\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)$ və $\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$ intervallarında $\theta(x)=\frac{1}{4}$ və $\theta(x)=\frac{3}{4}$, üçüncü atılan dörd sayda $\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right),\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right),\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right),\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)$ intervallarında uyğun olaraq $\theta(x)=\frac{1}{8}$,

$\theta(x)=\dfrac{3}{8}$, $\theta(x)=\dfrac{5}{8}$, $\theta(x)=\dfrac{7}{8}$ götürülür və proses bu qayda ilə davam etdirilir. $\theta(0)=0$, $\theta(1)=1$ və $x\in P_0$ üçün $\theta(x)=\sup\limits_{\xi<x}\theta(\xi)$ kimi təyin olunur.

Onda

$$(L)\int_0^1\theta(x)dx=(L)\int_{P_0}\theta(x)dx+(L)\int_{G_0}\theta(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\frac{1}{3^2}+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^3}\right)\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{3^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{2}.$$

olar.

6) $(L)\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ funksiyası $[0,1]$ parçasında qeyri-məhdud olduğundan

$$[f(x)]_N=\begin{cases}N, & f(x)>N-\text{ olduqda}\\ f(x), & f(x)\le N-\text{ olduqda}\end{cases}$$

kəsik funksiyasına baxaq.

Baxılan halda

$$[f(x)]_N=\begin{cases}N, & 0<x<\dfrac{1}{N^3}\ \text{ olduqda}\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \dfrac{1}{N^3}\le x<1\ \text{ olduqda}\end{cases}.$$

Onda alarıq:

$$\int_0^1[f(x)]_N\,dx=\int_0^{\frac{1}{N^3}}Ndx+\int_{\frac{1}{N^3}}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=$$

$$=N\cdot\frac{1}{N^3}+\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{\frac{1}{N^3}}^{1}=\frac{1}{N^2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{N^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2N^2}$$

Buradan

$$(L)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2N^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

7) Tutaq ki,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x - \text{irrasional olduqda} \\ x^3, & x - \text{rasional olduqda} \end{cases}$$

$(L)\int_0^1 f(x)dx$ inteqralını tapın.

Həlli. Rasional nöqtələr çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabər olduğundan verilmiş funksiya $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ olur. Ona görə də $(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Baxılan funksiyaya uyğun kəsik funksiyanı götürək:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} N, & 0 < x < \dfrac{1}{N^2} \text{ olduqda} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \dfrac{1}{N^2} \le x \le 1 \text{ olduqda} \end{cases}.$$

Onda

$$\int_0^1 [f(x)]_N dx = \int_0^{\frac{1}{N^2}} Ndx + \int_{\frac{1}{N^2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{N} + 2 - \frac{2}{N} = 2 - \frac{1}{N}.$$

Buradan

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\left(2 - \frac{1}{N}\right) = 2.$$

8) $E = (0, \infty)$ intervalında $f(x) = e^{-x}$ funksiyasının Lebeq inteqralını hesablayın.

Həlli. $E_k = (0, k)$, $k = 1,2,...$ çoxluqlarını götürək. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$ və $E = \bigcup_k E_k$.

$$(L)\int_0^\infty e^{-x}dx = \int_0^k e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^k - -e^{-k} + 1 = 1 - e^{-k}.$$

Buradan

$$(L)\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\left(1-e^{-k}\right)dx = 1.$$

9) $E=(0,\infty)$ intervalında $f(x)=\dfrac{1}{[x]!}$ funksiyasının Lebeq inteqralını hesablayın ($[x]$ x ədədinin tam hissəsini göstərir).

Həlli. $E_n=(n,n+1)$ işarə edək. $x\in E_n$ olduqda $[x]=n$ olur. Onda $f(x)=\dfrac{1}{n!}$, $x\in E_n$ olduqda

$$(L)\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} = e.$$

6.5. Kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar.

İndi çox mühüm funksiyalar sinfi olan kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar sinfi ilə tanış olaq. Baxılan bütün funksiyaların $[a,b]$ parçasında təyin olunduğunu fərz edəcəyik. Əgər bu funksiyalar hər hansı ölçülən $E_0\subset E=[a,b]$ çoxluğunda təyin olunarsa, bu halda funksiyanı $E\,\big|\,E_0$ çoxluğunda sıfra bərabər hesab etməklə bütün $[a,b]$ parçasına davam etdirə bilərik.

Tərif. Əgər ölçülən $f(x)$ funksiyası üçün $\int_a^b f^2(x)dx<\infty$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası kvadratı ilə cəmlənən funksiya adlanır.

Bütün kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar çoxluğunu $L_2[a,b]$ kimi işarə edirlər.

Teorem 1. Kvadratı ilə cəmlənən hər bir funksiya cəmlənəndir ,yəni $L_2[a,b]\subset L_1[a,b]$.

İsbatı: Teoremin isbatı aşkar $|f(x)|\le\dfrac{1+f^2(x)}{2}$ bərabərsizliyindən alınır.

Eləcədə

$$|f(x)\cdot g(x)|\le\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

bərabərsizliyindən

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)dx$$

kvadratı ilə cəmlənən iki funksiyanın hasilinin cəmlənən funksiya olduğunu alırıq. Yəni, $f(x), g(x) \in L_2[a,b]$ olarsa, onda $f(x) \cdot g(x) \in L_1[a,b]$ olar.

Eyni zamanda

$$(f(x) \pm g(x))^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)$$

bərabərliyindən kvadratı ilə cəmlənən funksiyaların cəminin və fərqinin də kvadratı ilə cəmlənən olduğunu alırıq. Nəhayət $f(x) \in L_2[a,b]$ olduqda istənilən c ədədi üçün $c \cdot f(x) \in L_2[a,b]$ olar.

Teorem 2 (Koşi Bunyakovski bərabərsizliyi). $f(x), g(x) \in L_2[a,b]$ funksiyaları üçün

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right] \cdot \left[\int_a^b g^2(x)dx\right] \tag{1}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı: $\varphi(t) = At^2 + 2Bt + C$ həqiqi əmsallı kvadrat üçhədlisini götürək, belə ki, $A > 0$.

Məlumdur ki, əgər bu üçhədli t-nin bütün həqiqi qiymətlərində müsbətdirsə, onda

$$B^2 \le AC. \tag{2}$$

$$\varphi(t) = \int_a^b [t \cdot f(x) + g(x)]^2 dx = t^2 \int_a^b f^2(x)dx +$$

$$+ 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

götürək.

Bu üçhədli t-nin bütün qiymətlərində müsbətdir: $\varphi(t) \ge 0$.

Əgər $A = \int_a^b f^2(x)dx,\quad B = \int_a^b f(x)g(x)dx,\quad C = \int_a^b g^2(x)dx$ işarə etsək və (2) bərabərsizliyini nəzərə alsaq (1) bərabərsizliyinin doğru olduğunu alarıq:

Nəticə: Əgər (1) bərabərsizliyində $y(x) = 1$ qəbul etsək, onda

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

olduğunu alarıq.

Teorem 3. Əgər $f(x), g(x) \in L_2[a,b]$ isə, onda

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)g(x)]^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı: Əgər (1) Bunyakovski bərabərsizliyinin hər tərəfindən kök alsaq, onda

$$\int_a^b [f(x)g(x)]^2 dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

alarıq. Alınmış bu bərabərsizliyi 2-yə vurub hər tərəfə $\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$ əlavə etsək

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \right)^2$$

olduğunu alarıq. Hər tərəfdən kvadrat kök alsaq tələb edilən bərabərsizliyi alarıq. Teorem isbat olundu.

Hər bir $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyasına qarşı bu funksiyanın norması adlanan

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

kəmiyyətini qarşı qoyaq. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu kəmiyyət aşağıdakı şərtləri ödəyir.

1. $\|f\| \ge 0,\ \|f\| = 0$ yalnız və yalnız $f(x) \sim 0$ olduqda mümkündür.
2. $\|k\, f\| = |k| \cdot \|f\|$ istənilən k ədədi üçün.
3. $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Göründüyü kimi funksiyanın normasının bu xassələri həqiqi və ya kompleks ədədin modulunun malik olduğu xassələrə analojidir. Eləcə də norma anlayışından istifadə edərək $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları arasında məsafə adlanan

$$\rho(f,g) = \|f - g\|$$

kəmiyyətini də daxil edə bilərik.

Əgər ekvivalent funksiyaları bərabər hesab etsək daxil edilmiş məsafə anlayışının aşağıdakı şərtləri ödədiyini göstərə bilərik.

1) $\rho(f,g) \ge 0$, bərabərlik halı yalnız və yalnız $f = g$ olduqda mümkündür.

2) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$

3) $\rho(f,g)\le\rho(f,\varphi)+\rho(\varphi,g)$.

Əgər hər hansı A çoxluğunun elementləri üçün təyin edilmiş $\rho(x,y)$ funksiyası bu üç şərti ödəyərsə, onda A metrik fəza adlanır.

Onda alırıq ki, $L_2[a,b]$ metrik fəzadır. $L_2[a,b]$-yə Hilbert funksiyalar fəzası da deyilir.

6.6. Orta kvadratik yığılma və onun digər yığılmalarla müqayisəsi.

Tutaq ki, $f_1, f_2,..., f_n,...$ $L_2[a,b]$ fəzasına daxil olan hər hansı ardıcıllıq və $f(x)\in L_2[a,b]$ funksiyası verilmişdir.

Tərif 1. Əgər verilmiş ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə N natural nömrəsi tapmaq olarsa ki, $n>N$ üçün $\|f_n-f\|<\varepsilon$ şərti ödənilsin, bu halda deyirlər ki, f_n funksiyalar ardıcıllığı f elementinə orta kvadratik mənada yığılandır və bunu $f_n\to f$ kimi, yaxud $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ kimi işarə edirlər.

Əgər $L_2[a,b]$ fəzasında normanın tərifini nəzərə alsaq bu şərti

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0 \tag{*}$$

kimi də yaza bilərik.

Göründüyü kimi ardıcıllığın adi mənada yığılması ilə orta kvadratik yığılma arasında ciddi məna fərqi vardır. Adi mənada yığılmada ardıcıllıq hər bir nöqtədə $\{f_n(x_0)\}$ ədədi ardıcıllığının yığılması olduğu halda, orta kvadratik yığılma (*) mənada başa düşülür.

Teorem 1. Əgər $\{f_n(x)\}\subset L_2(a,b)$ ardıcıllığı $f(x)\in L_2[a,b]$ funksiyasına orta kvadratik mənada yığılırsa, onda bu ardıcıllıq həmin funksiyaya ölçüyə görə də yığılır.

İsbatı. İstənilən $\sigma>0$ ədədi götürək və $A_n(\sigma)=E(|f_n-f|\ge\sigma)$ işarə edək. Onda

$$\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx\ge\int_{A_n(\sigma)}(f_n(x)-f(x))^2dx\ge\sigma^2\cdot mA_n(\sigma),$$

olar. σ-qeyd olunmuş ədəd olduğundan

$$mA_n(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma^2} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx$$

alarıq. Buradan $n \to \infty$ şərtində $mA_n(\sigma) \to 0$ olduğunu alırıq. Bu isə ardıcıllığın ölçüyə görə yığılması deməkdir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə: Əgər $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına orta kvadratik mənada yığılırsa ,onda bu ardıcıllıqdan elə $f_{n_k}(x)$ altardıcıllığı ayırmaq olar ki, bu ardıcıllıq $f(x)$-ə sanki hər yerdə yığılsın.

Qeyd edək ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığının $f(x)$ funksiyasına orta kvadratik mənada yığılmasından onun $f(x)$-ə sanki hər yerdə yığılması çıxmır.

Eləcədə $f_n(x)$ ardıcıllığının $f(x)$ funksiyasına istənilən $x \in [a,b]$ nöqtəsində yığılan olmasından onun $f(x)$-ə orta kvadratik mənada yığılan olması çıxmır. Bunu aşağıdakı misaldan da görə bilərik: $[0,1]$ parçasında aşağıdakı ardıcıllığa baxaq:

$0 < x < \frac{1}{n}$ olduqda $f_n(x) = n$, $[0,1]$ parçasının digər nöqtələrində $f_n(x) = 0$ kimi olsun.

Göründüyü kimi istənilən $x \in [0,1]$ üçün $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$.

Eyni zamanda

$$\int_0^1 f_n^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n \to \infty.$$

Yəni bu ardıcıllıq $f(x) = 0$ funksiyasına orta kvadratik mənada yığılmır.

Teorem 2. Əgər $\{f_n(x)\} \subset L_2(a,b)$ ardıcıllığı orta kvadratik mənada yığılan isə, onda onun limiti yeganədir.

İsbatı: Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $f_n(x)$ ardıcıllığının iki müxtəlif $f(x)$ və $g(x)$ limitləri vardır. Onda

$$\|f - g\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - g\|$$

bərabərsizliyində $\|f - g\| \to 0, \|f_n - g\| \to 0, \quad n \to \infty$ olduğunu nəzərə alsaq, baxılan bərabərsizliyin sağ tərəfinin sıfra yığıldığını, sol tərəfinin isə mənfi olmayan sabit olduğunu alırıq. Nəticədə, $\|f - g\| = 0, \quad f - g = 0, \quad f = g$ alınır. Bu isə fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Deməli limit yeganədir. Teorem isbat olundu.

Tərif 2. Tutaq ki, $\{f_n(x)\} \subset L_2(a,b)$ ardıcıllığı verilmişdir. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə N natural ədədi seçmək olarsa ki, $n > N,\ m > N$ olduqda $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ şərti ödənilsin, bu halda $\{f_n\}$ ardıcıllığı fundamental ardıcıllıq adlanır.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 3. Əgər $\{f_n(x)\} \subset L_2(a,b)$ ardıcıllığı yığılandırsa, onda ardıcıllıq fundamentaldır.

İsbatı: İstanilən $\varepsilon > 0$ ədədi götürək. Tərifə görə elə N nömrəsi vardır ki, $n > N$ üçün $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Əgər $n > N$ və $m > N$ götürsək, onda

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \varepsilon$$

olduğunu alarıq. Bu isə ardıcıllığın fundamental olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremin tərsi olan teorem də doğrudur.

Teorem 4 (E.Fişer). Əgər $\{f_n(x)\} \subset L_2(a,b)$ ardıcıllığı fundamentaldırsa, onda o yığılan ardıcıllıqdır.

İsbatı: Yığılan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ sırasını götürək. Hər bir k üçün elə n_k nömrəsi seçək ki, $n > n_k,\ m > n_k$ olduqda

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k}$$

olsun. Ümumiliyi pozmadan hesab edə bilərik ki, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$.

Bu halda $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$ olar. Buradan $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \infty$ olduğunu alarıq.

$$\int_a^b \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| dx \leq \sqrt{b-a} \cdot \left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|$$

bərabərsizliyinə görə $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_a^b \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| dx$ sırasının da yığılan olduğunu alarıq.

Buradan

$$\left|f_{n_1}(x)\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left\| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right\|$$

sırasının, eləcə də

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\right\}$$

sırasının $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə yığılan olduğunu alırıq. Sonuncu sıranın yğılması sonlu $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_k}(x)$ limitinin varlığına ekvivalentdir.

Aşağıdakı kimi $f(x)$ funksiyası daxil edək. Bu funksiya sonlu $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_k}(x)$ limitinin olduğu bütün nöqtələrdə həmin limitə, limitin olmadığı yaxud sonsuzluğa bərabər olduğu bütün nöqtələrdə isə sıfra bərabər götürülür. Bu qayda ilə təyin edilən $f(x)$ funksiyası ölçüləndir və $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə $f_{n_k}(x)\to f(x)$ olur.

İndi göstərək ki, $f(x)$ funksiyası $f_n(x)$ ardıcıllığının orta kvadratik mənada limitidir və $f(x)\in L_2[a,b]$. Şərtə görə istənilən $\varepsilon>0$ ədədi verildikdə elə N nömrəsi vardır ki, $n>N,\ m>N$ olduqda $\|f_n-f_m\|\le\varepsilon$.

Elə k_0 nömrəsi seçək ki, $n_{k_0}>N$ olsun. Onda istənilən $n>N$ üçün $k>k_0$ olduqda

$$\int_a^b\left(f_n(x)-f_{n_k}(x)\right)^2dx<\varepsilon^2$$

olar. Buradan $k\to\infty$ şərtində limitə keçsək

$$\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)^2dx\le\varepsilon^2$$

alarıq.

Bu bərabərsizlikdən $[f_n(x)-f(x)]\in L_2[a,b]$ olduğunu alırıq. Eyni zamanda $f_n(x)\in L_2[a,b]$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\|f(x)\|\le\|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)\|$$

bərabərsizliyindən $f(x)\in L_2[a,b]$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Qeyd. İsbat olunmuş bu teorem $L_2[a,b]$ fəzasının tamlıq xassəsini ifadə edir. Bu teorem riyazi analiz kursunda ədədi ardıcıllığın yığılması üçün məlum Bolsano-Koşi meyarının analoqudur. Bolsano-Koşi meyarı isə ədəd oxunun kəsilməzlik xassəsinə malik olduğunu göstərir.

Tərif 3. Tutaq ki, $A\subset L_2(a,b)$ hər hansı alt çoxluqdur. Əgər $L_2[a,b]$ fəzasına daxil olan hər bir funksiya A çoxluğuna daxil olan hər hansı ardıcıllığın orta kvadratik mənada limiti olarsa, onda A çoxluğuna $L_2[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıx çoxluq deyilir.

Bu tərifi başqa formada aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar: $A \subset L_2(a,b)$ çoxluğunun hər yerdə sıx olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $f(x) \in L_2[a,b]$ və istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $g(x) \in A$ funksiyasının varlığıdır ki, $\|f - g\| < \varepsilon$ olsun.

$L_2[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıx olan funlsiyalar sistemini göstərən aşağıdakı mühüm teoremi də qeyd edək.

Teorem 5. Aşağıda göstərilən funksiyalar sistemindən hər biri $L_2[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıxdır:

1) $[a,b]$ parçasında ölçülən və məhdud funksiyalardan ibarət olan $M[a,b]$ çoxluğu,
2) $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalardan ibarət olan $C[a,b]$ çoxluğu,
3) bütün çoxhədlilərdən ibarət olan funksiyalar sinfi,
4) pilləvari funksiyalar sinfi,
5) $[a,b]$ parçası $[-\pi,\pi]$ olduğu halda bütün triqonometrik çoxhədlilər çoxluğu.

Tərif 4. Tutaq ki, $\{f_n(x)\} \in L_2[a,b]$ ardıcıllığı və $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyası verilmişdir. Əgər istənilən $g(x) \in L_2[a,b]$ funksiyası üçün

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

bərabərliyi doğru olarsa, onda deyirlər ki, $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına zəif yığılandır.

Ardıcıllığın orta kvadratik və zəif yığılmaları arasında əlaqəni göstərən aşağıdakı teoremi qeyd edək:

Teorem 6. Əgər $f_n(x) \in L_2[a,b]$ ardıcıllığı $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyasına orta kvadratik mənada yığılandırsa, onda bu ardıcıllıq $f(x)$ funksiyasına eyni zamanda zəif yığılandır.

İsbatı: $g(x) \in L_2[a,b]$ funksiyasını götürək.

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etməklə alarıq:

$$\left\{\int_a^b g(x)[f_n(x) - f(x)]dx\right\}^2 \le \left[\int_a^b g^2(x)dx\right] \cdot \left[\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx\right],$$

Buradan $n \to \infty$ şərtində

$$\left|\int_a^b g(x) f_n(x) dx - \int_a^b g(x) f(x) dx\right| \le \|g\| \cdot \|f_n - f\| \to 0$$

olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

6.7. $L_2[a,b]$ fəzasında ortoqonal sistemlər. Ortonormal sistemə görə Furye sırası. Qapalı və tam sistemlər.

Tərif 1. $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ olarsa, onda bu funksiyalar $[a,b]$ parçasında ortoqonal funksiyalar adlanırlar.

Tərif 2. $[a,b]$ parçasında verilmiş $f(x)$ funksiyası $\int_a^b f^2(x)dx = 1$ şərtini ödəyərsə, ona $[a,b]$ parçasında normallaşmış funksiya deyilir.

Tərif 3. $[a,b]$ parçasında verilmiş $e_1(x), e_2(x), e_3(x), \ldots$ funksiyalar sisteminə daxil olan hər bir funksiya normallaşmış, istənilən iki müxtəlif funksiya isə ortoqonal olarsa, onda bu sistemə ortonormal funksiyalar sistemi deyilir.

Başqa sözlə, əgər $\{e_k(x)\}$ sistemi

$$\int_a^b e_m(x)e_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \text{ olduqda} \\ 0, & m \neq n \text{ olduqda} \end{cases}$$

şərtini ödəyərsə, ona $[a,b]$ parçasında ortonormal funksiyalar sistemi deyilir.

Bu tərifdən alınır ki, $[a,b]$ parçasında hər bir ortonormal sistem $L_2[a,b]$ fəzasına daxildir.

Məsələn, $[-\pi,\pi]$ parçasında verilmiş

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{1}$$

funksiyalar sistemi ortonormal sistemdir.

Tərif 4. Tutaq ki, $\{e_k(x)\}$ hər hansı ortonormal sistem və $f(x) \in L_2[a,b]$ hər hansı funksiyadır.

$$c_k = \int_a^b f(x)e_k(x)dx, \quad k = 1,2,\ldots$$

ədədlərinə $f(x)$ funksiyasının $\{e_k(x)\}$ sisteminə nəzərən Furye əmsalları deyilir. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(x)$ sırasına $f(x)$ funksiyasının $\{e_k(x)\}$ sisteminə görə Furye sırası deyilir. $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k(x)$ Furye sırasının n-ci xüsusi cəmi adlanır.

Aşağıdakı sual ortaya çıxır: Furye sırasının n-ci xüsusi cəmi olan $S_n(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasına nə qədər yaxındır? Başqa sözlə $\|f - S_n\|$ fərqi nə zaman ən kiçik qiymət alar?

Bu suallara cavab vermək üçün $\|f - S_n\|$ fərqini qiymətləndirək.

Əvvəlcə $\int_a^b f(x) S_n(x) dx$ və $\int_a^b S_n^2(x) dx$ inteqrallarını hesablayaq:

$$\int_a^b f(x) S_n(x) dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f(x) \omega_n(x) dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

$$\int_a^b S_n^2(x) dx = \sum_{i,k} c_i \cdot c_k \int_a^b \omega_i(x) \omega_k(x) dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Bunları nəzərə alsaq, alarıq:

$$\|f - S_n\|^2 = \int_a^b \left(f^2(x) - 2f(x) S_n(x) + S_n^2(x)\right) dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Son nəticədə alarıq:

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 . \tag{2}$$

(2) bərabərliyi Bessel bərabərliyi adlanır.

$\|f - S_n\| \geq 0$ olduğundan $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \geq 0$ yaxud $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2$ alarıq. Bərabərsizliyin sağ tərəfi n-dən asılı deyildir. Onda bu bərabərsizlikdə $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 \tag{3}$$

olar. Bu bərabərsizliyə Bessel bərabərsizliyi deyilir. Bu bərabərsizlik göstərir ki, ortonormal sistemə görə Furye sırasının əmsallarının kvadratlarından düzəlmiş sıra həmişə yığılan sıradır.

Əgər xüsusi halda (3) bərabərsizliyində bərabərlik olarsa, yəni

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2 \tag{4}$$

olarsa, ona Parseval bərabərliyi deyilir.

(2) Bessel bərabərliyindən və (4) Parseval bərabərliyindən istifadə etsək

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \| = 0 \tag{5}$$

olduğunu alarıq. Sonuncu (5) bərabərliyi onu göstərir ki, $f(x)$ funksiyasına uyğun düzəldilmiş Furye sırasının $S_n(x)$ xüsusi cəmlər ardıcıllığı orta kvadratik mənada $f(x)$ funksiyasının özünə yığılır.

Tərif 5. Əgər $L_2[a,b]$ fəzasından götürülmüş istənilən $f(x)$ funksiyası üçün Parseval bərabərliyi ödənərsə, onda $\{e_n(x)\}$ ortonormal sistemi qapalı sistem adlanır.

Teorem 1 (V.A.Steklov-K.Severini). Tutaq ki, A $L_2[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıx olan hər hansı funksiyalar sistemidir. Əgər A sinfinə daxil olan hər bir funksiya üçün Parseval bərabərliyi doğrudursa, onda $\{e_k(x)\}$ funksiyalar sistemi qapalıdır.

İsbatı: $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyasını götürək və $S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k(x)$ ilə uyğun Furye sırasının n-ci xüsusi cəmini işarə edək.

Asanlıqla görə bilərik ki, $S_n(f)$ aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $S_n(kf) = k\, S_n(f)$,
2) $S_n(f_1 + f_2) = S_n(f_1) + S_n(f_2)$,
3) $\| S_n(f) \| \le \| f \|$.

1) və 2) xassələri Furye əmsallarının tapılması üsulundan asınlıqla alınır.

3) bərabərsizliyinin doğru olması

$$\| S_n(f) \|^2 = \int_a^b S_n^2(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le \| f \|^2$$

münasibətlərindən alınır.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini və $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyasını götürək. A çoxluğu $L_2[a,b]$-də hər yerdə sıx olduğundan elə $g(x) \in A$ tapmaq olar ki, $\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{3}$ olsun.

Aşağıdakı bərabərsizliyi yaza bilərik

$$\| f - S_n(f) \| \le \| f - g \| + \| g - S_n(g) \| + \| S_n(g) - S_n(f) \|.$$

Sag tərəfdəki üçüncü həddi qiymətləndirək:

$$\|S_n(g)-S_n(f)\| \le \|S_n(g-f)\| \le \|g-f\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$g(x)$ funksiyası üçün qapalılıq doğru olduğundan elə n_0 tapa bilərik ki, $n > n_0$ olduqda $\|g - S_n(g)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olsun. Onda son nəticədə $n > n_0$ üçün

$$\|f - S_n(f)\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \|f - S_n(f)\| < \varepsilon$$

olduğunu alarıq. Bu isə istənilən $f(x) \in L_2[a,b]$ üçün qapalılıq şərtinin doğru olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər qapalılıq düsturu $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ funksiyalarından hər biri üçün doğru olarsa, onda $\{e_n(x)\}$ sistemi qapalı sistem olar.

Doğrudan da ixtiyari $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$ çoxhədlisini götürək. Onda

$$S_n(P) = a_0 S_n(1) + a_1 S_n(x) + ... + a_m S_n(x^m)$$

olduğundan alarıq:

$$\|P - S_n(P)\| \le \sum_{k=0}^{m} |a_k| \left\|x^k - S_n(x^k)\right\|.$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfindəki hədlərdən hər biri şərtə görə $n \to \infty$ şərtində sıfra yaxınlaşır. Onda $\|P - S_n(P)\| \to 0$ olduğunu da alırıq. Bu o deməkdir ki, istənilən çoxhədli üçün qapalılıq şərti doğrudur. Veyerştrassın məlum teoreminə görə bütün çoxhədlilər çoxluğu $L_2[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıx olduğundan teorem 1-ə görə $\{e_n(x)\}$-in $L_2[a,b]$-də qapalı sistem olduğunu alarıq.

Aşağıdakı sual ortaya çıxır. Ümumiyyətlə qapalı sistem varmı?

Nəticə2. $L_2[-\pi,\pi]$ fəzasında $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, ...\right\}$ triqonometrik sistemi qapalı sistemdir.

Bunun üçün qapalılıq şərtinin istənilən

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{6}$$

triqonometrik çoxhədlisi üçün doğru olduğunu göstərmək kifayətdir. Bunu göstərmək üçün (6) bərabərliyinin hər tərəfini $T_n(x)$-ə vurub, $[-\pi,\pi]$ parçasında inteqrallamaq lazımdır.

Bu halda $\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx = a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$ qapalılıq şərtinin ödənməsini alarıq.

Teorem 2 (F.Riss-E.Fişer). Tutaq ki, $\{e_n(x)\}$ $[a,b]$ parçasında ortonormal sistemdir. Əgər $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ ədədləri üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty \tag{7}$$

şərti ödənilərsə, onda elə $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyası vardır ki,

1) $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ ədədləri $f(x)$ funksiyasının $\{e_k(x)\}$ sisteminə görə Furye əmsallarıdır.
2) $f(x)$ funksiyası üçün qapalılıq şərti doğrudur.

İsbatı: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k(x)$ cəmini düzəldək. Əvvəlcə göstərək ki, $S_1(x), S_2(x), ..., S_n(x), ...$ ardıcıllığı fundamental ardıcıllıqdır. $m > n$ hesab edərək $\|S_m - S_n\|$ fərqini hesablayaq:

$$\|S_m - S_n\|^2 = \int_a^b \left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k(x)\right]^2 dx = \sum_{i,k} c_i\, c_k \int_a^b \omega_i(x)\omega_k(x)dx = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 .$$

(7) şərtinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə N elə nömrəsi tapmaq olar ki, $m > n > N$ olduqda $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 < \varepsilon^2$ olar. Nəticədə $\|S_m - S_n\| < \varepsilon$, yəni $\{S_n\}$ ardıcıllığının fundamental olduğunu alırıq.

$L_2[a,b]$ fəzası tam olduğundan elə $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiya vardır ki, $\|S_n - f\| \to 0,\ n \to \infty$.

Göstərək ki, $f(x)$ tələb edilən funksiyadır.

Yuxarıda § 6.5-də isbat edilmiş teorem 6-ya görə $\{S_n\}$ ardıcıllığının eyni zamanda $f(x)$-ə zəif mənada yığılan olduğunu göstərmək olar. Yəni, istənilən $g(x) \in L_2[a,b]$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

Xüsusi halda, bu bərabərlikdə $g(x) = e_i(x)$ qəbul etsək alarıq:

$$\int_a^b f(x)e_i(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)e_i(x)dx .$$

Əgər $n > i$ olarsa, bu halda

$$\int_a^b S_n(x)e_i(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} c_k e_k(x)\right] e_i(x)dx = c_i,$$

buradan $\int_a^b f(x)e_i(x)dx = c_i$ alarıq. Yəni c_i ədədləri $f(x)$ funksiyasının $\{e_i(x)\}$ sisteminə görə Furye əmsallarıdır.

Eləcədə, $S_n(x)$ $f(x)$ funksiyasına uyğun Furye sırasının xüsusi cəmləri olduğundan $\|S_n - f\| \to 0$ şərti $f(x)$ üçün qapalılıq şərtinin ödəndiyini göstərir. Teorem isbat olundu.

Qeyd. Riss-Fişer teoremin şərtlərini ödəyən funksiya yeganədir.

Doğrudan da, əgər teoremin şərtlərini ödəyən iki müxtəlif $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları olarsa, onda birinci şərtə görə bu funksiyalar eyni Furye əmsallarına malik olardı, yəni onlara eyni Furye sırası uyğun olardı. İkinci şərtdən isə $S_n \to f$, $S_n \to g$ olması alınardı. Bu halda isə $f = g$ olduğunu alarıq. Deməli, teoremin şərtini ödəyən funksiya yeganədir.

Tərif 6. Tutaq ki, $\{\varphi_k(x)\}$ $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $L_2[a,b]$-yə daxil olan funksiyalar sistemidir. Əgər $L_2[a,b]$ fəzasında bu sistemin bütün funksiyalarına ortoqonal olan sıfırdan fərqli heç bir funksiya olmazsa, onda bu sistemə tam sistem deyilir.

Qeyd edək ki, bu tərifdə $\{\varphi_k(x)\}$ sisteminin ortoqonal olması şərti qoyulmur.

Yuxarıda isbat edilmiş Riss-Fişer teoreminin birinci şərtini ödəyən funksiyanın yeganə olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ortoqonal $\{e_k(x)\}$ funksiyalar sisteminin tam sistem olmasıdır.

Doğrudan da, əgər bu sistem tam olarsa və $f(x)$, $g(x)$ funksiyaları eyni Furye əmsallarına malik olardısa, onda

$$\int_a^b f(x)e_k(x)dx = \int_a^b g(x)e_k(x)dx, \quad k = 1,2,3,...$$

olardı. Buradan

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]e_k(x)dx = 0, \;\; k = 1,2,3,...$$

bərabərliyinə əsasən $f(x) - g(x)$ funksiyası sistemin bütün funksiyalarına ortoqonal olduğundan eyniliklə sıfra bərabər olardı, yəni $f(x) - g(x) = 0$, $f(x) = g(x)$.

Əksinə, əgər $\{e_k(x)\}$ sistemi tam olmazsa və $h(x)$ sıfırdan fərqli, sistemin bütün funksiyalarına ortoqonal olan funksiya olarsa, onda bu funksiya üzərinə teoremin birinci şərtini ödəyən hər hansı funksiya əlavə etsək, yenə də həmin şərti ödəyən $f(x)$-dan fərqli funksiya alardıq.

Aşağıda qeyd olunan teorem ortonormal sistemlər üçün qapalı və tam sistem anlayışlarının eyni olduğunu göstərir.

Teorem 3. Ortonormal $\{e_k(x)\}$ funksiyalar sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt onun qapalı olmasıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $\{e_k(x)\}$ sistemi qapalıdır. Əgər hər hansı $f(x) \in L_2[a,b]$ funksiyası sistemin bütün funksiyalarına ortoqonal olarsa, onda alarıq ki, $f(x)$ -in bütün Furye əmsalları sıfra bərabərdir.

Bu halda qapalılıq şərtinə görə $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,\ \|f\| = 0,\ f(x) = 0$ alarıq. Bu isə sistemin tam olması deməkdir.

Əksini fərz edək ki, $\{e_k(x)\}$ sistemi tamdır.

Tutaq ki, hər hansı $g(x) \in L_2[a,b]$ funksiyası üçün qapalılıq şərti ödənmir. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|g\|^2$ olar.

Burada $c_k = \int_a^b g(x) e_k(x) dx \quad g(x)$ funksiaysının Furye əmsallarıdır. Riss-Fişer teoreminə görə elə $f(x)$ funksiyası tapmaq olar ki,

$$c_k = \int_a^b f(x) e_k(x) dx,\ \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

şərtləri ödənilir.

Bu halda alırıq ki,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] e_k(x) dx = 0,\ \ k = 1,2,3,...$$

yəni, $f(x) - g(x)$ funksiyası sistemin bütün funksiyalarına ortoqonaldır. Sistem tam olduğu üçün $f(x) - g(x) = 0,\ f(x) = g(x)$ olmalıdır. Bu isə $\|f\| < \|g\|$ şərtinə ziddir. Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər $-\pi \le x \le \pi$ isə, onda triqonometrik funksiyalar sistemi tam sistemdir.

6.8. $L_p[a,b]$, $p \geq 1$ fəzası.

Tərif 1. $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş ölçülən $f(x)$ funksiyası

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty, \quad p \geq 1 \tag{1}$$

şərtini ödəyərsə, ona p dərəcədən cəmlənən funksiya deyilir. $[a,b]$ parçasında p dərəcədən cəmlənən bütün funksiyalar çoxluğu $L_p[a,b]$ kimi işarə edilir. Xüsusi halda $p=1$ olduqda $L_1[a,b]$ fəzasını alırıq.

Teorem 1. $p>1$ dərəcədən cəmlənən funksiya cəmlənəndir, yəni $L_p[a,b] \subset L_1[a,b]$.

İsbatı: $E=[a,b]$, $A=E(|f|<1)$, $B=E|A$ işarə edək. A çoxluğunda $f(x)$ ölçülən və məhdud olduğundan onun cəmlənən olması aydındır. B-çoxluğunda isə $|f(x)| \leq |f(x)|^p$ olduğundan (1) şərtindən $f(x)$-in cəmlənən olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. $L_p[a,b]$ fəzasına daxil olan funksiyaların cəmi də bu sinifə daxildir.

İsbatı: Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $L_p[a,b]$-yə daxil olan funksiyalardır.

$E=[a,b]$, $A=E(|f|<|g|)$, $B=E|A$ işarə edək. $x \in A$ nöqtələri üçün

$$|f(x)+g(x)|^p \leq \{|f(x)|+|g(x)|\}^p \leq 2|g(x)|^p,$$

buradan

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p dx \leq 2^p \int_A |g(x)|^p dx < +\infty.$$

Eyni qayda ilə $\int_B |f(x)+g(x)|^p dx < \infty$ olduğunu da göstərmək olar. Nəticədə $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx < \infty.$

Eləcədə $f(x) \in L_p[a,b]$ olduqda istənilən k sabiti üçün $k \cdot f(x) \in L_p[a,b]$ olduğunu almaq olar. Teorem isbat olundu.

Tutaq ki, $p > 1$. $q = \dfrac{p}{p-1}$ ədədinə p ilə qoşma olan dərəcə deyilir. Göründüyü kimi p və q arasında $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q} = 1$ münasibəti vardır. p və q qarşılıqlı qoşma dərəcələr adlanırlar. $p = 2$ olduqda $q = 2$ olur. Bu dərəcələr öz-özünə qoşma dərəcələrdir (Öz-özünə qoşma dərəcəli funksiyaların daxil olduğu $L_2[a,b]$ fəzası digər $L_p[a,b]$ fəzalarının malik olmadığı bir çox xassələrə malikdirlər).

Teorem 3. Əgər $f(x) \in L_p[a,b]$, $g(x) \in L_q[a,b]$isə, belə ki, p və q qarşılıqlı qoşma ədədlərdir, bu halda $f(x) \cdot g(x)$ hasili cəmlənən funksiyadır və aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

İsbatı: Tutaq ki, $0 < \alpha < 1$. $\psi(x) = x^\alpha - \alpha x$ $(0 < x < \infty)$ funksiyasına baxaq. $\psi'(x) = \alpha\left[x^{\alpha-1} - 1\right]$ funksiyası $0 < x < 1$ olduqda müsbət, $x > 1$ olduqda isə mənfi qiymətlər alır. Onda funksiya ən böyük qiymətini $x = 1$ nöqtəsində alır. Ona görə də $\psi(x) \le \psi(1) = 1 - \alpha$.

Buradan alırıq ki, $x > 0$ olduqda

$$x^\alpha \le \alpha x + (1 - \alpha). \tag{3}$$

Tutaq ki, A və B müsbət ədədlərdir. Əgər (3) bərabərsizliyində $x = \dfrac{A}{B}$ qəbul etsək və alınmış bərabərsizliyi B-yə vursaq, nəticədə alarıq:

$$A^\alpha \cdot B^{1-\alpha} \le \alpha A + (1-\alpha)B$$

Tutaq ki, p və q teoremin şərtində qeyd olunmuş qarşılıqlı qoşma dərəcələrdir. Əgər $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $1 - \alpha = \dfrac{1}{q}$ qəbul etsək, onda

$$A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}} = \frac{A}{p} + \frac{B}{q} \tag{4}$$

alarıq.

$\int_a^b |f(x)|^p dx$ və $\int_a^b |g(x)|^q dx$ inteqrallarından hər biri müsbər olduğundan

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}},\ \gamma(x)=\frac{g(x)}{\sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}},$$

funksiyalarını təyin edə bilərik.

Əgər (4) bərabərsizliyində $A=|\varphi(x)|^p$, $B=|\gamma(x)|^q$ yazsaq, onda alarıq:

$$|\varphi(x)\cdot\gamma(x)|\le\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\gamma(x)|^q}{q} \tag{5}$$

Bu bərabərsizlikdən $\varphi(x)\cdot\gamma(x)$ hasilinin, eləcədə $f(x)\cdot g(x)$ hasilinin cəmlənən olduğunu alırıq.

Bundan əlavə

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p dx=\int_a^b |\gamma(x)|^q dx$$

olduğunu nəzərə alsaq və (5) bərabərsizliyini inteqrallasaq, nəticədə

$$\int_a^b |\varphi(x)\cdot\gamma(x)|dx\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

alırıq. Buradan

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx\le\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Alınmış bu son bərabərsizlik Hölder bərabərsizliyi adlanır. Bu bərabərsizlik $p=2$ olduqda Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə çevrilir.

Teorem 4. Əgər $f(x),\ g(x)\in L_p[a,b]$ $(p\ge 1)$ isə, onda

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

İsbatı: $p=1$ olduqda teoremin doğruluğu aydındır.

Tutaq ki, $p>1$ və q onunla qoşma olan ədəddir. Teorem 2-yə əsasən $[f(x)+g(x)]\in L_p[a,b]$. Buradan $|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\in L_q[a,b]$ olması alınır. Onda teorem 3-ü tətbiq etməklə alarıq:

$$\int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\,dx\le\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx}. \tag{7}$$

Analoji üsulla

$$\int_a^b |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\ dx \le \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx} \qquad (8)$$

olduğunu da ala bilərik.

Əgər $p = 1 + \frac{p}{q}$ olduğunu nəzərə alsaq aşağıdakı bərabərsizliyin doğru olduğunu alarıq:

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}} \le$$

$$\le |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}} + |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}$$

Bu bərabərsizlikdən və (7), (8) münasibətlərindən alarıq:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\ dx \le \left\{\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^p dx}\right\}\times$$

$$\times\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\ dx}$$

Bərabərsizliyin hər tərəfini $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{q}}$-yə bölsək (6) bərabərsizliyini alarıq. Teorem isbat olundu.

(6) Minkovski bərabərsizliyi adlanır. $p = 2$ olduqda məlum Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini alırıq.

Tərif 2. Tutaq ki, $f(x) \in L_p[a,b]$.

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ədədinə $f(x)$ funksiyasının norması deyilir.

Asanlıqla görmək olar ki, bu qayda ilə təyin edilən normanın bütün şərtlərini ödəyir.

I. $\|f\| \ge 0$, $\|f\| = 0$ halı yalnız və yalnız $f(x) \sim 0$ olduqda mümkündür.

II. İstənilən c sabiti üçün $\|cf\| = |c|\cdot\|f\|$.

III. İstənilən $f(x)$ və $g(x)$ üçün $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

$L_p[a,b]$ ($p \ge 1$) çoxluğunda bu şərtləri ödəyən normanın olması həmin çoxluqda funksiyalar arasında məsafənin norma vasitəsilə tapılmasına imkan verir.

$$\rho(f,g)=\|f-g\|=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

kəmiyyətinə $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları arasında məsafə deyilir. Məsafənin varlığı bu çoxluqda ardıcıllığın limiti anlayışını da daxil etməyə imkan verir.

Tərif 3. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}\in L_p[a,b]$, $f(x)\in L_p[a,b]$. Əgər $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p dx=0$ şərti ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$-ə p dərəcədən orta mənada yığılır.

$L_2[a,b]$ fəzasında olduğu kimi, göstərmək olar ki, hər hansı ardıcıllığın p dərəcədən orta mənada yığılmasından bu ardıcıllığın ölçüyə görə (eyni limitə) yığılması da alınır. Eləcədə p dərəcədən orta mənada yığılma zamanı limitin yeganəliyi və normanın kəsilməzliyi xassələri də doğru olur. $L_2[a,b]$ fəzasında olduğu kimi $L_p[a,b]$ fəzasında da ardıcıllığın fundamentallığı anlayışı vermək olar. İsbat etmək olur ki, ardıcıllığın p dərəcədən orta mənada yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt bu ardıcıllığın fundamental olmasıdır.

Eləcədə, ölçülən və məhdud funksiyalardan ibarət olan $M[a,b]$, kəsilməz funksiyalardan ibarət $C[a,b]$, bütün çoxhədlilərdən ibarət olan P, pilləvari funksiyalardan ibarət olan S çoxluğu və nəhayət $b-a=2\pi$ olduqda bütün triqonometrik çoxhədlilər çoxluğu $L_p[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıx alt çoxluqlardır.

Tərif 4. Tutaq ki, $\{f_n(x)\}\subset L_p[a,b]$, $f(x)\in L_p[a,b]$ $p>1$ verilmişdir. Əgər istənilən $g(x)\in L_q[a,b]$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ funksiyası üçün

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{9}$$

şərti ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$-ə zəif mənada yığılandır.

Hölder bərabərsizliyindən istifadə etməklə p dərəcədən orta mənada yığılan funksiyalar ardıcıllığının zəif mənada yığılan olmasını da göstərə bilərik.

$p=1$ olduğu halda qoşma dərəcə olmadığı üçün bu halda zəif yığılma dedikdə (9) bərabərliyinin istənilən ölçülən məhdud $g(x)$ funksiyası üçün ödənməsi şərti tələb edilir. Bu halda da birinci dərəcə orta yığılmadan zəif mənada yığılma alınır.

6.9. $L_p[a,b]$ Lebeq fəzalarına aid məsələ həlli nümunələri və çalışmalar.

1. İsbat edin ki, $L_p[a,b]$ xətti fəzadır.

İsbatı: Məlum oluğu kimi $L_p[a,b]$ $p \geq 1$ fəzası $[a,b]$parçasında ölçülən, sanki hər yerdə sonlu olan və $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$ şərtini ödəyən funksiyalardan ibarət çoxluqdur.

Əvvəlcə göstərək ki, əgər $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty,$ $\int_a^b |g(x)|^p dx < \infty$ şərti ödənirsə, yəni $f(x), g(x) \in L_p[a,b]$ isə, onda $[f(x) + g(x)] \in L_p[a,b]$. Bunun üçün $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx < \infty$ olduğunu göstərmək lazımdır.

Əgər $x \in [a,b]$ nöqtəsində $|f(x)| \leq |g(x)|$ olarsa, onda $|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2|g(x)|^p \leq 2^p(|g(x)|^p + |f(x)|^p)$. Əgər $|g(x)| \leq |f(x)|$ olarsa, yenə də

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2|f(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Beləliklə bütün $x \in [a,b]$ üçün

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Buradan $(f(x) + g(x)) \in L_p(a,b)$ alırıq.

Toplama əməlinin kommutativlik, assosativlik xassələrinin ödənməsi aydındır. Çoxluğun sıfır elementi $[a,b]$ parçasında sıfır funksiyaya ekvivalent olan funksiyadır. Hər bir $f(x)$ elementinin əksi olan $-f(x)$ elementidə vardır.

İstənilən α ədədi üçün

$$\int_a^b |\alpha f(x)|^p dx = |\alpha|^p \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

münasibətindən $\alpha f(x) \in L_p[a,b]$ olması alınır və ədədə vurmanın bütün xassələri ödənir. Deməli $L_p[a,b]$ xətti fəzadır.

2. Göstərin ki, $y=\left(x\ln^2\frac{1}{x}\right)^{-1}$ funksiyası $L_1\left[0;\frac{1}{2}\right]$ fəzasına daxildir, amma $p>1$ olduqda heç bir $L_p\left[0,\frac{1}{2}\right]$ fəzasına daxil deyildir.

Əvvəlcə verilmiş funksiyaya $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ yarımintervalında baxaq. Bu yarımintervalda funksiya kəsilməzdir və sonludur. Onda baxılan funksiya $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ parçasında ölçüləndir və sanki hər yerdə sonludur. Göstərək ki, funksiya $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanandır. Bunun üçün verilmiş funksiyanın qeyri-məxsusi

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2\frac{1}{x}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$$

inteqralının yığılan olduğunu göstərmək lazımdır.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2\frac{1}{x}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Buradan $f(x)\in L_1\left[0,\frac{1}{2}\right]$ olduğunu alırıq.

İndi isə funksiyanın $p>1$ olduqda heç bir $L_p\left[0;\frac{1}{2}\right]$ fəzasına daxil olmadığını göstərək.

Bunun üçün $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^p\ln^{2p}x}$ qeyri-məxsusi inteqralının bütün $p>1$ üçün dağılan olduğunu göstərmək lazımdır.

Bu məqsədlə elə $\varepsilon>0$ seçək ki, $p-\varepsilon>1$ olsun. Lopital qaydasını tətbiq etməklə görərik ki, $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln^{2p}x=0$. Ona görə də kifayət qədər kiçik $x\in(0,\delta)$ qiymətlərində

$$\frac{1}{x^p \ln^{2p} x} = \frac{x^{-\varepsilon} \ln^{-2p} x}{x^{p-\varepsilon}} > \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$$

doğrudur.

$\int_0^{\delta} \frac{dx}{x^{p-\varepsilon}}$ inteqralı dağılan olduğundan $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{2p} \ln^{2p} x}$ inteqralının da dağılan olduğunu alırıq.

Nəticədə alırıq ki, $\left(x \ln^2 \frac{1}{x}\right)^{-1} \notin L_p\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $p > 1$.

3. α, β parametrlərinin hansı qiymətlərində $f(x) = \frac{|arctg\, x|^{\beta}}{\left(1+x^2\right)^{\alpha}}$, $x \in R$ funksiyası $L_p(R)$, $p \le 1$ fəzasına daxil olar?

Həlli: Baxılan funksiya ölçülən və sonlu funksiyadır. Funksiyanın α, β-nın hansı qiymətlərində $L_p(R)$-ə daxil olduğunu göstərmək üçün qeyri-məxsusi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|arctg\, x|^{\beta p}}{\left(1+x^2\right)^{\alpha p}} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{(arctg\, x)^{\beta p}}{\left(1+x^2\right)^{\alpha p}} dx$$

inteqralının yığılan olduğunu göstərmək lazımdır.

Göründüyü kimi $x=0$ və $x=\infty$ nöqtələrində məxsusiyyət vardır. $x \to 0$ olduqda $\beta < 0$ şərtində $\frac{(arctg\, x)^{\beta p}}{\left(1+x^2\right)^{\alpha p}} \sim x^{\beta p} = \frac{1}{x^{-\beta p}}$ olduğundan baxılan inteqral $x=0$ nöqtəsi ətrafında yalnız $\beta > -\frac{1}{p}$ şərtində yığılandır. $\beta \ge 1$ olduqda $x=0$ nöqtəsi ətrafında inteqralaltı funksiya kəsilməz olduğundan inteqral yenə də yığılandır. Deməli $\beta > -\frac{1}{p}$ qiymətlərində istənilən α üçün inteqral $x=0$ ətrafında yığılan olar.

$x \to \infty$ olduqda

$$\frac{(arctg\, x)^{\beta p}}{\left(1+x^2\right)^{\alpha p}} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta p} \cdot \frac{1}{x^{2\alpha p}}$$

olduğundan baxılan qeyri məxsusi inteqral $x=\infty$ nöqtəsi ətrafında $\alpha > \frac{1}{2p}$ olduqda yığılır.

Onda alırıq ki, baxılan funksiya yalnız $\alpha > \frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{p}$ qiymətlərində $L_p(R)$ fəzasına daxildir.

4. İsbat edin ki, $r > p \geq 1$ olduqda $L_r(a,b) \subset L_p(a,b)$. Eyni zamanda göstərin ki, $f_n(x)$ ardıcıllığı $L_r(a,b)$ fəzasında $f(x)$-ə yığılırsa, onda $L_p(a,b)$ fəzasında da $f(x)$-ə yığılır.

İsbatı: Tutaq ki, $f(x) \in L_r(a,b)$. Onda $|f(x)|^p$ funksiyası $L_{r/p}(a,b)$ fəzasına daxildir, çünki

$$\int_a^b \left(|f(x)|^p\right)^{2/p} dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx .$$

$[a,b]$ sonlu parça olduğundan istənilən $q \geq 1$ üçün $g(x)=1$ funksiyası $L_q(a,b)$-yə daxildir. q ədədini $\frac{r}{p}$-yə qoşma olan ədəd götürək, yəni $\frac{1}{q} + \frac{p}{r} = 1$, yəni $q = \frac{r}{r-p}$.

Əgər $|f(x)|^p$ və $g(x)$ funksiyalarına Hölder bərabərsizliyini tətbiq etsək alarıq:

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{p/r} \cdot (b-a)$$

Buradan $f(x) \in L_p(a,b)$ olduğunu alırıq.

Bu bərabərsizlikdən

$$\|f(x)\|_{L_p(a,b)} \leq (b-a)^{\frac{r-p}{pr}} \cdot \|f(x)\|_{L_q(a,b)} .$$

Əgər $f_n(x) \to f(x)$ olarsa,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L_r[a,b]} = 0$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L_p(a,b)} \leq (b-a)^{\frac{r-p}{pr}} \cdot \|f_n(x) - f(x)\|_{L_r(a,b)}$$

bərabərsizliyindən $\lim_{n\to\infty}\left\| f_n(x)-f(x)\right\|_{L_p[a,b]}=0$ olması alınar.

5. İsbat edin ki, əgər $f(x)\in L_p(a,b)\cap L_r(a,b),\quad 0\le p<r$ isə, onda istənilən $s\in(p,r)$ üçün $f(x)\in L_s(a,b)$.

İsbatı: $f(x)$ $[a,b]$ parçasında ölçülən olduğundan $A=\{x\in[a,b];\ |f(x)|\le 1\}$ və $A=\{x\in[a,b];\ |f(x)|>1\},\quad A\cap B=\varnothing$ çoxluqları da ölçüləndirlər.

Göstərək ki, $p<s<r$ olduqda $f(x)\in L_s(A)$ və $f(x)\in L_s(B)$.

Doğrudan da A və B çoxluqlarında aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur.

$$|f(x)|^s\le|f(x)|^p,\quad x\in A \text{ üçün} \qquad (*)$$

$$|f(x)|^s\le|f(x)|^r,\quad x\in B \text{ üçün.} \qquad (**)$$

(*) bərabərsizliyindən və $f(x)\in L_p(a,b)$ olmasından $f(x)\in L_p(A)$ olması alındığından $f(x)\in L_s(A)$ olduğunu alırıq. Eləcədə (**) bərabərsizliyindən $f(x)\in L_s(B)$ olduğunu alırıq.

$$\int_a^b|f(x)|^s dx=\int_A|f(x)|^s dx+\int_B|f(x)|^s dx$$

bərabərsizliyindən $f(x)\in L_s(a,b)$ olmasını alırıq.

6. α və β parametrlərinin hansı qiymətlərində $f(x)\in L_p\quad p\ge 1$ olar?

a) $f(x)=\dfrac{|x|^\alpha}{\left(1+x^2\right)^\beta}$; b) $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+|x|^\alpha\right)}{\left(1+|x|^4\right)^\beta}$;

v) $f(x)=|1-x|^\alpha\cdot|1+x|^\beta$;

q) $f(x)=\dfrac{|1-x|^\beta\ln(1+|x|)}{|x|^\alpha\left(1+x^4\right)}$.

7. Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0 \quad \text{olduqda,}\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1 \quad \text{olduqda.}\end{cases}$$

funksiyası $[0,1]$ parçasında diferensiallanandır, amma onun törəməsi bu parçada Lebeq mənada inteqrallanan deyildir.

Həlli: Əgər $x \neq 0$ olarsa, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$. $x = 0$ olduqda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{(\Delta x)^2} = 0 .$$

Beləliklə verilən funksiyanın $[0,1]$ parçasında diferensiallanandır.

Göstərək ki, $f'(x)$ törəməsi $[0,1]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanan deyil. Bu məqsədlə

$$\int_0^1 \left(2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \right) dx$$

inteqralının mütləq yığılmasını araşdıraq:

Əvvəlcə $\int_0^1 2x\sin\frac{1}{x^2}\,dx$ inteqralına baxaq. İnteqralaltı funksiya $[0,1]$ parçasında kəsilməz olduğundan bu inteqral həm Riman, həm də Lebeq mənada vardır.

Göstərək ki, $\int_0^1 \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| dx$ inteqralı dağılandır. Bu məqsədlə, inteqralda $\frac{1}{x^2} = t$ əvəzləməsi aparaq.

Onda $\int_0^1 \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| dx = \int_1^\infty \frac{|\cos t|}{t}\,dt.$ Sonuncu inteqral dağılandır. Ona görə də $f'(x)$ funksiyası Lebeq mənada inteqrallanan deyildir.

8. α və β hansı qiymətlərində $\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}\,dx$ inteqralı yağılandır?

Həlli: İnteqralda $x^\alpha = t$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{\beta-1}{\alpha}+1}}\,dt .$$

$\frac{\beta-1}{\alpha} + 1 > 1$, yəni $\beta < 1$ olduqda inteqral mütləq yığılır.

Əgər $\frac{\beta-1}{\alpha} + 1 > 0,\ \beta + \alpha - 1 < 0$ olarsa, onda inteqral şərti yığılan inteqraldır.

VII FƏSİL
MƏHDUD VARİASİYALI FUNKSİYALAR

7.1. Monoton funksiyalar. Monoton funksiyaların kəsilmə nöqtələri haqqında teorem. Sıçrayış və Kantor funksiyaları.

Fərz edək ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş funksiyadır.

Tərif. Əgər istənilən $x, y \in [a,b]$ üçün $x < y$ şərtindən $f(x) \le f(y)$ münasibəti alınarsa, onda $f(x)$ artan funksiya adlanır. Əgər $x < y$ şərtindən $f(x) < f(y)$ alınarsa, onda $f(x)$ ciddi artan funksiya adlanır. Analoji olaraq əgər $x < y$ şərtindən $f(x) \ge f(y)\ (f(x) > f(y))$ alınarsa, bu halda $f(x)$ azalan (ciddi azalan) funksiya adlanır. Artan və azalan funksiyalar monoton (ciddi monoton) funksiyalar adlanır. Aydındır ki, əgər $f(x)$ artan isə, onda $-f(x)$ azalan funksiyadır. Ona görə də yalnız artan funksiyalara baxmaq kifayətdir.

Baxdığımız bütün monoton funksiyaların sonlu qiymətlər alan funksiyalar olduğunu fərz edəcəyik.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş artan funksiyadır və $a \le x_0 < b$.

Məlumdur ki, x_0 nöqtəsindən sağda yerləşən və x_0 nöqtəsinə yığılan hər hansı bir $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ardıcıllığı götürsək, $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$ bu halda sonlu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ vardır. Bu limit $\inf\{f(x)\}$ $(x_0 \le x < b)$ kəmiyyətinə bərabərdir və $\{x_n\}$ ardıcıllığının seçilməsindən asılı deyildir. Bunu $f(x_0+0)$ simvolu ilə işarə edirlər.

Eyni qayda ilə $f(x_0-0)$ $a < x_0 \le b$ simvolunu da təyin edə bilərik.

Göründüyü kimi

$$f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0), \quad (a < x_0 < b),$$
$$f(a) \le f(a+0), \quad f(b-0) \le f(b).$$

Buradan alınır ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$ olmasıdır. Əgər x_0 nöqtəsi a və ya b ilə üst-üstə düşərsə bu halda yalnız $f(a+0)$ yaxud $f(b-0)$ birtərəfli limitlərindən danışmaq olar.

$f(x_0) - f(x_0-0)$; $f(x_0+0) - f(x_0)$ ədədləri $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində uyğun olaraq soldan yaxud sağdan sıçrayışları adlanır. Bu sıçrayışların cəmi olan $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ kəmiyyətinə $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsindəki sıçrayışı deyilir (a və b nöqtələrində yalnız birtərəfli sıçrayışdan danışmaq olar).

Lemma. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında artan funksiyadır. Əgər $x_1, x_2, ..., x_n$ $[a,b]$ parçası daxilində yerləşən istənilən nöqtələr isə, onda

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(b)-f(b-0)]\le f(b)-f(a) \qquad (1)$$

doğrudur.

İsbatı: Fərz edək ki, $a<x_1<x_2<...<x_n<b$. $a=x_0$, $b=x_{n+1}$ qəbul edək. İstənilən $k=0,1,2,...,n$ üçün $x_k<y_k<x_{k+1}$ şərtini ödəyən $y_0, y_1, ..., y_n$ ədədlərini götürək.

Onda aşağıdakı bərabərsizlikləri yaza bilərik:

$$f(x_k+0)-f(x_k-0)\le f(y_k)-f(y_{k-1}),\ (k=1,2,...,n)$$
$$f(a+0)-f(a)\le f(y_1)-f(a),$$
$$f(b)-f(b-0)\le f(b)-f(y_n).$$

Bütün bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplasaq (1) münasibətini alarıq. Lemma isbat olundu.

Bu lemmadan aşağıdakı mühüm nəticə alınır:

Nəticə: $[a,b]$ parçasında verilmiş artan $f(x)$ funksiyasının sıçrayışı verilmiş $\sigma>0$ ədədindən böyük olan sonlu sayda kəsilmə nöqtələri ola bilər.

Doğrudan da, əgər $x_1, x_2, ..., x_n$ nöqtələri $[a,b]$ parçası daxilində yerləşən, hər birində sıçrayışı $\sigma>0$ ədədindən böyük olan kəsilmə nöqtələri isə, onda (1) münasibətinə görə alınır ki, $n\sigma\le f(b)-f(a)$ olmalıdır. Bu bərabəsizlikdən görünür ki, n ədədi istənilən qədər böyük ola bilməz, sonlu ədəd olmalıdır.

İndi isə monoton funksiyanın kəsilmə nöqtələrinin sayı haqqında aşağıdakı mühüm teoremi qeyd edək.

Teorem 1. $[a,b]$ parçasında verilmiş monoton artan $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri ən çoxu hesabi sayda ola bilər. Əgər $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ $[a,b]$ daxilində yerləşən kəsilmə nöqtələri olarsa, onda aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(b)-f(b-0)]\le f(b)-f(a). \qquad (2)$$

İsbatı: D ilə $f(x)$ funksiyasının bütün kəsilmə nöqtələri çoxluğunu, D_k ilə sıçrayışı $\frac{1}{k}$-dan böyük olan kəsilmə nöqtələri çoxluğunu işarə edək.

Aydındır ki, $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_n \cup ...$.

D_k çoxluqlarından hər biri sonlu olduğundan D çoxluğu ən çoxu hesabi olar.

(1) bərabərsizliyində sağ tərəf k-dan asılı olmadığı üçün $k \to \infty$ şərtində limitə keçmək olar. Nəticədə (2) bərabərsizliyini alarıq. Teorem isbat olundu.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında artan funksiyadır. Aşağıdakı kimi $S(x)$ funksiyası daxil edək. $S(a)=0$,

$$S(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(x)-f(x-0)], \quad f(a<x\leq b).$$

$S(x)$ funksiyasına $f(x)$-in sıçrayış funksiyası deyilir.

Göründüyü kimi $S(x)$ funksiyası da artan funksiyadır.

Teorem 2. $\varphi(x)=f(x)-S(x)$ bərabərliyi ilə təyin edilən $\varphi(x)$ funksiyası artan və kəsilməz funksiyadır.

İsbatı: Tutaq ki, $a \leq x < y \leq b$. Əgər (2) bərabərsizliyini $[x,y]$ parçasına tətbiq etsək

$$S(y)-S(x)\leq f(y)-f(x) \tag{3}$$

bərabərsizliyini alarıq. Buradan $S(x)\leq S(y)$, yəni $S(x)$ artan funksiyadır.

Əgər (3) bərabərsizliyində $y \to x$ olarsa, onda

$$S(x+0)-S(x)\leq f(x+0)-f(x) \tag{4}$$

olduğunu alırıq.

Digər tərəfdən $S(x)$ funksiyasının təyin olunmasından görünür ki, $x<y$ olduqda $f(x+0)-f(x)\leq S(y)-S(x)$ doğrudur. Burada da $y \to x$ şərtində limitə keçsək,

$$f(x+0)-f(x)\leq S(x+0)-S(x) \tag{5}$$

olduğunu alarıq. (4) və (5) bərabərsizliklərindən $f(x+0)-f(x)=S(x+0)-S(x)$.

Buradan $\varphi(x+0)=\varphi(x)$ olduğunu alırıq.

Eyni qayda ilə $\varphi(x-0)=\varphi(x)$ bərabərliyini də ala bilərik.

Buradan $\varphi(x-0)=\varphi(x)=\varphi(x+0)$ alınır. Yəni $\varphi(x)$ kəsilməz funksiyadır. Teorem isbat olundu.

Kantor funksiyası. Məlum olduğu kimi $f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsi $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan funksiyası olarsa, bu halda $f(x)$ funksiyasını

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f(t)dt, \quad x\in[a,b]$$

bərabərliyi ilə bərpa etmək olar. Lakin misallar qurmaq mümkündür ki, funksiyanın $f'(x)$ törəməsi Lebeq mənada inteqrallanan olmasına baxmayaraq funksiyanın özünü bu törəmə vasitəsilə bərpa etmək mümkün deyildir.

Belə misallardan biri Kantor funksiyasıdır. Məlum olduğu kimi Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğu $[0,1]$ parçasından ardıcıl olaraq I addımda $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalının, II addımda $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallarının, III addımda $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$ intervallarının və s. nəticəsində alınan çoxluqdur.

$\theta(x)$ Kantor funksiyası aşağıdakı kimi qurulur:

1) $\theta(x)=\frac{1}{2}, \ x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ olduqda,

$$2)\ \theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{əgər } x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\\ \frac{3}{4}, & \text{əgər } x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\end{cases}$$

$$3)\ \theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & \text{əgər } x\in\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right),\\ \frac{3}{8}, & \text{əgər } x\in\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right),\\ \frac{5}{8}, & \text{əgər } x\in\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right),\\ \frac{7}{8}, & \text{əgər } x\in\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)\end{cases}$$

və s.

n-ci atılan və uzunlluqları $\frac{1}{3^n}$ olan 2^{n-1} sayda intervallarda $\theta(x)$ funksiyasının qiymətləri uyğun olaraq $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, ..., \frac{2^n-1}{2^n}$ kimi təyin edilir.

Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə bütün atılan intervallarda $\theta(x)$ funksiyasını təyin edirik.

Göründüyü kimi $\theta(x)$ atılan intervallardan ibarət $G_0 = [0,1] \big| P_0$ çoxluğunda hissə-hissə sabit funksiyadır. $\theta(x)$ funksiyasının P_0 çoxluğunda aşağıdakı kimi təyin edirik: $\theta(0) = 0, \theta(1) = 1$ və $x_0 \in P_0$ olduqda $\theta(x_0) = \sup \theta(x), \ (x \in G, \ x < x_0)$.

Onda $\theta(x)$ funksiyası bütün $[0,1]$ parçasında təyin edilmiş artan funksiya olur.

$\theta(x)$ funksiyasının G_0 çoxluğunda aldığı qiymətlər çoxluğu $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, ..., \frac{2^n-1}{2^n}, ...$ $[0,1]$ parçasında hər yerdə sıx çoxluq olur.

$\theta(x)$ $[0,1]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. Doğrudan da, artan $\theta(x)$ funksiyası hər hansı bir x_0 nöqtəsində kəsilən olarsa, onda onun aldığı qiymətlər $(f(x_0 - 0), f(x_0))$ və ya $(f(x_0 + 0), f(x_0))$ intervallarından birinə düşməz. Bu isə $\theta(x)$ funksiyası üçün ola bilməz.

Beləliklə, $\theta(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında kəsilməz, artan funksiyadır və $mP_0 = 0$ olduğundan sanki bütün nöqtələrdə $\theta'(x) = 0$.

Bu halda $0 = \int_0^1 \theta'(x)dx < \theta(1) - \theta(0) = 1.$

Bu isə onu göstərir ki, $\theta(x)$ funksiyası $\theta'(x)$ törəməsi vasitəsilə bərpa edilə bilməz.

7.2. Məhdud variasiyalı funksiyalar və onların əsas xassələri.

Bu yarımfəsildə monoton funksiyalarla sıx əlaqəsi olan yeni bir funksiyalar sinfi ilə, məhdud variasiyalı funksiyalar adlanan funksiyalarla tanış olacağıq.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş sonlu qiymətli funksiyadır. $[a,b]$ parçasını $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nöqtələri vasitəsi ilə hissələrə bölək və

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$$

cəmini düzəldək.

Aydındır ki, $[a,b]$ parçasının hər bir bölgüsünə bu şəkildə bir cəm uyğundur.

Tərif 1. $[a,b]$ parçasının bütün bölgülərinə uyğun düzəldilmiş $\{V\}$ cəmlər çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddinə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında tam variasiyası deyilir və $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ kimi işarə edilir.

Əgər $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyasına sonlu dəyişməyə malik, yaxud məhdud variasiyalı funksiya deyilir.

Məhdud variasiyalı funksiyalar haqqında aşağıda göstərilən mühüm teoremləri qeyd edək.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında monoton funksiya isə, onda $f(x)$ məhdud variasiyalı funksiyadır.

İsbatı: Tutaq ki, $f(x)$ monoton artan funksiyadır. Onda istənilən $k = 0,1,...,n-1$ üçün $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ mənfi olmayan ədədlərdir və

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \{ f(x_{k+1}) - f(x_k) \} = f(b) - f(a).$$

Buradan $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(b) - f(a)$ olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Tərif 2. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş sonlu funksiyadır. Əgər istənilən $x, y \in [a,b]$ üçün $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ (K-sabitdir) şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası Lipşits şərtini ödəyir.

Əgər $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasının hər bir nöqtəsində məhdud törəməsi varsa, onda Laqranj düsturuna görə $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, $(x < \xi < y)$ və $|f'(\xi)| \leq K$ olduğundan $f(x)$-in Lipşits şərtini ödəməsini alırıq.

Əgər funksiya Lipşits şərtini ödəyərsə, onda $|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le K(x_{k+1}-x_k)$ olduğundan $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le K(b-a)$ alarıq. Bu isə $f(x)$ funksiyasının məhdud variasiyalı olmasını göstərir.

Qeyd edək ki, istənilən kəsilməz funksiya məhdud variasiyalı deyildir. Məsələn, $f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x}$, $0<x<1$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya kəsilməz olmasına baxmayaraq onun tam variasiyası sonsuzluğa bərabərdir. Bunu göstərmək üçün $[0,1]$ parçasının aşağıdakı kimi bölgüsünü götürək və V cəmini düzəldək:

$$0<\frac{1}{2^n}<\frac{2^n-1}{2^n}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Buradan $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=+\infty$ olduğunu alarıq.

Başqa bir misala da baxaq:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\in\left(0,\frac{2}{n}\right) \text{ olduqda} \\ 0, & x=0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

Bu funksiya $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ parçasının $0<\frac{2}{\pi(2n+1)}<\frac{2}{\pi(2n-1)}<\ldots<\frac{2}{3\pi}<\frac{2}{\pi}$ şəklində bölgüsünü götürək və V cəmini düzəldək.

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\left(\frac{2}{\pi(2n+1)}-0\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}+\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)+\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}+\frac{2}{\pi(2n-3)}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2}{5\pi}+\frac{2}{3\pi}\right)+\left(\frac{2}{3\pi}-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n+1}\right).$$

Burada $1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+...+\frac{2}{2n+1}$ cəmi dağılan sıranın n-ci xüsusi cəmi olduğundan $n\to\infty$ şərtində bu cəm $+\infty$ olur. Ona görə də $\overset{\frac{2}{\pi}}{\underset{0}{V}}(f)=+\infty$ alırıq.

Teorem 2. $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiya məhduddur.

İsbatı: İstənilən $x\in[a,b]$ nöqtəsi üçün

$$V=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le \overset{a}{\underset{a}{V}}(f)$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|+|f(a)|\le|f(a)|+|f(x)-f(a)|+$$
$$+|f(b)-f(x)|\le|f(a)|+\overset{a}{\underset{a}{V}}(f)$$
$$|f(x)|\le|f(a)|+\overset{a}{\underset{a}{V}}(f).$$

Bu isə $f(x)$ funksiyasının məhdud olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiyalar isə, onda onların cəmi, fərqi, hasili və əlavə olaraq $g(x)\ge\sigma>0$ şərti ödəndikdə nisbəti də məhdud variasiyalı funksiyalardır.

İsbatı: $[a,b]$ parçasının $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ bölgüsünü götürək.

a) əvvəlcə fərz edək ki, $S(x)=f(x)\pm g(x)$. Onda alarıq:

$$|S(x_{k+1})-S(x_k)|=\left|[f(x_{k+1})\pm g(x_{k+1})]-[f(x_k)\pm g(x_k)]\right|=$$
$$=\left|[f(x_{k+1})-f(x_k)]\pm[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right|\le$$
$$\le|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|g(x_{k+1})-g(x_k)|\ .$$

Buradan $\overset{a}{\underset{a}{V}}(S)\le\overset{a}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{a}{\underset{a}{V}}(g)$ olduğunu alırıq.

b) $p(x)=f(x)\cdot g(x)$ işarə edək. Tutaq ki, $A=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|,\ B=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|.$

Onda alarıq:

$$|p(x_{k+1})-p(x_k)|=\left|f(x_{k+1})\cdot g(x_{k+1})-f(x_k)\cdot g(x_k)\right|=$$
$$=\left|[f(x_{k+1})-f(x_k)]\cdot g(x_{k+1})+[g(x_{k+1})-g(x_k)]\cdot f(x_k)\right|\le$$

$$\le \left|g(x_{k+1})\right| \cdot \left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| + \left|f(x_k)\right| \cdot \left|g(x_{k+1}) - g(x_k)\right| \le$$

$$\le B\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| + A\left|g(x_{k+1}) - g(x_k)\right|$$

Buradan $\overset{b}{\underset{a}{V}}(p) \le B \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + A\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$ və $pS(x) = f(x) \cdot g(x)$ məhdud variasiyalı olduğunu alırıq

c) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ şəklində yazaraq əvvəlcə $q(x) = \dfrac{1}{g(x)}$-in məhdud variasiyalı olduğunu göstərək:

$$\left|q(x_{k+1}) - q(x_k)\right| = \left|\frac{1}{g(x_{k+1})} - \frac{1}{g(x_k)}\right| =$$

$$= \left|\frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{g(x_{k+1}) \cdot g(x_k)}\right| \le \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left|g(x_{k+1}) - g(x_k)\right|.$$

Buradan $\overset{b}{\underset{a}{V}}(q) \le \dfrac{1}{\sigma^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$ və eyni zamanda $q(x)$-in məhdud variasiyalı olmasını alırıq. Nəticədə $\dfrac{f(x)}{g(x)}$-in məhdud variasiyalı olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 4. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında sonlu qiymətli funksiya isə və $a < c < b$ isə, onda

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \tag{1}$$

İsbatı: $[a,c]$ və $[c,b]$ parçalarından hər birini hissələrə bölək: $a = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_m = c$, $c = z_0 < z_1 < z_2 < ... < z_n = b$. Onda $\{y_k\}$ və $\{z_k\}$ birlikdə $[a,b]$ parçasının bölgüsü olar,

$$V_1 = \sum_{k=0}^{m-1}\left|f(y_{k+1}) - f(y_k)\right|,\ V_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(z_{k+1}) - f(z_k)\right|.$$

Onda $[a,b]$ parçasına uyğun cəm $V = V_1 + V_2$ olar. Nəticədə $V_1 + V_2 \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ olar. Buradan

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f). \tag{2}$$

alarıq.

İndi isə $[a,b]$-parçasının $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ bölgüsünü götürək, belə ki, c nöqtəsi bu bölgü nöqtələrindən biri ilə üst-üstə düşsün: $c = x_m$. Onda bu bölgüyə uyğun cəmi iki hissəyə bölə bilərik:

$$V = \sum_{k=0}^{m-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| + \sum_{k=m}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| = V_1 + V_2 .$$

$$V = V_1 + V_2 .$$

Burada V_1 və V_2 uyğun olaraq $[a,c]$ və $[c,b]$parçalarına uyğun cəmlərdir.

Bu halda

$$V \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \tag{3}$$

Bu cəm c nöqtəsinin bölgü nöqtələrindən biri ilə üst-üstə düşdüyü hal üçün yazılmışdır. Bu bölgüyə yeni bölgü nöqtələrinin əlavə olunması zamanı V cəmi azalmadığı üçün bütün bölgülərə uyğun V cəmləri üçün də (3) bərabərsizliyi doğru olar.

Nəticədə

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \tag{4}$$

olduğunu alarıq. (2) və (4) bərabərsizliklərindən (1) bərabərliyini alırıq. Teorem isbat olundu.

İsbat olunmuş teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər teoremin şərtləri daxilində $f(x)$ fuksiyası $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı isə, onda $[a,c]$ və $[c,b]$parçalarından hər birində məhdud variasiyalıdır.

Nəticə 2. Əgər $[a,b]$ parçasını sonlu sayda elə hissələrə bölmək olarsa ki, bu hissələrdən hər birində $f(x)$ funksiyası monoton olsun, onda $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı olar.

Teorem 5. $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı olması üçün zəruri və kafi şərt onun iki artan funksiyanın fərqi şəklində göstərilə bilməsidir.

İsbatı. Zərurilik. Titaq ki, $f(x)$ məhdud variasiyalı funksiyadır. Göstərmək lazımdır ki, onu iki artan $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyalarının fərqi şəklində göstərmək olar.

$\varphi(a)=0,\ \varphi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f),\ (a<x\le b)$ funksiyasını götürək. $x_1<x_2$ olduqda $\varphi(x_2)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)$ olduğundan və $\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\ge 0$ olduğunu nəzərə alsaq, $\varphi(x_2)\ge\varphi(x_1)$ alarıq. Deməli, $\varphi(x)$ artan funksiyadır. $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$ işarə edək. Onda

$$\psi(x_2)=\varphi(x_2)-f(x_2)=\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f)-f(x_2)=$$
$$=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)-[f(x_2)-f(x_1)]-f(x_1)=$$
$$=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)-f(x_1)+\left\{\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)-[f(x_2)-f(x_1)]\right\},$$

Burada $f(x_2)-f(x_1)\le\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)$ olduğunu nəzərə alsaq, $\psi(x_2)\ge\psi(x_1)$, yəni $\psi(x)$-in artan olduğunu alarıq. $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ bərabərliyi teoremin zəruriliyinin doğru olduğunu göstərir.

Kafiliyin isbatı: Əgər $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ şəklində göstərilmişsə, belə ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ artan funksiyalardır, onda $\varphi(x)$ və $\psi(x)$-in məhdud variasiyalı olduğuna görə onların fərqi də məhdud variasiyalı olar. Teorem isbat edildi.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı isə, onda $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasının sanki bütün nöqtələrində sonlu $f'(x)$ törəməsi vardır və bu törəmə cəmlənən funksiyadır.

Nəticə 2. Məhdud variasiyalı funksiyanın kəsilmə nöqtələri ən çoxu hesabi saydadır. İstənilən x_0 nöqtəsində hər iki $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ (x>x_0)$, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ (x<x_0)$ birtərəfli limitləri vardır.

Nəhayət, məhdud variasiyalı funsiyanın göstərilişini ifadə edən aşağıdakı mühüm teoremi də qeyd edək.

Teorem 6. $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı hər bir funksiyanı onun sıçrayış funksiyası ilə kəsilməz məhdud variasiyalı funksiyaların fərqi şəklində göstərmək olar.

İsbatı: Tutaq ki, $x_1<x_2<x_3<...$ nöqtələri $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında kəsilmə nöqtələridir.

$S_\varphi(x)$ və $S_\psi(x)$ ilə $\varphi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ və $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$ funsiyalarının sıçrayış funksiyalarını işarə edək.

$$S_\varphi(x)=[\varphi(a+0)-\varphi(a)]+\sum_{x_k<x}[\varphi(x_k+0)-\varphi(x_k-0)]+$$
$$+[\varphi(x)-\varphi(x-0)]\ (a<x\le b),\ S_\varphi(a)=0;$$

$$S_\psi(x)=[\psi(a+0)-\psi(a)]+\sum_{x_k<x}[\psi(x_k+0)-\psi(x_k-0)]+$$
$$+[\psi(x)-\psi(x-0)]\ (a<x\le b),\ S_\psi(a)=0.$$

$S(x)=S_\varphi(x)-S_\psi(x)$ işarə edək.

Onda

$$S(x)=[f(a+0)-f(a)]++\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(x)-f(x-0)]$$

olduğunu alarıq. $S(x)$ $f(x)$ funksiyasının sıçrayış funksiyası olur.

$\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları artan, $S_\varphi(x)$ və $S_\psi(x)$ funksiyaları isə bunların sıçrayış funksiyaları olduğundan $\varphi(x)-S_\varphi(x)$ və $\psi(x)-S_\psi(x)$ kəsilməz funksiyalardır. Onda $h(x)=[\psi(x)-S_\psi(x)]-[\varphi(x)-S_\varphi(x)]$ funksiyası da kəsilməz olar. Eyni zamanda $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ olduğundan $h(x)=S(x)-f(x)$ olur. Burada $h(x)$ kəsilməz və iki artan funksiyanın fərqi olduğundan məhdud variasiyalıdır. $S(x)$ isə sıçrayış funksiyasıdır.

Son nəticədə $f(x)=S(x)-h(x)$ olduğundan teorem isbat edilmiş olur.

7.3. Riman-Stiltes inteqralı.

1. Stiltes inteqralının tərifi və xassələri

Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş sonlu funksiyalardır. $[a,b]$ parçasını $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<y_b=b$ bölgü nöqtələri vasitəsilə hissələrə bölək və hər bir kiçik $[x_k,x_{k+1}]$ parçasından bir ξ_k nöqtəsi götürməklə

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

cəmini düzəldək.

Əgər $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \to 0$ şərtində σ cəminin nə $[a,b]$ parçasının həssələrə bölünməsi qaydasından, nə də bu hissələrdə ξ_k nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayan sonlu I limiti varsa, bu limitə $f(x)$ funksiyasının $g(x)$ funksiyasına nəzərən Stiltes inteqral deyilir və $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ yaxud $(R-S)\int_a^b f(x)dg(x)$ kimi işarə olunur.

Bu tərifi başqa formada aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik: İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $\delta > 0$ tapmaq olarsa ki, boyu $\lambda < \delta$ olan istənilən bölgü və ixtiyari üsulla seçilmiş ξ_k nöqtələri üçün $|\sigma - I| < \varepsilon$ şərti ödənilsin, bu halda I ədədinə $f(x)$ funksiaysının $g(x)$-ə görə Stiltes inteqralı deyilir.

Göründüyü kimi Riman inteqralı Stiltes inteqralının xüsusi halıdır və Stiltes inteqralında $g(x) = x$ olduqda Riman inteqralını alırıq.

Bilavasitə tərifdən Stiltes inteqralını aşağıdakı xassələrini ala bilərik:

I. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x)$

II. $\int_a^b f(x)d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x)$

III. İstənilən A və B sabitləri üçün

$$\int_a^b Af(x)dBg(x) = A \cdot B\int_a^b f(x)dg(x).$$

IV. Əgər $a < c < b$ və $\int_a^b f(x)dg(x)$, $\int_a^c f(x)dg(x)$ və $\int_c^b f(x)dg(x)$ inteqrallarından hər üçü varsa, onda

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x).$$

Qeyd edək ki, $\int_a^b f(x)dg(x)$ inteqralının varlığından $\int_a^c f(x)dg(x)$ və $\int_c^b f(x)dg(x)$ inteqrallarının varlığı alınır. Amma bunun əksi doğru deyildir.

Yəni $\int_a^c f(x)dg(x)$ və $\int_c^b f(x)dg(x)$ inteqrallarının varlığından $\int_a^b f(x)dg(x)$, interqalının varlığı çıxmaya da bilər. Bunu aşağıdakı misaldan görə bilərik.

Misal. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[-1,1]$parçasında verilmiş funsiyalardır və aşağıdakı kimi təyin olunmuşlar:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0 \text{ olduqda,}\\ 1, & 0<x\le 1 \text{ olduqda.}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0, & -1\le x< 0 \text{ olduqda,}\\ 1, & 0\le x\le 1 \text{ olduqda.}\end{cases}$$

Göründüyü kimi $\int_{-1}^0 f(x)dx$, $\int_0^1 f(x)dg(x)$ inteqrallarından hər biri vardır və sıfra bərabərdir. (Çünki, hər iki halda σ cəmi sıfra bərabər olur.) Amma $\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$ inteqralı yoxdur.

Doğrudan da, $[-1,1]$ parçasının elə bölgüsünü götürək ki, $x=0$ bölgü nöqtəsi olmasın.

$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$ cəminə baxaq. Əgər $x_i<x<x_{i+1}$ olarsa, bu halda σ cəmini yalnız bir i.-ci həddən ibarət olar. Çünki, əgər x_k və x_{k+1} nöqtələri 0 nöqtəsindən bir tərəfdə yerləşərlərsə, onda $g(x_k)=g(x_{k+1})$ olar. Ona görə də $\sigma=f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]$ olar. $\xi_i\le 0$ yaxud $\xi_i>0$ olmasından asılı olaraq $\xi_i=0$ yaxud $\sigma=1$ olar. Bu isə tərifə görə inteqral cəminin limitinin olmaması deməkdir. Yəni $\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$ yoxdur.

V. $\int_a^b f(x)dg(x)$ və $\int_a^b g(x)df(x)$ inteqrallarından birinin varlığından digərinin varlığı alınır və aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=[f(x)g(x)]_a^b \tag{1}$$

Burada

$$[f(x)g(x)]_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a) \tag{2}$$

işarə olunmuşdur.

Bu xassəni isbat edək. Tutaq ki, $\int_a^b f(x)dg(x)$ inteqralı vardır. $[a,b]$ parçasını hissələrə bölək və $\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$ cəmini düzəldək. Bu cəmi aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_{k+1})-\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})]+f(\xi_{n-1})g(x_n)-f(\xi_0)g(x_0)$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfinə $[f(x)g(x)]_a^b$ ifadəsini əlavə etsək və çıxsaq, alırıq:

$$\sigma=[f(x)g(x)]_a^b-\{g(a)[f(\xi_0)-f(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})]+g(b)[f(b)-f(\xi_{n-1})]\}. \qquad (3)$$

Əgər $[a,b]$ parçasının $a\le\xi_0\le\xi_1\le\xi_2\le...\le\xi_{n-1}\le b$ bölgüsünü götürsək və $a,x_1,x_2,...,x_{n-1},b$ nöqtələrini $[a,\xi_0],[\xi_0,\xi_1],...,[\xi_{n-1},b]$ parçalarından götürülmüş nöqtələr hesab etsək, bu halda (3) cəminin $\int_a^b f(x)dg(x)$ inteqralının inteqral cəmi olduğunu görərik. $\lambda=\max(x_{k+1}-x_k)\to 0$ şərtində $\mu=\max(\xi_{k+1}-\xi_k)\to 0$ olduğundan $\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_a^b f(x)dg(x)$ alarıq.

2. Stiltes inteqralının varlığı şərti.

İndi isə hansı şərtlər daxilində Stiltes inteqralının varlığı məsələsini araşdıraq.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ funksiyası isə $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiya isə, onda $\int_a^b f(x)dg(x)$ Stiltes inteqralı vardır və sonlu ədəddir.

İsbatı: Hesab edə bilərik ki, $g(x)$ artan funksiyadır. (Çünki hər bir məhdud variasiyalı funksiya iki artan funksiyanın fərqi şəklində göstərilə bilir.)

$[a,b]$ parçasını $a=x_0<x_1<x_2<...<y_b=b$ nöqtələri vasitəsilə $[x_k,x_{k+1}]$ hissələrinə bölək.

$m_k = \inf\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x), \quad M_k = \sup\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)$ işarə edək.

$s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right], \quad S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]$ cəmlərini düzəldək. Bu cəmlərə aşağı və yuxarı Stiltes cəmləri deyilir.

$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ götürək və

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]$$

cəmini düzəldək.

Aydındır ki, $[a,b]$ parçasının istənilən bölgüsü üçün $s \le \sigma \le S$ doğrudur. Riman inteqral cəmlərində olduğu kimi isbat etmək olar ki, $[a,b]$-nin bölgüsünə yeni bölgü nöqtələri əlavə etdikdə aşağı Stiltes cəmi azalmır, yuxarı Stiltes cəmi isə artmır. Eləcə də ixtiyari bölgüyə uyğun hər bir aşağı Stiltes cəmi istənilən yuxarı Stiltes cəmini aşmır, istənilən yuxarı Stiltes cəmi isə aşağı Stiltes cəmlərindən kiçik olmur. Alırıq ki, $\{s\}$ yuxarıdan, $\{S\}$ isə aşağıdan məhdud çoxluqlardır. Ona görə də sonlu $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = \underline{J}, \quad \lim\limits_{\lambda \to 0} S = \overline{J}$ limitləri vardır və $\underline{J} \le \overline{J}$.

$f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğundan $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $|x' - x''| < \delta$ olduqda $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ olar. Onda alarıq ki, $\lambda < \delta \ \left(\lambda = \max(x_{k+1} - x_k)\right)$ olduqda $M_k - m_k < \varepsilon \ (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ olar.

Buradan $S - s < \varepsilon(g(b) - g(a))$ olduğunu alarıq.

Nəticədə $\underline{J} = \lim\limits_{\lambda \to 0} s = \lim\limits_{\lambda \to 0} S = \overline{J} = J$ olar.

$|\sigma - J| = |S - s|$ münasibətindən $J = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$ alırıq. Teorem isbar olundu.

2. Stiltes inteqralının hesablanması.

Aşağıda Stiltes inteqralının hesablanması üçün iki hala baxacağıq.

Teorem 2. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ funksiyası isə $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan $g'(x)$ törəməsinə malik isə, onda

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{4}$$

İsbatı: Teoremin şərtlərindən alınır ki, $g(x)$ funksiyası Lipşits şərtini ödəyir və ona görə də məhdud variasiyalı funksiyadır. Bu halda (4) bərabərliyinin sol tərəfindəki inteqral vardır. Digər tərəfdən $g'(x)$ funksiyası, eləcədə $f(x)g'(x)$ funksiyası sanki hər yerdə kəsilməz olduğundan (4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqralda vardır. Ona görə də (4) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərmək lazımdır.

Bu məqsədlə $[a,b]$ parçasını $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə hissələrə bölək. Hər bir kiçik $[x_k, x_{k+1}]$ parçasında $g'(x)$ funksiyası üçün Loqranj teoremini tətbiq edək:

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k < \bar{x}_k < x_{k+1})$$

Əgər $\int_a^b f(x)dg(x)$ inteqralı üçün inteqral cəmini düzəldərkən ξ_k nöqtələri olaraq $\bar{x}_k$ nöqtəsini seçsək, onda σ inteqral cəmi aşağıdakı kimi olar:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k),$$

Göründüyü kimi bu cəm $f(x)g'(x)$ funksiyası üçün inteqral cəmidir. Əgər $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \to 0$ şərtində limitə keçsək (4) bərabərliyini alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Əgər $f(x)$ $[a,b]$ parçsında kəsilməz, $g(x)$ isə $(a,c_1),(c_1,c_2),\ ,(c_m,b)$ intervallarından hər birində sabitdirsə, ($a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b$) yəni, pilləvari funksiya isə, onda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(a+0) - g(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k)] + f(b)[g(b) - g(b-0)] \qquad (5)$$

İsbatı: Məlumdur ki, hissə-hissə sabit (pilləvari) funksiyalar üçün

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(b) = |g(a+0) - g(a)| + \sum_{k=1}^{m} \{|g(c_k) - g(c_k+0)| + |g(c_k+0) - g(c_k)|\}$$

doğrudur. Buradan $g(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiya olduğunu alırıq. Onda $g(x)$ $[a,b]$ parçasının hər bir hissəsində sonlu dəyişməyə malikdir. Ona görə də

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x), \qquad (6)$$

burada $c_0 = a,\ c_{m+1} = b.$ $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)$ inteqralı üçün σ inteqral cəmi

$$\sigma = f(\xi_0)[g(c_k+0) - g(c_k)] + f(\xi_{n-1})[g(c_{k+1}) - g(c_k - 0)]$$

olar.

Odur ki,

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x) = f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k)] +$$

$$+ f(\xi_{k+1})[g(c_{k+1})-g(c_k-0)] \quad (k=0,1,...,m) \qquad (7)$$

(7) bərabərliyində $k=0,1,2,...,m$ qiymətlərini verməklə alınan bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq (6) bərabərliyini alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 4. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ funksiyasının isə $c_1, c_2, ..., c_m$ nöqtələri istisna olmaqla $[a,b]$-nin bütün nöqtələrində inteqrallanan $g'(x)$ törəməsi vardır. Onda

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a)[g(a+0)-g(a)] +$$

$$+ f(b)[g(b)-g(b-0)] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)].$$

İsbatı: $S(x)$ ilə $g(x)$ funksiyasının sıçrayış funksiaysını işarə edək:

$$S(x) = [g(a+0)-g(a)] + \sum_{c_k<x}[g(c_k+0)-g(c_k-0)] + [g(x)-g(x-0)].$$

Onda $h(x)=g(x)-S(x)$ funksiyası kəsilməz funksiya olar və $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan $h'(x)$ törəməsinə malik olar, belə ki, $h'(x)=g'(x)$. ($x \neq a, c_1, c_2, ..., c_m, b$ olduqda). Onda isbat edilmiş teorem 2 və teorem 3-ə əsasən

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dh(x) + \int_a^b f(x)dS(x) =$$

$$= \int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a)[g(a+0)-g(a)] + f(b)[g(b)-g(b-0)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]$$

olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

4. Stiltes inteqralının orta qiymət xassəsi.

Aşağıdakı sadə teoremlər doğrudur:

Teorem 5. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ isə məhdud variasiyalı funksiaydır.

Onda aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le M(f)\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \qquad (8)$$

burada $M(f)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

İsbatı: $[a,b]$ parçasının istənilən bölgüsü və ξ_k nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq alarıq:

$$|\sigma|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\cdot|[g(x_{k+1})-g(x_k)]| \le$$

$$\le M(f)\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)| \le M(f)\overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Buradan teoremin doğru olması alınır.

Teorem 6. Fərz edək ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $g(x)$ isə $[a,b]$ parçasında artan funksiyadır. Onda elə $c\in[a,b]$ nöqtəsi vardır ki,

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(c)[g(b)-g(a)].$$

İsbatı: $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ işarə edək.

Onda

$$m[g(b)-g(a)]\le\int_a^b f(x)dg(x)\le M[g(b)-g(a)].$$

Buradan $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b)-g(a)}\le M$.

Onda alırıq ki, elə $\mu\in[m,M]$ vardır ki, $\dfrac{\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b)-g(a)}=\mu$, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğundan elə $c\in[a,b]$ nöqtəsi vardır ki, $f(c)=\mu$.

Bunu nəzərə alsaq $\int_a^b f(x)dg(x)=f(c)[g(b)-g(a)]$ alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 7. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında monoton artan, $g(x)$ isə kəsilməz, məhdud variasiyalı funksiyadır. Onda elə $c\in[a,b]$ nöqtəsi vardır ki,

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(a)[g(c)-g(a)]+f(b)[g(b)-g(c)].$$

İsbatı: Stiltes inteqralının hissə-hissə inteqrallanma düsturuna görə

$$\int_a^b f(x)dg(x)=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)df(x).$$

Teorem 6-ya görə elə $c\in[a,b]$ nöqtəsi vardır ki, $\int_a^b g(x)df(x)=g(c)[f(b)-f(a)]$. Bunu nəzərə alsaq,

$$\int_a^b f(x)dg(x)=[f(x)g(x)]_a^b-g(c)[f(b)-f(a)]=$$
$$=f(a)[g(c)-g(a)]+f(b)[g(b)-g(c)].$$

Teorem isbat olundu.

5. Stiltes inteqralı altında limitə keçmə teoremləri.

Teorem 8. Fərz edək ki, $\{f_n(x)\}$ kəsilməz funksiyalar ardıcıllığı $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılandır və $g(x)$ $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiyadır. Onda

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg(x). \tag{9}$$

İsbatı: $M(f_n-f)=\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$ işarə edək. Teoremin şərtinə görə $n\to\infty$ şərtində $M(f_n-f)\to 0$.

Əgər teorem 5-dən istifadə etsək, onda

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dg(x)\right|\le$$
$$\le M(f_n-f)\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)\to 0$$

olduğunu alarıq. Bu isə teoremin doğru olduğunu göstərir.

Teorem 9. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır və $g_n(x)$ məhdud variasiyalı funksiyalar ardıcıllığı $[a,b]$ parçasının hər bir nöqtəsində sonlu $g(x)$ funksiyasına yığılan ardıcıllıqdır. Fərz edək ki, elə $K<\infty$ sonlu sabiti vardır ki,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_n)\le K<\infty \qquad (k=1,2,...). \tag{10}$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x). \tag{11}$$

İsbatı: Əvvəlcə göstərək ki,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leq K \tag{12}$$

yəni, $g(x)$ məhdud variasiyalı funksiyadır. Bunun üçün $[a,b]$ parçasını ixtayiri qaydada hissələrə bölək.

Onda alarıq:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \leq K \quad (n = 1,2,...)$$

buradan $n \to \infty$ şərtində alarıq:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq K.$$

Bölgünün ixtiyariliyi şərtinə görə (12) şərtinin ödənməsini alırıq.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədini götürək və $[a,b]$ parçasını $\{x_k\}$ $(k = 0,1,...,m)$ nöqtələri vasitəsilə elə kiçik $[x_k, x_{k+1}]$ hissələrə bölək ki, bu hissələrin hər birində $f(x)$ funksiyasının rəqsi (dəyişməsi) $\frac{\varepsilon}{3K}$ ədədindən kiçik olsun, yəni $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3K}$.

Aşağıdakı bərabərliyi yazaq:

$$`\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dg(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]dg(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x),$$

$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x) = g(x_{k+1}) - g(x_k)$ və $[x_k, x_{k+1}]$ parçasında $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3K}$ olduğundan alarıq:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]dg(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3K} \cdot \overset{x_{k+1}}{\underset{x_k}{V}}(g).$$

Buradan

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]dg(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3K} \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Beləliklə

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] + \theta \cdot \frac{\varepsilon}{3} \quad (|\theta| \leq 1).$$

Analoji üsulla alarıq:

$$\int_a^b f(x)dg_n(x)=\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g_n(x_{k+1})-g_n(x_k)]+\theta_n\cdot\frac{\varepsilon}{3} \quad (|\theta_n|\le 1)$$

$n>n_0$ nömrələri üçün aşağıdakı bərabərsizliyi alarıq:

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g_n(x_{k+1})-g_n(x_k)]-\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Bu halda həmin n nömrələri üçün

$$\left|\int_a^b f(x)dg_n(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\right|<\varepsilon$$

olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Sonuncu iki teoremi aşağıdakı kimi birləşdirmək olar.

Teorem 10. Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında $f_n(x)$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılan, $g_n(x)$ məhdud variasiyalı funksiyalar ardıcıllığı isə $g(x)$ funksiyasına $[a,b]$ parçasının hər bir nöqtəsində yığılır və elə K sabit ədədi vardır ki,

$$\mathop{V}_a^b(g_n)\le K \quad (k=1,2,3,...).$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

7.4. Lebeq-Stiltes inteqralı.

1. Stiltes ölçüsü. Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında azalmayan $g(x)$ funksiyası verilmişdir. Fərz edirik ki, $g(x)$ funksiyası soldan kəsilməz funksiyadır, yəni $g(x_0)=g(x_0-0)$, $x_0\in[a,b]$. $[a,b]$ parçasında $g(x)$ funksiyasının köməyi ilə aşağıdakı kimi ölçülər təyin edək:

(α,β) intervalının ölçüsü $\mu(\alpha,\beta)=g(\beta)-g(\alpha+0)$,

$[\alpha,\beta]$ parçasının ölçüsünü $\mu[a,b]=g(\beta+0)-g(\alpha)$,

$(\alpha,\beta]$ yarımintervalının ölçüsü $\mu(\alpha,\beta]=g(\beta+0)-g(\alpha+0)$,

$[\alpha,\beta)$ yarımintervalının ölçüsünü $\mu[\alpha,\beta)=g(\beta)-g(\alpha)$

kimi təyin edək.

Əgər $x_0\in[a,b]$ $g(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsi olarsa, bu nöqtədə ölçü $\mu(x_0)=g(x_0+0)-g(x_0)$ kimi götürülür. Bu ölçünü $[a,b]$ parçasına daxil olan bütün açıq və qapalı çoxluqlar üçün də təyin etmək olar. Bu qayda ilə alınan ölçü Lebeq-Stiltes ölçüsü adlanır.

$g(x)$ funksiyasına Lebeq-Stiltes ölçüsünü doğuran funksiya deyilir və μ_g kimi işarə edilir

Tutaq ki, $g(x)$ $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiyadır. Məlum olduğu kimi bu halda $g(x)$ fuksiyasını iki artan $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaların fərqi kimi göstərmək olar. Bu funksiyaların doğurduğu ölçüləri uyğun olaraq μ_φ və μ_ψ kimi işarə edək. Onda $g(x)$-ın doğurduğu μ_g ölçüsü $\mu_g = \mu_\varphi - \mu_\psi$ kimi olar. Qeyd edək ki, μ_g ölçüsü istənilən işarəli ola bilər.

2. Lebeq-Stiltes inteqralının tərifi.

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında sonlu $f(x)$ və monoton artan $g(x)$ funksiyaları verilmişdir. μ ilə $g(x)$ funksiyasının doğurduğu ölçünü işarə edək. $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında Lebeq inteqralını təyin edərkən çoxluğun ölçüsü olaraq μ_g ölçüsünü götürək. Bu zaman alınmış

$$\int_a^b f(x)d\mu \tag{1}$$

Lebeq inteqralına Lebeq-Stiltes inteqralı deyilir və

$$(L-S)\int_a^b f(x)dg(x) \tag{2}$$

kimi işarə olunur.

Tutaq ki, $g(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiyadır. Onda Lebeq-Stiltes inteqralı

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)d\varphi(x) - \int_a^b f(x)d\psi(x) \tag{3}$$

kimi təyin olunur. Burada $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, $\varphi(x) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$, $\psi(x) = \varphi(x) - g(x)$.

Aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 1. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında ölçülən və məhdud funksiyalardır, $g(x)$ funksiyasının sanki hər yerdə $g'(x)$ törəməsi vardır və bu törəmə Lebeq mənada inteqrallanandır. Onda

$$(L-S)\int_a^b f(x)dg(x) = (L)\int_a^b f(x)g'(x)dx \ . \tag{4}$$

İsbatı: Aşağıdakı hallara baxaq:

1) $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Bu halda

$$(L-S)\int_a^b f(x)dg(x)=c\int_a^b dg(x)=c\int_a^b g'(x)dx=$$

$$=(L)\int_a^b cg'(x)dx=(L)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

2) Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında sadə funksiyadır, yəni ölçülən və ən çoxu hesabi sayda qiymətlər ala bilən funksiyadır. $E=[a,b]$ parçasını kəsişməyən hesabi sayda $A_k=E(f=c_k)$, $k=1,2,3,...$ çoxluqlarına ayırmaq olar. Onda

$$(L-S)\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_k\int f(x)dg(x)=\sum_k c_k\int_{A_k} dg(x)=$$

$$=\sum_k c_k\int_{A_k} g'(x)dx=\int_a^b\sum_k c_k g'(x)dx=(L)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

3) Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $\{f_n(x)\}$ sadə funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm limitidir. Bu halda hər bir n natural ədədi üçün $\int_a^b f_n(x)dg(x)=\int_a^b f_n(x)g'(x)dx$ bərabərliyi doğrudur. $n\to\infty$ şərtində limitə keçsək $(L-S)\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)dx$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında məhdud və ölçülən, $g(x)$ isə $x_1, x_2,...,, x_n,...$ kəsilmə nöqtələrinə malik sıçrayış funksiyasıdır.

Onda

$$(L-S)\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_k f(x_k)h_k$$

bərabərliyi doğrudur, burada h_k, $g(x)$ funksiyasının x_k nöqtələrində sıçrayışlarıdır.

İsbatı: Bu halda $g(x)$ funksiyasının doğurduğu ölçü diskret olub, $\mu_g(x_k)=h_k$ şərtini ödəyir.

$A\subset[a,b]$ çoxluğunun ölçüsü $\mu_g(A)=\sum_{x_k\in A}h_k$ kimi hesablanır. Tutaq ki, $f(x)$ sadə $f_n(x)$ funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm limitidir.

Onda $\int_a^b f_n(x)dg(x)=\sum_k f_n(x_k)h_k$.

Bu bərabərlikdə $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək $(L-S)\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_k f(x_k)h_k$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

7.5. Məhdud variasiyalı funksiyalara aid misallar.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. İsbat edin ki, $m(x) = \inf\limits_{a \le z \le x} f(z)$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş $m(x)$ funksiyası monoton azalan və kəsilməz funksiyadır və $M(x) = \sup\limits_{a \le z \le x} f(z)$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş funksiya isə monoton artan və kəsilməz funksiyadır.

İsbatı: İstənilən $h > 0$ ədədi üçün

$$m(x+h) = \inf_{a \le z \le x+h} f(z) = \min\left\{ \inf_{a \le z \le x} f(z), \inf_{a \le z \le x+h} f(z) \right\} \le$$
$$\le \inf_{a \le z \le x} f(z) = m(x)$$

olduğundan $m(x)$-in azalan olduğunu alırıq.

Göstərək ki,

$$0 \le m(x) - m(x+h) \le \underset{[x,x+h]}{\omega} f(z) \qquad (*)$$

münasibəti doğrudur. Burada $\underset{[x,x+h]}{\omega} f(z) = \sup\limits_{x \le z \le x+h} f(z) - \inf\limits_{x \le z \le x+h} f(z)$ $f(z)$ funksiyasının $[x, x+h]$ parçasında rəqsini göstərir.

Tutaq ki, $m(x+h) = \inf\limits_{a \le z \le x} f(z) = m(x)$. Onda $0 = m(x) - m(x+h) \le \underset{[x,x+h]}{\omega} f(z)$.

Tutaq ki, $m(x+h) = \inf\limits_{x \le z \le x+h} f(z)$. Onda $\inf\limits_{a \le z \le x} f(z) \le f(x) \le \sup\limits_{a \le z \le x+h} f(z)$ olduğundan

$$m(x) = \inf_{x \le z \le x+h} f(z) + \left[\inf_{x \le z \le x} f(z) - \inf_{x \le z \le x+h} f(z) \right] \le$$
$$\le \left[\sup_{x \le z \le x+h} f(z) - \inf_{x \le z \le x+h} f(z) \right] = m(x+h) + \underset{[x,x+h]}{\omega} f(z).$$

Buradan (*) bərabərsizliyinin doğru olması alınır.

$f(z)$ funksiyası kəsilməz olduğundan $\lim\limits_{h \to 0} \underset{[x,x+h]}{\omega}(z) = 0$. Onda (*) bərabərsizliyinə görə $m(x)$-in sağdan kəsilməz olduğunu alırıq.

Analoji qayda ilə istənilən $h > 0$ üçün $0 \le m(x-h) - m(x) \le \underset{[x-h,x]}{\omega} f(z)$ olduğunu da göstərmək olar. Bu bərabərsizlikdən $m(x)$-in soldan kəsilməzliyi alınır. Nəticədə $m(x)$ funksiyasının monoton azalan və kəsilməz olduğunu alırıq.

Eyni üsulla $M(x)$ funksiyasının monoton artan və kəsilməz funksiya olduğunu göstərə bilərik.

2. Tuatq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında monoton artandır və qiymətləri $[f(a), f(b)]$ parçasını tamamilə doldurur. Onda $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir.

İsbatı: Fərz edək ki, elə $c \in (a,b)$ nöqtəsi vardır ki, bu nöqtədə funksiya kəsiləndir. Onda funksiyanın qiymətləri $(f(c), f(c+0))$, yaxud $(f(c-0), f(c))$ intervallarından birinə daxil olmur. Bu isə funksiyanın qiymətlərinin $[f(a), f(b)]$ parçasını doldurması şərtinə ziddir. Alınmış ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Deməli funksiya kəsilməzdir.

3. $[a,b]$ parçasına daxil olan bütün rasional ədədləri $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ ilə işarə edək və $x \in [a,b]$ üçün $f(x) = \sum\limits_{r_k < x} \frac{1}{2^k}$ funksiyası təyin edək. Burada cəmləmə $r_k < x$ şərtini ödəyən bütün k indeksləri üzrə aparılır.

$f(x)$ funksiyasının ciddi monoton artan olduğunu və $x = r_n$ $(n = 1,2,...)$ nöqtələrinin bu funksiyanın kəsilmə nöqtələri olduğunu göstərin.

Həlli. $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ nöqtələrini götürək. Heç olmazsa, elə bir rasional r_{n_0} ədədi vardır ki, $x_1 < r_{n_0} < x_2$. Onda alarıq:

$$f(x_2) = \sum_{r_k < x_2} \frac{1}{2^k} \geq \sum_{r_k < x_1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n_0}} = f(x_1) + \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Buradan $f(x_1) < f(x_2)$, yəni $f(x)$-in ciddi monoton artan olduğunu alırıq.

İndi göstərək ki, $f(x)$ funksiyası $x = r_n$ $(n = 1,2,...)$ nöqtələrində kəsiləndir. $x > r_n$ olduqda

$$f(x) = \sum_{r_k < x} \frac{1}{2^k} = \sum_{r_k < r_n} \frac{1}{2^k} + \sum_{r_k < r_n < x} \frac{1}{2^k} > f(r_n) + \frac{1}{2^n},$$

buradan $x \to r_n + 0$ şərtində alarıq: $f(r_n + 0) \geq f(r_n) + \frac{1}{2^n}$ və ya

$$f(r_n + 0) - f(r_n) \geq \frac{1}{2^n}.$$

Bu onu göstərir ki, $x = r_n$ nöqtələrində $f(x)$ sağdan kəsiləndir və onun sıçrayışı $\frac{1}{2^n}$ ədədindən böyükdür. Monoton artan funksiyanın bütün sıçrayışlarının cəmi $S \le f(b) - f(a)$ şərtini ödəməlidirlər. Baxılan halda isə $f(b) - f(a) = \sum_k \frac{1}{2^k} - 0 = 1$ olduğundan $S \le 1$ alırıq.

Digər tərəfdən funksiyanın sağ sıçrayışlar cəmi $S_1 = \sum_n [f(r_n + 0) - f(r_n)] \ge \sum_n \frac{1}{2^k} = 1$ olduğundan $S_1 = S = 1$ alırıq. Buradan eyni zamanda $f(x)$ funksiyasının r_n nöqtələrindən başqa kəsilmə nöqtələrinin olmadığını da alırıq. Əks halda funksiyanın sıçrayışlar cəmi vahiddən böyük olardı.

4. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan $f'(x)$ törəməsi vardır. Göstərin ki, funksiyanın $[a,b]$ parçasında tam variasiyası üçün $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(x)| dx$ düsturu doğrudur.

Həlli. $[a,b]$ parçasını $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə hissələrə bölək və $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ cəmini düzəldək. Loqranjın sonlu artımlar düsturuna görə $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$ $(x_i \le c_i \le x_{i+1})$ olduğundan $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(c_i)|(x_{i+1} - x_i)$.

Əgər bu bərabərlikdə $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i) \to 0$ şərtində limitə keçsək, onda $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^v |f'(x)| dx$ alarıq.

5. $f(x) = \sin x$ funksiyasının $[0,2\pi]$ parçasında tam variasiyasını tapın və onu artan iki funksiyanın fərqi şəklində göstərin.

Həlli. $f(x) = \sin x$ funksiyasının $[0,2\pi]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan $f'(x) = \cos x$ törəməsi olduğundan tam variasiyanı $\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) = \int_0^{2\pi} |\cos x| dx$ düsturu vasitəsilə tapa bilərik.

Onda

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) = \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\, dx =$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = 4.$$

İndi isə verilmiş funksiyanı iki artan funksiyanın fərqi kimi göstərək $\varphi(x)=\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=\int_0^x|\cos t|dt$ qəbul edək.

$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olduqda $\varphi(x)=\int_0^x \cos t dt=\sin x$,

$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ olduqda

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\int_{\pi/2}^{x}|\cos t|dt=1-\int_{\pi/2}^{x}\cos t\,dt=2-\sin x,$$

$x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ olduqda

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\int_{3\pi/2}^{x}|\cos t|dt=3+\int_{3\pi/2}^{x}\cos t\,dt=4+\sin x,$$

Əgər $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$ qəbul etsək, onda $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olduqda $\psi(x)=0$, $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ olduqda $\psi(x)=2-2\sin x$, $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ olduqda $\psi(x)=4$ alarıq.

Beləliklə $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 2-\sin x, & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2},\\ 4+\sin x, & \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi,\end{cases}$ $\quad\psi(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 2-2\sin x, & \frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2},\\ 4, & \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi,\end{cases}$

6. $f(x)=e^{-x^2}$ funksiyasının $[0,+\infty)$ yarımintervalında variasiyasını hesablayın.

Həlli. $n>N$ ədədini götürək və $\overset{N}{\underset{0}{V}}(f)$ variasiyasını tapaq.

$$\overset{N}{\underset{0}{V}}(f)=\int_0^N|f'(x)|dx=\int_0^N\left|-2xe^{-x^2}dx\right|=\int_0^N e^{-x^{-2}}dx^2=1-e^{-N^2}.$$

Buradan

$$\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(f)=\lim_{N\to\infty}\overset{N}{\underset{0}{V}}(f)=\lim_{N\to\infty}\left(1-e^{-N^2}\right)=1.$$

7. Verilmiş funksiyaların tam variasiyalarını tapın.

a) $f(x)=e^x, \quad x\in[0,50]$;

b) $f(x)=\ln x, \quad x\in[1,2]$;

c) $f(x)=\cos x, \quad x\in[0,4\pi]$;

d) $f(x)=x-x^3, \quad x\in[-1,1]$;

e) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1-x, & 0<x<1,\\ 5, & x=1,\end{cases} \quad [0,1]$;

f) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ 10, & x=1,\\ 5, & x>1,\end{cases} \quad [0,2]$;

8. Verilmiş funksiyaların variasiyasını hesablayın onları iki artan funksiyanın fərqi kimi göstərin

($f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$).

a) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1,\\ 1, & x\in(1,2],\end{cases} \quad [0,2]$.

b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ 5, & x=1,\\ x+5, & x\in(0,2],\end{cases} \quad [0,2]$.

c) $f(x)=\cos^2\pi, \quad x\in[0,\pi]$.

Cavablar:

a) $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=2, \; \varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ 2, & x=1,\\ 3, & x\in(1,2],\end{cases} \quad \psi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[0,1),\\ 2, & x\in(1,2],\end{cases}$

b) $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=7, \; \varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ 5, & x=1,\\ x+5, & x\in(1,2],\end{cases} \quad \psi(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 2, & x\in(1,2],\end{cases}$

c) $\overset{\pi}{\underset{0}{V}}(f)=2,\ \varphi(x)=\begin{cases}1-\cos^2 x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 1+\cos^2 x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\end{cases}$

$$\psi(x)=\begin{cases}1-2\cos^2 x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 1, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$$

VIII FƏSİL
MÜTLƏQ KƏSİLMƏZ FUNKSİYALAR
8.1. Mütləq kəsilməz funksiyanın tərifi və əsas xassələri.

VII fəsildə məhdud variasiyalı funksiyalar və onların bəzi xassələrini nəzərdən keçirdik. İndi isə məhdud variasiyalı funksiyalarla sıx əlaqəsi olan digər funksiyalar sinfi ilə tanış olaq.

Tərif: Tutaq ki, $f(x)$ [a, b] parçasında təyin edilmiş sonlu funksiyadır. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olarsa ki, istənilən sonlu sayda, cüt-cüt kəsişməyən (a_1, b_1), (a_2, b_2),..., (a_n, b_n) intervallar sistemi üçün

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \tag{1}$$

şərti ödənildikdə

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{2}$$

şərti ödənsin, bu halda $f(x)$ funksiyasına mütləq kəsilməz funksiya deyilir.

Tərifdən görünür ki, mütləq kəsilməz funksiya adi mənada kəsilməzdir. Bunun üçün tərifdə $n = 1$ götürmək kifayətdir. Amma göstərəcəyik ki, bu faktın tərsi doğru deyildir. Yəni adi mənada kəsilməz funksiya mütləq kəsilməz olmaya da bilər.

Fərz edək $f(x)$ funksiyası [a, b] parçasında Lipşits şərtini ödəyir:

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|, \quad k = const$$

Onda

$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ şərtini ödəyən intervallar sistemi üçün

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| \le K \cdot \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < K\delta \tag{3}$$

olar. Əgər verilmiş $\varepsilon > 0$ üçün $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$ götürsək, onda

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

olar.

Funksiyanın mütləq kəsilməzliyinin tərifindən görünür ki, istənilən $x', x'' \in [a,b]$ üçün $|x'' - x'| < \delta$ olduqda $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ olması alınır. Bu onu göstərir ki, $f(x)$ müntəzəm kəsilməz funksiyadır. Deməli, mütləq kəsilməz funksiya nəinki kəsilməz, hətta müntəzəm kəsilməzdir. Yuxarıda qeyd etdik ki, funksiyanın adi mənada kəsilməzliyindən onun mütləq kəsilməzliyi çıxmır. İndi göstərəcəyik ki, funksiyanın nəinki adi kəsilməzliyindən, hətta müntəzəm kəsilməzliyindən onun mütləq kəsilməz olması çıxmır. Məlum Kantor teoreminə görə sonlu [a,b] parçasında kəsilməz funksiya bu parçada müntəzəm kəsilməzdir. $\theta(x)$ Kantor funksiyası da [0,1] parçasında kəsilməz olduğundan bu parçada müntəzəm kəsilməzdir. Lakin $\theta(x)$ funksiyası [0,1] parçasında mütləq kəsilməz deyildir. Bunu göstərmək üçün P_0 Kantor çoxluğuna baxaq. Məlumdur ki, P_0 mükəmməl, kontinium gücə malik olan və $mP_0 = 0$ olan çoxluqdur. P_0 çoxluğunu uzunluqları cəmi istənilən $\delta > 0$ ədədindən kiçik olan kəsişməyən (α_k, β_k), $k = 1,2,...,n$ intervalları ilə örtmək olar. Bu intervallar sistemi üçün

$$\sum_{k=1}^{n} |\theta(\beta_k) - \theta(\alpha_k)| = 1$$

olduğundan funsiya mütləq kəsilməz deyil.

Aşağıdakı mühüm teorem doğrudur.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ [a,b] parçasında mütləq kəsilməz funksiyalar isə, onda onların cəmi, fərqi, hasili və $g(x) \neq 0$ olduğu halda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbəti də mütləq kəsilməz funksiyalardır.

İsbatı. a) Cəmin və fərqin mütləq kəsilməz olması aşağıda göstərilən münasibətdən alınır:

$$|[f(b_k) \pm g(b_k)] - [f(a_k) \pm g(a_k)]| \le |f(b_k) - f(a_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|$$

Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} |[f(b_k) \pm g(b_k)] - [f(a_k) \pm g(a_k)]| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| .$$

Şərtə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ seçmək olar ki,

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \quad olduqda \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olar. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} |[f(b_k) \pm g(b_k)] - [f(a_k) \pm g(a_k)]| < \varepsilon$$

olduğunu alırıq.

b). $A=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$, $B=\max\limits_{a\le x\le b}|g(x)|$ işarə edək.

Onda alarıq:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)\cdot g(b_k)-f(a_k)g(a_k)|\le\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)|\cdot|f(b_k)-f(a_k)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}|f(a_k)|\cdot|g(b_k)-g(a_k)|\le B\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|+$$

$$+A\cdot\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|\,.$$

Şərtə görə istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ seçmək olar ki, $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta$ *olduqda* $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\dfrac{\varepsilon}{2B}$ və $\sum\limits_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\dfrac{\varepsilon}{2A}$ olsun.

Bunları nəzərə alsaq

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-g(b_k)-f(a_k)-g(a_k)|<\varepsilon$$

olduğunu alarıq.

v). Əvvəlcə $\dfrac{1}{g(x)}$ - in mütləq kəsilməz olduğunu göstərək.

$$\left|\frac{1}{g(b_k)}-\frac{1}{g(a_k)}\right|=\frac{|g(a_k)-g(b_k)|}{|g(b_k)|\cdot|g(a_k)|}\le\frac{1}{\sigma^2}|g(b_k)-g(a_k)|$$

$\varepsilon>0$ verildikdə $\delta>0$ elə seçilə bilər ki, $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta$ olduqda $\sum\limits_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\dfrac{\varepsilon}{\sigma^2}$ olsun.

Onda $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\dfrac{1}{g(b_k)}-\dfrac{1}{g(a_k)}\right|<\varepsilon$ olduğunu alarıq. Buradan $\dfrac{1}{g(x)}$ -in mütləq kəsilməz olduğunu alırıq. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)}\cdot f(x)$ bərabərliyindən nisbətin mütləq kəsilməz olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

8.2. Mürəkkəb funksiyanın mütləq kəsilməzliyi

İndi isə mütləq kəsilməz funksiyaların superpozisiyasının (mürəkkəb funksiyasının) mütləq kəsilməz olduğu aşağıdakı sadə hallara baxaq.

Teorem 1. Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş mütləq kəsilməz $f(x)$ funksiyasının qiymətləri $[A,B]$ parçasına daxildir. Əgər $F(y)$ $[A,B]$ parçasında təyin edilmiş Lipşits şərtini ödəyən funksiya isə, onda $F[f(x)]$ mürəkkəb funksiyası da mütləq kəsilməz funksiyadır.

İsbatı. Şərtə görə istənilən $y', y'' \in [A,B]$ üçün $|F(y'')-F(y')| \le K|y''-y'|$ olduğundan, cüt – cüt kəsişməyən istənilən sonlu (a_k, b_k) intervallar sistemi üçün $\sum_{k=1}^{n}|b_k - a_k| < \delta$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{n}|F[f(b_k)]-F[f(a_k)]| \le K\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| \quad \text{və} \quad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{K}$$

bərabərsizliklərindən

$\sum_{k=1}^{n}|F[f(b_k)]-F[f(a_k)]| < \varepsilon$ olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında verilmiş mütləq kəsilməz $f(x)$ funksiyası ciddi artan funksiyadır. Əgər $F(y)$ $[f(a), f(b)]$ parçasında mütləq kəsilməz funksiya isə, onda mürəkkə $F[f(x)]$ funksiyası da mütləq kəsilməz funksiyadır.

İsbatı. İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini götürək. Onda elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, cüt–cüt kəsişməyən (A_k, B_k) intervallar sistemi üçün $\sum_{k=1}^{n}|B_k - A_k| < \delta$ olduqda $\sum_{k=1}^{n}|F(B_k)-F(A_k)| < \varepsilon$ şərti ödənilər. Tapılmış $\delta > 0$ ədədinə görə elə η ədədi vardır ki, kəsişməyən (a_k, b_k) intervallar sistemi üçün $\sum_{k=1}^{n}|b_k - a_k| < \eta$ olduqda $\sum_{k=1}^{n}[f(b_k)-f(a_k)] < \delta$ şərti ödənilir.

Qeyd edək ki, (a_k, b_k) intervalları kəsişməyən intervallar sistemi olduqda və onların uzunluqları cəmi η -dan kiçik olduqda $(f(b_k), f(a_k))$ intervalları da cüt–cüt kəsişməyən olar və uzunluqları cəmi δ -dan kiçik olar. Onda $F(y)$ -in mütləq kəsilməzliyinə görə $\sum_{k=1}^{n}|F[f(b_k)]-F[f(a_k)]| < \varepsilon$ olduğunu alarıq. Bu isə $F[f(x)]$-in mütləq kəsilməz olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Qeyd: Ümumi halda istənilən iki mütləq kəsilməz funksiyanın superpozisiyası mütləq kəsilməz olmaya bilər.

8.3. Mütləq kəsilməz funksiyanın diferensial xassələri

Teorem 1. $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz funksiya məhdud variasiyalı funksiyadır.

İsbatı. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz olduğundan $\varepsilon = 1$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, cüt–cüt kəsişməyən $\{(a_k, b_k)\}$ intervallar sistemi üçün $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ olduqda $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1$ olsun. $[a,b]$ parçasını $a = c_0 < c_1 < c_2 < ...c_N = b$ nöqtələri vasitəsi ilə elə hissələrə bölək ki, $c_{k+1} - c_k < \delta$ $(k = 0,1,...N-1)$ olsun. Onda $[c_k, c_{k+1}]$ parçasının istənilən bölgüsü zamanı bu parça daxilində $f(x)$- in tam artımı 1 – dən kiçik olar, yəni $\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) \leq 1$ olar.

Onda son nəticədə $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq N$ olar. Bu isə $f(x)$- in məhdud variasiyalı funksiya olduğunu göstərir.Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı mühüm nəticələr çıxır:

Nəticə 1. Bu teoremdən bir daha kəsilməz olan, amma mütləq kəsilməz olmayan funksiyaların varlığı alınır.

Nəticə 2. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz isə, onda $[a,b]$ parçasının sanki bütün nöqtələrində sonlu və cəmlənən $f'(x)$ törəməsi vardır.

Teorem 2. Əgər mütləq kəsilməz $f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsi $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə sıfra bərabər isə, onda $f(x)$ funksiyası sabitdir.

İsbatı. Fərz edək ki, $f(x)$ artan funksiyadır. Onda $f(x)$ funksiyasının aldığı qiymətlər çoxluğu bütün $[f(a), f(b)]$ parçası olar. Göstərək ki, sanki bütün $x \in [a,b]$ üçün $f'(x) = 0$ olduqda $f(a) = f(b)$ olur.

E ilə $[a,b]$ parçasının $f'(x) = 0$ olan nöqtələri çoxluğunu işarə edək. Onda $P = [a,b]/E$ çoxluğu $mP = 0$ şərtini ödəyər. Teoremin şərtinə görə $f(x)$ mütləq kəsilməz olduğundan istənilən $\varepsilon = 1$ ədədi verildikdə elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, P çoxluğunu örtən və uzunluqları cəmi δ ədədindən kiçik olan cüt–cüt kəsişməyən elə $(a_k, b_k), k = 1,2,...n$ intervallar sistemi vardır ki, $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ olduqda $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ olsun. Buradan $mf(P) = 0$ olması alınır.

Tutaq ki, $x_0 \in E$, yəni $f'(x_0) = 0$. Onda tərifə görə kifayət qədər kiçik $h > 0$ ədədi üçün

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<\varepsilon .$$

Buradan $h=x-x_0>0$ üçün $f(x)-f(x_0)<\varepsilon x-\varepsilon x_0$ alınır.

Əgər $g(x)=\varepsilon x-f(x)$ işarə etsək $g(x_0)<g(x)$ alarıq. Riss lemmasına görə E çoxluğunu örtən sonlu və ya hesabi sayda (a_k, b_k), $k=1,2,...$ intervalları üçün

$g(a_k)\le g(b_k)$, $k==1,2...$ və ya $\varepsilon a_k-f(a_k)\le \varepsilon b_k-f(b_k)$, $k=1,2,...$

buradan $f(b_k)-f(a_k)\le\varepsilon(b_k-a_k)$ olduğundan

$$\sum_k(f(b_k)-f(a_k))\le\varepsilon\sum_k(b_k-a_k)\le\varepsilon(b-a) .$$

Beləliklə, alırıq ki, E çoxluğunu örtən (a_k, b_k), $k=1,2...$ intervallar sisteminin obrazı $\varepsilon(b-a)$ ədədindən kiçik olur. ε ixtiyari kiçik ədəd olduğundan $mf(E)=0$ olur. $[f(a), f(b)]=f(P)\cup f(E)$ və $mf(P)=mf(E)=0$ olduğunu nəzərə alsaq, $f(a)=f(b)$ olar. Yəni $f(x)$ sabitdir.Teorem isbat olundu.

Teoremdən aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə. $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün $f'(x)\sim g'(x)$olarsa, bu halda $f(x)=g(x)+c$ olar.

Qeyd. $\theta(x)$ Kantor funksiyası $[0,1]$ parçasında monoton artan, kəsilməz və sanki bütün $x\in[0,1]$ üçün $\theta'(x)=0$ olduğuna baxmayaraq sabit funksiya deyildir. Buna səbəb $\theta(x)$ funksiyasının mütləq kəsilməz olmamasıdır.

8.4. Qeyri – müəyyən Lebeq inteqralı və onun mütləq kəsilməzliyi

Tutaq ki, $f(t)$ $[a,b]$ parçasında verilmiş cəmlənən funksiyadır.

$$\Phi(x)=c+\int_a^x f(t)dt$$

funksiyasına $f(t)$funksiyasının qeyri – müəyyən inteqralı deyilir. Bu funksiya yuxarı sərhəddi dəyişən inteqral vasitəsilə təyin edilir. $f(t)$ funksiyasının sonsuz sayda qeyri – müəyyən inteqralları vardır və bunlar bir – birindən sabit qədər fərqlənirlər.

Teorem 1. $\Phi(x)$ qeyri – müəyyən inteqralı mütləq kəsilməz funksiyadır.

İsbatı. Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzlik xassəsinə görə (VI fəsil, §3.), istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ vardır ki, $me<\delta$ şərtini ödəyən istənilən e ölçülən çoxluğu üçün

$$\left|\int_e f(t)dt\right| < \varepsilon .$$

Xüsusi halda əgər cüt–cüt kəsişməyən (a_k, b_k) intervallarının uzunluqları cəmi δ – dan kiçik olarsa, bu halda

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

olar.

Əgər $\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k)$ olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{\Phi(b_k) - \Phi(a_k)\}\right| < \varepsilon$$

alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ qeyri–müəyyən inteqralının $[a,b]$ parçasının sanki bütün nöqtələrində törəməsi vardır və $\Phi'(x) = f(x)$ bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. $p < q$ rasional ədədlərini götürək. $E_{p,q}$ ilə $[a,b]$ parçasının elə nöqtələri çoxluğunu işarə edək ki, bu nöqtələrdə $\Phi(x)$ funksiyası diferensiallanan olsun və $\Phi'(x)$ törəməsi $\Phi'(x) > q > p > f(x)$ şərtini ödəsin. $f(x)$ və $\Phi'(x)$ ölçülən funksiyalar olduğundan $E_{p,q}$ çoxluqları da ölçülən çoxluqlardır. Göstərək ki, $mE_{p,q} = 0$. Bu məqsədlə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və elə $\delta > 0$ ədədi tapaq ki, $me < \delta$ olduqda

$$\left|\int_e f(t)dt\right| < \varepsilon$$

şərti ödənilsin. Elə açıq $G \subset [a,b]$ çoxluğu quraq ki,
$E_{p,q} \subset G$, $mG < mE_{p,q} + \delta$ olsun.

Əgər $x \in E_{p,q}$ olarsa, onda kifayət qədər kiçik bütün $h > 0$ ədədləri üçün

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} > q \tag{1}$$

$[x, x+h]$ parçaları $E_{p,q}$ çoxluğunu örtən parçalardır. (belə ki, $h > 0$ (1) şərtini ödəyən ədəddir).

Hesab etmək olar ki, bütün $[x, x+h]$ parçaları G çoxluğu daxilində yerləşirlər. Onda bu parçalardan hesabi sayda elə $[x_1, x_1 + h_1]$, $[x_2, x_2 + h_2]$,..., $[x_n, x_n + h_n]$,... parçaları ayırmaq olar ki,

$$m\left\{E_{p,q}\left|\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[x_k, x_k + x_k + h_k\right]\right.\right\} = 0$$

olsun. (1) bərabərliyinə görə aşağıdakı bərabərsizliyi yaza bilərik:

$$\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h} f(t)dt > q.$$

Əgər $S = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[x_k, x_k + x_k + h_k\right]$ işarə etsək, onda sonuncu bərabərsizlikdən $\int_S f(t)dt > q \cdot mS$ yaxud

$$\int_S f(t)dt > q\left[mE_{p,q} + \theta \cdot \varepsilon\right], \ (0 \le \theta \le 1) \tag{2}$$

olduğunu alarıq.

Digər tərəfdən $S \subset G$, $S\left|E_{p,q} \subset G\right|E_{p,q}$ və $m(S / E_{p,q}) < \delta$ olduğundan

$$\int_{S/E_{p,q}} f(t)dt < \varepsilon$$

yaxud

$$\int_S f(t)dt < \int_{E_{p,q}} f(t)dt + \varepsilon \tag{3}$$

olduğunu alarıq.

$E_{p,q}$ çoxluğunda $f(t) < p$ olduğundan

$$\int_{E_{p,q}} f(t)dt \le pm\,E_{p,q} \tag{4}$$

alarıq. (2), (3) və (4) bərabərsizliklərindən alınır ki,

$$q\left[mE_{p,q} + \theta.\varepsilon\right] < p.mE_{p,q} + \varepsilon,$$

buradan $\varepsilon -$un ixtiyariliyinə görə $q \cdot mE_{p,q} < pmE_{p,q}$ olduğunu alarıq. Bu isə yalnız $mE_{p,q} = 0$ olduqda mümkündür. Beləliklə, $mE_{p,q} = 0$ olduğunu alırıq.

$[a,b]$ parçasının $\Phi(x)-$ in diferensiallanan olduğu və $\Phi'(x) > f(x)$ şərtini ödədiyi bütün nöqtələr çoxluğunu E ilə işarə edək.

Aydındır ki, $E = \bigcup_{(p,q)} E_{p,q}$, belə ki, bu birləşmə indeksləri $p < q$ şərtini ödəyən bütün $(p,\, q)$ rasional ədədlər cütü üzrə aparılır. Onda $mE = \sum_{(p,q)} mE_{p,q} = 0$ olduğunu alarıq.

Əgər A ilə $\Phi'(x)$ törəməsinin olduğu bütün nöqtələr çoxluğunu işarə etsək, A çoxluğunda sanki hər yerdə

$$\Phi'(x) \le f(x) \tag{5}$$

şərti ödənilər.

$g(x) = -f(x)$ qəbul edək və $\Gamma(x) = \int_a^x g(x)dx$ işarə edək. Göründüyü kimi $\Gamma(x) = -\Phi(x)$. Ona görə də A-nın sanki bütün nöqtələrində $\Gamma'(x)$ törəməsi vardır və $\Gamma'(x) \le g(x)$. Buradan

$$\Phi'(x) \ge f(x) \tag{6}$$

olduğunu alırıq. Son nəticədə (5) və (6)–dan A çoxluğunda, eyni zamanda $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə

$$\Phi'(x) = f(x).$$

olduğunu almış olarıq.

Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Mütləq kəsilməz funksiya öz törəməsinin qeyri–müəyyən inteqralına bərabərdir.

İsbatı: Tutaq ki, $F(x)$ mütləq kəsilməz funksiyadır. Onun $F'(x)$ törəməsi sanki hər yerdə vardır və cəmlənən funksiyadır.

$\Phi(x) = F(a) + \int_a^x F'(x)dx$ funksiyasını götürək. Bu funksiya da mütləq kəsilməz funksiyadır və sanki hər yerdə $\Phi'(x) = F'(x)$. Məlum teoremə (§8.3, teorem 2) görə $F(x) - \Phi(x)$ fərqi sabitə bərabərdir. $x = a$ olduqda $\Phi(a) = F(a)$ olduğundan $\Phi(x) = F(x)$ olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

8.5. Funksiyanın Lebeq nöqtəsi

Tərif. Əgər $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş və Lebeq mənada inteqrallanan $f(x)$ funksiyası üçün $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsində $f(x_0) \ne \infty$ olarsa və

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} | f(t) - f(x) | dt = 0$$

şərti ödənərsə, onda x_0 nöqtəsinə $f(x)$ funksiyasının Lebeq nöqtəsi deyilir.

Asanlıqla görə bilərik ki, əgər $f(x)$ funskiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz isə, onda bu nöqtə funksiyanın Lebeq nöqtəsi olar. Doğrudan funksiya x_0

nöqtəsində kəsilməz isə, onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $|x - x_0| < \delta$ olduqda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Onda $|h| < \delta$ olduqda,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Bu isə x_0-in Lebeq nöqtəsi olması deməkdir.

Teorem 1. Tutaq ki, $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının Lebeq nöqtəsidir. Onda $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi vardır və $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

İsbatı. Aydındır ki,

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt,$$

Buradan

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} | f(t) - f(x_0)| dt$$

Bu bərabərsizlikdən $h \to 0$ şərtində $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. $[a,b]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanan $f(x)$ funksiyası üçün sanki bütün $x_0 \in [a,b]$ nöqtələri Lebeq nöqtəsidir.

İsbatı: Tutaq ki, r – hər hansı rasional ədəddir. $|f(t) - r|$ funksiyası $[a,b]$ parçasında cəmlənəndir və sanki bütün $x_0 \in [a,b]$ üçün

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \int_{x_0} | f(t) - r | dt = | f(x) - r | . \tag{1}$$

$E(r)$ ilə $[a,b]$ parçasının (1) bərabərliyinin ödənmədiyi bütün nöqtələri çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, $mE(r) = 0$. $[a,b]$ parçasındakı bütün rasional ədədləri nömrələyək və $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(r_n) \cup E(|f| = +\infty)]$ işarə edək.

Onda $mE = 0$ və $[a,b]/E$ çoxluğunun bütün nöqtələri $f(t)$ funksiyasının Lebeq nöqtəsidir.

Tutaq ki, $x_0 \in [a,b]/E$. istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və elə r_n rasional ədədi tapaq ki, $|f(x_0)-r_n|<\frac{\varepsilon}{3}$ olsun. Onda aydındır ki, $|f(t)-r_n|-|f(t)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ olar və $\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|dt-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{3}$.

$x_0 \in \overline{E}$ olduğundan $|h|<\delta(\varepsilon)$ olduqda

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|dt-|f(x_0)-r_n|\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

yəni

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|dt<\frac{2}{3}\varepsilon,$$

və bu bərabərsizliyi ödəyən h ədədləri üçün

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt<\varepsilon$$

alarıq. Bu isə x_0 nöqtəsinin Lebeq nöqtəsi olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

8.6. Məhdud variasiyalı funksiyanın ayrılışı

Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiya, $x_1, x_2, ..., x_n ...$ bu funksiyanın kəsilmə nöqtələri, $S(x)$ isə uyğun sıçrayış funksiyasıdır:

$$S(a)=0,$$

$$S(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$

$$+[f(x)-f(x-0)],\ a<x<b \tag{1}$$

$\varphi(x)=f(x)-S(x)$ işarə edək. §7.2 teorem 6 – ya görə $\varphi(x)$ kəsilməz, məhdud variasiyalı funksiyadır. Buradan

$$f(x)=\varphi(x)+S(x) \tag{2}$$

alırıq, yəni hər bir məhdud variasiyalı funksiya kəsilməz məhdud variasiyalı funksiya ilə onun sıçrayış funksiyasının cəmi şəklində göstərilə bilər.

Tutaq ki, $\varphi(x)$ kəsilməz və məhdud variasiyalı funksiyadır. Onda $\psi(x)=\int_a^x \varphi'(t)dt$ funksiyası mütləq kəsilməz funksiya olar.

$$\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x) \tag{3}$$

işarə edək. Bu funksiya da kəsilməz və məhdud variasiyalı funksiya olduğundan sanki bütün $x_0 \in [a,b]$ üçün

$$\chi'(x)=\varphi'(x)-\psi'(x)=\varphi'(x)-\left(\int_a^{xx}\varphi'(t)dt\right)'=\varphi'(x)-\varphi'(x)=0$$

Tərif. Törəməsi sanki bütün $x_0 \in [a,b]$ nöqtələrində sıfra bərabər olan, sabitdən fərqli, kəsilməz və məhdud variasiyalı funksiyaya sinqulyar funksiya deyilir.

Sinqulyar funksiya mütləq kəsilməz ola bilməz. Çünki, məlum teoremə görə əgər mütləq kəsilməz funksiyanın törəməsi sanki hər yerdə sıfra bərabər olarsa, onda funksiya sabitə bərabər olar. Sinqulyar funksiya isə sabitdən fərqlidir. Məsələn Kantor funksiyası $\theta(x)$ sinqulyar funksiyadır. Bu funksiya kəsilməz və monoton artan funksiyadır. Ona görə də məhdud variasiyalı funksiyadır. Bu funksiya üçün sanki bütün $x_0 \in [a,b]$ nöqtələrində $\theta'(x_0)=0$ şərti ödənilir.

Əgər (3) bərabərliyindən $\varphi(x)=\chi(x)+\psi(x)$ tapıb (2) bərabərliyində yerinə yazsaq, onda

$$f(x)=\psi(x)+\chi(x)+S(x) \tag{4}$$

alarıq. Beləliklə, aşağıdakı teoremin doğru olduğunu alırıq:

Teorem. $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı hər bir $f(x)$ funksiyasını

$$f(x)=\psi(x)+\chi(x)+S(x) \tag{5}$$

şəklində göstərmək olar. Burada $\psi(x)-$ mütləq kəsilməz, $\chi(x)-$ sinqulyar və $S(x)$ sıçrayış funksiyalarıdır.

Bu ayrılışla əlaqədar olaraq məhdud variasiyalı funksiyaların doğurduğu Stiltes ölçüsünü də üç sinfə ayırmaq olar:

I. Tutaq ki, $\psi(x)$ azalmayan mütləq kəsilməz funksiyadır. Onda bu funksiyanın $[a,b]$ parçasının sanki bütün nöqtələrində Lebeq mənada inteqrallanan $\psi'(x)=r(x)$ törəməsi vardır. Törəmənin olmadığı nöqtələrdə

$r(x)=0$ qəbul etməklə $r(x)$ funksiyasını bütün $x\in[a,b]$ nöqtələrində təyin etmək olar. Onda $[a,b]$ parçasında hər bir ölçülən A çoxluğu üçün

$$\mu_\psi(A)=\int_A r(x)dx \tag{6}$$

inteqralının mənası vardır. Bu inteqral vasitəsilə təyin olunan $\mu_\psi(A)$ ədədinə A çoxluğunun ölçüsü deyilir. Lebeq inteqralının məlum xassəsinə görə $mA=0$ olduqda $\mu_\psi(A)=0$ olur. Mütləq kəsilməz $\psi(x)$ funksiyası vasitəsilə təyin olunan $\mu_\psi(A)$ ölçüsünə mütləq kəsilməz ölçü deyilir.

Göstərək ki, A çoxluğunun $B=\psi(A)$ obrazının Lebeq mənada ölçüsü (6) düsturu vasitəsilə hesablana bilər. $A=(\alpha,\beta)$ intervalı olduqda $\psi(A)==(\psi(\alpha),\psi(\beta))$ olur. Onda $mB=m\psi(A)=\psi(\beta)-\psi(\alpha)=\int_\alpha^\beta r(x)dx.$
A açıq çoxluq, (α_k,β_k) $(k=1,2,...)$ isə onun təşkiledici intervalları olduqda, yəni $A=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k)$ olduqda $B=\psi(A)=\bigcup_k(\psi(\alpha_k),\psi(\beta_k))$ və

$$mB=\sum_k[\psi(\beta_k)-\psi(\alpha_k)]=\sum_k\int_{\alpha_k}^{\beta_k}r(x)dx=\int_A r(x)dx.$$

Əgər A qapalı çoxluq olarsa, bu halda da $B=\psi(A)$ çoxluğu üçün də

$$mB=\int_A r(x)dx \tag{7}$$

düsturu doğru olar.

Tutaq ki, A istənilən ölçülən çoxluqdur. $P\subset A\subset G$ şərtini ödəyən P qapalı və G açıq çoxluğu üçün $\psi(B)\subset\psi(A)\subset\psi(G)$. İxtiyari $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə P və G çoxluqlarına baxaq ki, $mB-\varepsilon<m\psi(P)$ və $m\psi(G)<mB+\varepsilon$ olsun. Onda $r(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$ üçün

$$mB-\varepsilon<m\psi(P)=\int_P r(x)dx\leq\int_A r(x)dx\leq\int_G r(x)dx=m\psi(G)<mB+\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ ixtiyari ədəd olduğundan bu münasibətdən (7) bərabərliyinin doğru olduğunu alırıq.

Tutaq ki, $r(x)=0,\ x\in G,\ e=A/G$ və $mB=0$. Onda (7) bərabərliyinə əsasən

$$0=\int_A r(x)dx=\int_G r(x)dx+\int_e r(x)dx=\int_e r(x)dx\,.$$

$x\in e$ üçün $r(x)>0$ olduğundan $me=0$ alırıq.

II. Tutaq ki, $X(x)$ sinqulyar funksiyadır. Əgər $X(x)$ fnksiyasının törəməsi olmadığı nöqtələr çoxluğunu A_0 ilə işarə etsək, onda $mA_0 = 0$ olar.
$A \subset [a,b]$ çoxluğu üçün

$$\mu_X(A) = \int_E dX(x),\ E = A \cap A_0 \tag{8}$$

qəbul edək. Bu qayda isə təyin edilmiş $\mu_X(A)$ ədədinə A çoxluğunun ölçüsü deyilir. Bu ölçü sinqulyar ölçü adlanır.
Məsələn, P_0 Kantorun mükəmməl çoxluğu və $\theta(x)$ Kantor funksiyası üçün $mP_0 = 0$. $A \subset [0,1]$çoxluğunun ölçüsünü

$$\mu_\theta(A) = \int_E d\theta(x),\ E = A \cap P_0$$

düsturu ilə hesablamaq olar.
III. Tutaq ki, $S(x)$ sıçrayış funksiyası, $x_1, x_2, ..., x_n ...$ kəsilmə nöqtələri, $h_1, h_2, ..., h_n ...$ isə funksiyanın kəsilmə nöqtələrindəki sıçrayışlarıdır. Onda hər bir $A \subset [a,b]$ çoxluğunun ölçüsü

$$\mu_S(A) = \sum_{x_k \in A} h_k \tag{9}$$

düsturu vasitəsilə təyin edilir. Xüsusi halda A çoxluğu bir x_k nöqtəsindən ibarət olarsa, onun ölçüsü h_k ədədinə bərabər olar.

Sıçrayış funksiyasının doğurduğu (9) ölçüsünə diskret ölçü deyilir.

Göstərilən üç qaydada təyin olunan bu ölçülər $\sigma -$ additiv ölçülərdir.

Doğrudan da $A_1, A_2, ..., A_n ...$ çoxluqları cüt–cüt kəsişməyən çoxluqlar olarsa, bu halda diskret ölçü üçün

$$\mu_S\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_{x_i \in \bigcup_k A_k} h_i = \sum_k \sum_{x_i \in A} h_i = \sum_k \mu_S(A_k).$$

alarıq. Bu diskret ölçünün additivliyini göstərir. Digər ölçüləri də eyni üsulla göstərə bilərik. Beləliklə, aşağıdakı nəticəyə gəlirik:
Nəticə. Hər bir məhdud variasiyalı funksiya üç növ ölçü: mütləq kəsilməz, sinqulyar və diskret ölçü doğurur.

8.7. Lebeq inteqralında dəyişənin əvəz edilməsi

Məlum olduğu kimi Riman inteqralınının əsas hesablama üsullarından biri dəyişənin əvəz edilməsi üsuludur.

İndi göstərək ki, Lebeq mənada inteqrallanan bəzi sinif funksiyalar üçün Lebeq inteqralında da analoji əvəzetmə üsulu doğrudur.

Teorem. Tutaq ki, $x=\varphi(t)$ funksiyası $[\alpha,\beta]$ parçasında mütləq kəsilməz və ciddi monoton artan funksiyadır, belə ki, $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$. Onda $[a,b]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanan $f(x)$ funksiyası üçün

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{1}$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. Aşağıdakı hallara baxaq:

1) Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir. Onda $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqralı vardır. Bu inteqralı hesablamaq üçün $[a,b]$ parçasını $a=x_0<x_1<x_2<...x_n=b$ bölgü nöqtələri ilə hissələrə bölək. $m_k=\inf\limits_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]} f(x),\ M_k=\sup\limits_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]} f(x)\cdot(k=0,1,2...n-1)$ $[a,b]$parçasının bu bölgüsünə uyğun olaraq $[\alpha,\beta]$ parçası da $[t_k,t_{k+1}]$ hissələrinə bölünər, belə ki, $\varphi(t_k)=x_k\,(k=0,1,2...n-1)$.

Onda $t\in[t_k,t_{k+1}]$ üçün

$$m_k\le f[\varphi(t)]\le M_k \tag{2}$$

olar. Digər tərəfdən $\varphi'(t)\ge 0$ olduğundan

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi'(t)dt=x_{k+1}-x_k\,.$$

Onda Lebeq inteqralının orta qiymət xassəsinə görə alarıq:

$$m_{ki}(x_{k+1}-x_k)\le (L)\int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\le M_k(x_{k+1}-x_k)$$

Buradan

$$s\le (L)\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\le S\,, \tag{3}$$

alarıq.

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k\,,\quad S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k\,.$$

$\lambda=\max(x_{k+1}-x_k)$ işarə edək.

$\lambda\to 0$ şərtində limitə keçsək və $\lim\limits_{\lambda\to 0}(s-S)=0$ olduğunu nəzərə alsaq, (1) bərabərliyini alarıq.

2) Tutaq ki, $f(x)$ ölçülən və məhdud funksiyadır. $|f(x)|\le M\,,\ x\in[a,b]$.

Onda sanki bütün $x \in [a,b]$ nöqtələrində $f(x)$ -ə yığılan kəsilməz $\{g_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı seçmək olar, yəni,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x), \ |g_n(x)| \le M, \ x \in [a,b] \tag{4}$$

(4) bərabərliyinin ödənmədiyi $x \in [a,b]$ nöqtələr çoxluğunu E ilə işarə edək. Şərtə görə $mE = 0$.
e ilə

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\varphi(t))\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) \tag{5}$$

bərabərliyinin ödənmədiyi $t \in [\alpha,\beta]$ nöqtələr çoxluğunu işarə edək: $\varphi(e) = E$. Onda mütləq kəsilməz $\varphi(t)$ funksiyasının doğurduğu ölçüyə görə

$$mE = \int_e \varphi'(t)dt, \quad \varphi'(t) > 0, \ t \in e$$

olar. Buradan $me = 0$ alırıq. Ölçülən funksiyalar ardıcıllığının sanki hər yerdə limiti olan $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ ölçülən funksiyadır. Onda

$$|\, g_n[\varphi(t)]\varphi'(t) \,| \le |\, f[\varphi(t)]\varphi'(t) \,| \le M |\, \varphi'(t) \,| \, , \ t \in [\alpha,\beta]$$

olduğundan inteqral altında limitə keçmək olar. Nəticədə $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ – nin Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu və

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta g_n[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

bərabərliyini alarıq.
3) Tutaq ki, $f(x)$ mənfi olmayan Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır. (Əgər funksiya müsbət olmazsa, onda onu iki mənfi olmayan inteqrallanan funksiyanın fərqi şəklində göstərmək olar).

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le n \quad olduqda \\ n, & f(x) > n \quad olduqda \end{cases}$$

funksiyaları təyin edək.
2) -ci bəndə əsasən

$$\int_a^b f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \ n = 1,2,3...$$

olduğunu alarıq. Baxılan halda hər bir $t \in [\alpha,\beta]$ üçün

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t) = \lim_{n\to\infty} f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

olduğundan və $f_n[\varphi(t)]$, $n=1,2,3...$ funksiyaları artan və mənfi olmayan funksiyalar olduğundan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

8.8. Mütləq kəsilməz funksiyalara aid misallar

1. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz funksiyadır. Onda göstərin ki, a) $|f(x)|$, b) $|f(x)|^P$, $p>1$ funksiyaları da mütləq kəsilməz funksiyalardır.
Göstəriş: a) halında $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$ bərabərsizliyindən, b) halında isə $\big||a|^P-|b|^P\big|\le p\cdot c^{p-1}$, $c=\max(|a|,|b|)$ bərabərsizliyindən istifadə edin.

2. Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz, $|f(x)|$ isə mütləq kəsilməzdir. Onda $f(x)$ funksiyasının da mütləq kəsilməz olduğunu göstərin.
Göstəriş: Kəsilməz funksiyanın nöqtə ətrafında öz işarəsini saxlamaq xassəsindən istifadə edin.

3. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(-\infty,\infty)$ intervalında Lipşits şərtini ödəyir, $x=\varphi(x)$ funksiyası isə $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməzdir. Göstərin ki, $f[\varphi(t)]$ mürəkkəb funksiyası da mütləq kəsilməzdir.
Göstəriş: $\sum\limits_{k=1}^{n}|f[\varphi(\beta_k)]-f[\varphi(\alpha_k)]|\le k\sum\limits_{k=1}^{n}|\varphi(\beta_k)-\varphi(\alpha_k)|$ bərabərsizliyindən istifadə edin.

4. Tutaq ki, $f(x)=\begin{cases}0, & x=0 \quad olduqda\\ -\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x<\dfrac{1}{2} \quad olduqda\end{cases}$

funksiyası verilmişdir.
Göstərin ki, a) funksiya kəsilməz və ciddi monoton artandır:

b) məhdud variasiyalıdır, $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}}(f)$ tapın.

c) mütləq kəsilməzdir.

d) Lipşits şərtini ödəmir.

Göstəriş: a) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$, $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1)< f(x_2)$

b) monoton funksiya məhdud variasiyalıdır, $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}}(f)$.

c) $f'(x)=\dfrac{1}{xx\ln^2 x}$ törəməsi inteqrallanandır.

d) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{|f(x)-f(0)|}{x}=+\infty$

IX FƏSİL
SOBOLEV FƏZALARI.DAXİLOLMA TEOREMLƏRİ
9.1. Ortalaşdıran nüvə anlayışı

Yuxarıda biz cəmlənən və kvadratı ilə cəmlənən funksiyalardan ibarət olan L_1 və L_2 fəzalarını daxil etdik və onların bəzi xassələrini öyrəndik. İndi isə bu fəzalara daxil olan funksiyalar üçün ortalaşdırma anlayışını daxil edəcəyik. Bu anlayışın köməyi ilə biz L_1 və L_2 fəzalarında bu fəzalarda təyin edilmiş məsafəyə görə götürülmüş funksiyaya kifayət qədər yaxın olan sonsuz diferensiallanan funksiyaların qurulmasının mümkünlüyünü isbat edəcəyik.

Əvvəlcə bir həqiqi dəyişəndən asılı $f(t)$ funksiyası üçün ortalaşdıran nüvə anlayışını daxil edək.

Aşağıdakı bərabərlik vasitəsilə $\omega(t)$ funksiyası təyin edək:

$$\omega(t)=\begin{cases} c\,e^{\frac{1}{t^2-1}}, & t^2<1 \ olduqda, \\ 0 \quad , & t^2\geq 1 \ olduqda. \end{cases} \tag{1}$$

c sabitini sonralar təyin edəcəyik. Göründüyü kimi bu funksiyanın $t^2\neq 1$ nöqtələrində kəsilməz olması aydındır. Bu funksiyanın və onun törəmələrinin $t=\pm 1$ nöqtələrində kəsilməzliyini araşdıraq. $|t|<1$ şərtində $t^2\to 1$ olduqda $\frac{1}{(t^2-1)}\to -\infty$ və $\omega(t)\to\infty$ olması aşkardır. $\omega(t)$ funksiyasının istənilən tərtibli törəməsi $t^2<1$ olduqda aşağıdakı şəkildədir:

$$\frac{P(t)}{(t^2-1)^{\alpha}}\,e^{\frac{1}{t^2-1}}$$

Burada $P(t)$ hər hansı çoxhədlidir və α tam müsbət ədəddir. $t^2\to 1$ $(|t|<1)$ şərtində qeyri – müəyyənliyi açsaq $(t^2-1)^{-\alpha}e^{\frac{1}{t^2-1}}$ ifadəsinin sıfra yaxınlaşdığını görərik. Beləliklə görürük ki, $\omega(t)$ funksiyasının $-\infty<t<\infty$ qiymətlərində bütün tərtib törəmələri vardır.

İndi isə $x=(x_1,x_2...x_m)$, $y=(y_1,y_2...y_m)$ dekart koordinatlarına malik E_m fəzasına baxaq. Bu nöqtələr arasında məsafəni

$$r=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_m-y_m)^2}$$

kimi təyin edək. Tutaq ki, $h>0$ istənilən ədəddir.

Tərif. $\omega_h(r)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödədikdə ona ortalaşdıran nüvə deyəcəyik.

1) $\omega_h(r)$ funksiyası x və y dekart koordinatlarına nəzərən sonsuz diferensiallanan funksiyadır. Qeyd edək ki, $r \neq 0$ olduqda bu şərtin ödənməsi üçün zəruri və kafi şərt baxılan funksiyanın r dəyişəninə görə sonsuz diferensiallanan olmasıdır;

2) $r < h$ olduqda $\omega_h(r) > 0$ və $r \geq h$ olduqda $\omega_h(r) = 0$ olmalıdır;

3) $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)dy = \int\limits_{r<h} \omega_h(r)dx = 1$.

Məsələn, göstərək ki,

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h \, e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}, & r < h \,, \quad c_h = const > 0 \,; \\ 0, & r \geq h \quad olduqda \end{cases} \qquad (2)$$

funksiyası yuxarıdakı şərtləri ödəyir.

2) şərtinin ödənməsi aydındır.

Əgər $c_h = \left(\int\limits_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}} dy \right)^{-1}$ qəbul etsək 3) şərti də ödənər.

1) şərtinin ödənməsini göstərək:

(2) şəklində təyin edilmiş funksiyanın $r < h$ və $r > h$ olduqda sonsuz diferensiallanan olması aydındır, belə ki, $r > h$ olduqda bütün törəmələr sıfra bərabərdir. Ona görə də funksiyanın r dəyişəninə görə bütün tərtibdən törəmələrinin varlığını və $r = h$ olduqda sıfra bərabər olduğunu, eləcə də $r < h$ olduqda $r \to h$ şərtində bütün törəmələrin də sıfra yaxınlaşdığını göstərmək kifayətdir.

Bu faktın birinci tərtib törəmə üçün doğru olduğunu göstərək; Yüksək tərtib törəmələr üçün həmin faktı analoji üsulla göstərmək olar.

a) $\omega_h(r)$ funksiyası $r = h$ olduqda kəsilməzdir. Doğrudan da, (2) düsturundan görünür ki, $\omega_h(h+0) = 0 = \omega_h(h)$. Eləcə də,

$$\omega_h(h-0) = \lim_{r \to h-0} c_n \, e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}} = 0 \,,$$

çünki $-\dfrac{h^2}{h^2 - r^2}$ ifadəsi $r \to h - 0$ şərtində $-\infty$-a yaxınlaşır.

b) $\omega_h'(r)$ vardır və sıfra bərabərdir. Doğrudan da

$$\lim_{r \to h+0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r - h} = \lim_{r \to h+0} 0 = 0,$$

Eyni zamanda

$$\lim_{r\to h-0}\frac{\omega_h(r)-\omega_h(h)}{r-h}=\lim_{r\to h-0}\frac{e^{-\frac{h^2}{r^2-h^2}}}{r-h}=0$$

olduğundan

$$\lim_{r\to h}\frac{\omega_h(r)-\omega_h(h)}{r-h}=\omega_h'(h)$$

limiti vardır və sıfra bərabərdir, yəni $\omega_h'(h)=0$.
Beləliklə, istənilən r üçün $\omega_h'(r)$ törəməsinin varlığını və kəsilməzliyini alırıq. Analoji üsulla digər törəmələrin də varlığını və kəsilməzliyini göstərə bilərik. Bu qayda ilə (1) şərtinin də doğru olduğunu alırıq.

9.2. Orta funksiya və onun əsas xassələri

Tutaq ki, $\Omega\subset E_m$ hər hansı sonlu oblastdır və $u(y)$ D oblastında cəmlənən funksiyadır. $u(y)$ funksiyasını D oblastından kənarda sıfra bərabər hesab etməklə davam etdirək. Tutaq ki, $x\in E_m$ istənilən nöqtədir.

$$u_h(x)=\int_\Omega \omega_h(r)u(y)dy \qquad (1)$$

funksiyasının təyin edək, burada $\omega_h(r)$ §9.1-dəki 1) - 3) şərtlərini ödəyən hər hansı ortalaşdıran nüvədir.
$u_h(x)$ funksiyası $u(y)$ funksiyasına nəzərən orta funksiya adlanır ; h - ədədi isə ortalaşdırma radiusu adlanır.

Orta funksiyanı digər üsulla, aşağıdakı üç formada da daxil etmək olar.

1) $y\bar{\in}\Omega$ üçün $u(y)=0$ olduğunu nəzərə alaraq (1) inteqralını bütün E_m fəzası üzrə götürə bilərik:

$$u_h(x)=\int_{E_m}\omega_h(r)u(y)dy \qquad (1a)$$

2) Ortalaşdıran nüvənin 2)–ci xassəsinə görə inteqrallamanı bütün E_m üzrə deyil, yalnız mərkəzi x nöqtəsində olan h radiuslu dairə üzrə götürmək olar:

$$u_h(x)=\int_{r<h}\omega_h(r)u(y)dy\ ; \qquad (2b)$$

3) İnteqrallamanı $\Omega\cap(r<h)$ oblastı üzrə aparmaq olar, çünki bu halda inteqralaltı funksiyalardan hər hansı biri sıfra bərabər olur. Ona görə də

$$u_h(x) = \int\limits_{\Omega \cap (r<h)} \omega_h(r) u(y) dy \tag{1b}$$

düsturu da doğrudur.
İndi isə orta funsiyaların bəzi xassələrini qeyd edək.
I. Orta funksiyalar bütün E_m fəzasında sonsuz diferensiallanan funksiyalardır və onların istənilən tərtib törəməsini (1)–(2) düsturlarından ixtiyari birində inteqralaltda diferensiallamanın köməyi ilə almaq olar.
Ona görə də orta funksiyanın istənilən tərtib törəməsini

$$D^{\alpha} u_h(x) = \int\limits_{\Omega} \omega_h(r) D_x^{\alpha} \omega_h(r) dy \tag{2}$$

düsturu ilə hesablamaq olar. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$, $|\alpha| = (\alpha_1, \alpha_2 + ... + \alpha_m)$ m tərtibli multindeksdir və Ω oblastını E_m , $(r<h)$, $\Omega \cap (r<h)$ oblastlarından biri ilə əvəz etmək olar.
II. Orta funksiya Ω oblastından h – dan kiçik olmayan məsafədə yeləşən bütün nöqtələrdə sıfra bərabərdir. Doğrudan da, bu halda $(r<h)$ kürəsi tamamilə Ω oblastının xaricində yerləşir və (1b) intqralı altda $u(y) = 0$ olur.

Beləliklə, orta funksiya yalnız $\Omega^{(h)}$ ilə işarə edilmiş və aşağıdakı qayda ilə qurulmuş oblastda sıfırdan fərqli ola bilər: hər bir $x \in \Omega$ nöqtəsi üçün bu nöqtə mərkəz olmaq şərti ilə h radiuslu kürə götürək. Bu kürələriin birləşməsini $\Omega^{(h)}$ ilə işarə edirik. Aydındır ki, $\Omega \subset \Omega^{(h)}$. Əgər Ω R radiuslu kürə olarsa, onda $\Omega^{(h)}$ Ω ilə konsentrik olan $R+h$ radiuslu kürə olar.

Orta funksiyalar haqqında aşağıdakı mühüm teoremləri də qeyd edək.

Teorem 1. Əgər $u(x)$ funksiyası Ω oblastında kəsilməz isə, onda Ω oblastının istənilən qapalı alt oblastında $u_h(x)$ orta funksiyası $h \to 0$ şərtində $u(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılır.

İsbatı. Tutaq ki, $\Omega' \subset \Omega$ hər hansı oblastdır. Ω'' ilə Ω - nın elə alt oblastını işarə edək ki, Ω' eyni zamanda Ω'' - nın də alt oblastı olsun. Ω' və Ω'' oblastlarının sərhədlərini L_1 və L_2 ilə işarə edək və tutaq ki, h_0 bu sərhədlər arasındakı ən kiçik məsafədir. $h < h_0$ götürək. (1b) düsturuna və ortalaşdıran nüvənin 3) xassəsinə görə alarıq:

$$u_h(x) - u(x) = \int\limits_{r<h} [u(y) - u(x)] \omega_h(r) dy \tag{3}$$

Əgər $x \in \overline{\Omega'}$ isə, onda (3) bərabərliyində $y \in \overline{\Omega''}$. Ω'' qapalı oblastında kəsilməz olan $u(y)$ funksiyası müntəzəm kəsilməz olduğundan kifayət qədər kiçik h üçün $r \le h$ olduqda $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ kifayət qədər kiçik ədəddir) olar.

$\omega_h(r) \geq 0$ şərtini nəzərə alsaq (3) düsturundan

$$|u_h(x) - u(x)| \leq \varepsilon \int\limits_{r<h} \omega_h(r) dy = \varepsilon$$

olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. p ədədinin $1 \leq p \leq \infty$ aralığından olan bütün qiymətləri üçün $L_p(\Omega)$ fəzasından olan funksiyaların ortalaşdırılması zamanı norma artmır, yəni istənilən $u(x) \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ üçün $\|u_h(x)\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u(x)\|_{L_p(\Omega)}$.

İsbatı. $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ götürək. Hölder bərabərsizliyini tətbiq etməklə alarıq:

$$|u_h(x)|^p = \left| \int\limits_\Omega u(y) \omega_h(r) dy \right|^p = \left| \int\limits_\Omega u(y) \omega_h^{\frac{1}{p}} \cdot \omega_h^{\frac{1}{q}}(r) dy \right|^p \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega |u(y)|^p \omega_h(r) dy \cdot \left\{ \int\limits_\Omega \omega_h(r) dy \right\}^{p/q} \leq \int\limits_\Omega |u(y)|^p \omega_h(r) dy \tag{4}$$

burada q ədədi p ilə qarşılıqlı qoşma ədəddir: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ Ortalaşdıran nüvənin xassəsinə görə

$$\int\limits_\Omega \omega_h(r) dy = \int\limits_{\Omega \cap (r<h)} \omega_h(r) dy \leq \int\limits_{r<h} \omega_h(r) dy = 1.$$

Onda (4) bərabərsizliyini Ω oblastı üzrə inteqrallasaq alarıq

$$\|u_h(x)\|^p_{L_p(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u_h(x)|^p dx \leq \int\limits_\Omega |u_h(y)|^p \left\{ \int\limits_\Omega \omega_h(r) dx \right\} dy \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega |u_h(y)|^p = \|u\|^p_{L_p(\Omega)}$$

buradan $\|u_h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)}$. Teorem isbat edildi.

Teorem 3. İstənilən $u \in L_p(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$ üçün $h \to 0$ şərtində $\|u_h - u\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ münasibəti doğrudur.

İsbatı. Məlum olduğu kimi istənilən ölçülən funksiya verildikdə elə $f(x)$ çoxhədlisi vardır ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\|u - f\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$ şərti ödənilsin.

Üçbucaq bərabərsizliyini tətbiq etməklə alarıq:

$$\|u - u_h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u - f\|_{L_p(\Omega)} + \|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} + \|f_h - u_h\|_{L_p(\Omega)} \;.$$

Yuxarıda isbat edilmiş teorem 2 – yə əsasən
$\| f_h - u_h \|_{L_p(\Omega)} \le \| f - u \|_{L_p(\Omega)}$ olduğundan
$$\| u - u_h \|_{L_p(\Omega)} \le 2\| f - u \|_{L_p(\Omega)} + \| f - f_h \|_{L_p(\Omega)} < \frac{2\varepsilon}{3} + \| f - f_h \|_{L_p(\Omega)}$$
alarıq.

Elə Ω_1 oblastı götürək ki, Ω oblastı onun tam daxili altoblastı olsun. f çoxhədlisi Ω_1 oblastında kəsilməz olduğundan onun istənilən qapalı alt oblastında, xüsusi halda $\overline{\Omega}$ oblastında $h \to 0$ şərtində müntəzəm yığılma mənada $f_h \to f$ olar. Qapalı oblastda müntəzəm yığılmadan orta mənada yığılma alındığından kifayət qədər kiçik h üçün $\| f - f_h \|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$ şərti ödənilər.
Bunu yuxarıda yazılmış son bərabərsizlikdə nəzərə alsaq $\| u - u_h \|_{L_p(\Omega)} < 3$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

9.3. Finit və sonsuz diferensiallanan funksiyalar sinfi

Əgər $[a, b]$ parçasında təyin edilmiş $f(x)$ funksiyası üçün elə $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ intervalı varsa ki, $x \in [a, b] | (\alpha, \beta)$ olduqda $(\alpha > a,\ \beta < b)$ $f(x) = 0$ olsun, onda bu funksiyaya $[a, b]$ parçasında finit funksiya deyilir. Qeyd edək ki, hər bir finit funksiyanın özünə uyğun (α, β) intervalı vardır.
Məsələn,
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{h^2}{x^2 - h^2}}, & |x| < h \quad olduqda \\ 0, & |x| \ge h \quad olduqda \end{cases}$$
funksiyası $(-\infty, \infty)$ intervalında finit funksiyadır. Bu funksiyanın istənilən tərtib törəmələri vardır və bu törəmələr də $|x| \ge h$ olduqda sıfra bərabərdir.
Tutaq ki, $f(x) = f(x_1, x_2 ... x_n)$ funksiyası $\Omega \subset R^n$ oblastında təyin edilmişdir və elə $\Omega' \subset \Omega$ alt oblastı vardır ki, $x \in \Omega \,|\, \Omega'$ olduqda $f(x) = 0$. Burada Ω' ilə Ω oblastnın ciddi daxili oblastı işarə olunur, yəni Ω' ilə Ω oblastlarının sərhədləri arasında məsafə müsbət ədəddir. Ona görə də $f(x)$ finit funksiyadır.
Çoxdəyişənli finit funksiyaya misal olaraq

$$\omega(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|^2}{|x|^2-h^2}, & |x|<h\ , \ |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} \\ 0, & |x|\geq h\end{cases} \tag{1}$$

funksiyasını göstərə bilərik. Bu funksiyanın R^n fəzasında istənilən tərtib kəsilməz törəmələri vardır. R^n fəzasında finit funksiya dedikdə adətən bütün R^n fəzasında təyin olunmuş və $|x|>M$ (M - kifayət qədər böyük müsbət ədəddir) şərtini ödəyən bütün nöqtələrdə sıfra bərabər olan funksiya başa düşülür. R^n fəzasında finit və sonsuz diferensillanan funksiyalar sinfi $C_0^\infty\left(R^n\right)$ kimi işarə olunur. Bu sinfə daxil olan hər bir $u(x)$ funksiyası üçün M ədədi müxtəlif ola bilər. Bütün R^n fəzasında cəmlənən $u(x)$ funksiyası götürək, yəni $u(x)\in L_1\left(R^n\right)$. $u_{(M)}(x)$ ilə $|x|<M$ kürəsi daxilində $u(x)$ ilə üst – üstə düşən, R^n - in qalan hissəsində sıfra bərabər olan funksiyanı işarə edək. $u(x)\in L_1\left(R^n\right)$ şərtindən alınır ki,
$\int\limits_{R^n}\left|u(x)-u_{(M)}(x)\right|dx=\int\limits_{|x|>M}|u(x)|dx\rightarrow 0$, $M\rightarrow\infty$ olduqda $u_{(M)h}(x)$ ilə $u(x)$- in orta funksiyasının işarə edək, $h<1$. $u_{(M)h}(x)$ sonsuz diferensialanan funksiyadır və $|x|>M+1$ olduqda sıfra bərabərdir, yəni $u_{(M)h}(x)\in C_0^\infty\left(R^h\right)$. Bundan başqa $h\rightarrow 0$ şərtində $\int\limits_{|x|<M+1}\left|u_{(M)}(x)-u_{(M)h}(x)\right|dx\rightarrow 0$. İxtiyari $\varepsilon>0$ ədədini qeyd edək və M ədədini elə seçək ki,

$$\int\left|u(x)-u_{(M)}(x)\right|dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Kifayət qədər kiçik h ədədləri üçün

$$\int\left|u_{(M)}(x)-u_{(M)h}(x)\right|dx=\int\limits_{|x|<M+1}\left|u_{(M)}(x)-u_{(M)h}(x)\right|dx<\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

olar.
Nəticədə alırıq:

$$\left\|u(x)-u_{(M)h}^{(x)}\right\|_{L_1\left(R^n\right)}=\int\limits_{R^n}\left|u(x)-u_{(M)h}(x)\right|dx<\varepsilon.$$

Bu onu göstərir ki, $u(x)$ funksiyasını $L_1\left(R^n\right)$ fəzasının normasına nəzərən $C_0^\infty\left(R^n\right)$ fəzasına daxil olan $u_{(M)h}(x)$ funksiyaları vasitəsilə istənilən qədər yaxınlaşdırmaq olar.

Eyni qayda ilə $u(x) \in L_2(R^n)$ funksiyası üçün də $M \to \infty$ və $h \to 0$ şərtində

$$\left\| u(x) - u_{(M)h}^{(x)} \right\|_{L_2(R^n)} \to 0 \ ,$$

olduğunu göstərmək olar.
Nəticədə aşağıdakı teoremin doğru olduğunu alarıq:
Teorem 1. $C_0^\infty(R^n)$ funksiyalar sinfi $L_1(R^n)$ və $L_2(R^n)$ fəzalarında sıxdır.

İndi isə tutaq ki, $\Omega \subset R^n$ hər hansı məhdud oblastdır. Ω oblastında finit funksiyalardan ibarət olan $C_0^\infty(\Omega)$ sinfinə baxaq. Bu sinfə daxil olan funksiyalar elə $u(x) \in C_0^\infty(R^n)$ funksiyalarından ibarətdir ki, $|u(x)| > 0$ şərtini ödəyən bütün x nöqtələrindən ibarət olan açıq çoxluq qapanması ilə birlikdə Ω daxilində yerləşir.
İsbat etmək olur ki, $C_0^\infty(\Omega)$ funksiyalar sinfi $L_1(R^n)$ və $L_2(R^n)$ fəzalarında sıxdır.

9.4. Ümumiləşmiş törəmə anlayışı

Əvvəlcə birdəyişənli funksiyanın ümumiləşmiş törəməsi anlayışı ilə tanış olaq. Tutaq ki, $u(x)$ $[a, b]$ parçasında mütləq kəsilməz, $v(x)$ funksiyası isə finit və kəsilməz $v'(x)$ törəməsi olan funksiyalardır. Onda hissə - hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etməklə alarıq:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Əgər $v(x)$ funksiyasının finit olduğunu nəzərə alsaq

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx \qquad (1)$$

olar.
Alınmış (1) bərabərliyi istənilən finit və kəsilməz törəməsi olan istənilən $v(x)$ funksiyası üçün eyniliklə ödənilir.
Tərif 1. Əgər cəmlənən $u(x)$ funksiyası üçün $[a, b]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanan elə $\omega(x)$ funksiyası varsa ki, istənilən finit və kəsilməz törəməsi olan $v(x)$ funksiyası üçün

$$\int_a^b \omega(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənilsin, onda $\omega(x)$ funksiyasına $u(x)$ funksiyasının ümumiləşmiş törəməsi deyilir və $\omega(x)=u'(x)$ kimi işarə edilir.

(1) və (2) bərabərliklərindən alınır ki, $u(x)$ funksiyasının adi mənada törəməsi varsa, onun ümumiləşmiş törəməsi də vardır. Amma ümumiləşmiş törəmənin varlığından adi törəmənin varlığı çıxmaya da bilər.

Misal 1. $[-1,1]$parçasında $u(x)=|x|$ funksiyasına baxaq. Məlumdur ki, $x=0$ nöqtəsində bu funksiyanın adi mənada törəməsi yoxdur.

Tutaq ki, $v(x)$ $[-1,1]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan $v(-1)=v(1)=0$ şərtini ödəyən funksiyadır.

Onda

$$\int_{-1}^{1}|x|\cdot v'(x)dx=-\int_{-1}^{0}x\,v'(x)dx+\int_{0}^{1}x\,v'(x)dx$$

olduğundan hissə - hissə inteqrallama tətbiq etməklə alarıq:

$$\int_{-1}^{1}|x|v'(x)dx=\int_{-1}^{0}\text{v}(x)dx-\int_{0}^{1}\text{v}(x)dx=-\int_{-1}^{1}\text{v}(x)\cdot sign\,x\,dx$$

Buradan $\omega(x)=sign\,x$ olduğunu alırıq. Yəni, $\omega(x)=sign\,x$ $u(x)=|x|$ funksiyasının ümumiləşmiş törəməsidir.

Qeyd. Göstərək ki, $\omega(x)=sign\,x$ funskiyasının $[-1,1]$intervalında birinci tərtib ümumiləşmiş törəməsi yoxdur. (Baxmayaraq ki, bu funksiyanın $x\neq 0$ bütün nöqtələrdə kəsilməz törəməsi vardır).

Bunu göstərmək üçün aşağıdakı inteqrala baxaq:

$$\int_{-1}^{1}\varphi'(x)\cdot sign\,x\,dx=-\int_{-1}^{0}\varphi'(x)dx+\int_{0}^{1}\varphi'(x)dx=-2\varphi(0) \qquad (3)$$

Burada $\varphi(x)$ $(-1,1)$ intervalında birinci tərtib kəsilməz törəməsi olan funksiyadır.

Göstərək ki, $(-1,1)$ intervalında cəmlənən elə bir $v(x)$ funksiyası yoxdur ki, istənilən finit və kəsilməz diferensiallanan $\varphi(x)$ funksiyası üçün

$$\int_{-1}^{1}v(x)\varphi(x)dx=2\varphi(0) \qquad (4)$$

bərabərliyi ödənilsin.

Tutaq ki, belə bir $v(x)$ funksiyası vardır. Onda $\text{v}(x)=\int_{0}^{x}v(x)dx$ funksiyası istənilən $[a,b]\subset(-1,1)$parçasında mütləq kəsilməz funksiya olar və onun bu parçada cəmlənən $v(x)$ törəməsi olar.

Əgər (4) inteqralına hissə - hissə inteqrallama tətbiq etsək, onda (3) bərabərliyinə görə istənilən kəsilməz diferensiallanan $\varphi(x)$ funksiya üçün

$$\int_{-1}^{1}\varphi'(x)[sign\,x-\text{v}(x)]dx=0$$

alarıq. Buradan, $sign\, x = \mathrm{v}(x)+c,\ \ x\in(-1,1)$. Alınmış bərabərliyin sol tərəfi kəsilən, sağ tərəfi isə kəsilməz funksiyadır. Alınmış ziddiyət (4) bərabərliyini ödəyən cəmlənən $v(x)$ funksiyasının olmadığını göstərir. Yəni $sign\, x$ funksiyasının ümumiləşmiş törəməsi yoxdur.

Teorem 1. Əgər birdəyişənli $u(x)$ funksiyasının ümumiləşmiş törəməsi varsa, onda o hər hansı bir mütləq kəsilməz funksiyaya ekvivalentdir.

İsbatı. Tutaq ki, $\omega(x)$ funksiyası $u(x)$ funksiyasının ümumiləşmiş törəməsidir. Onda istənilən finit və kəsilməz törəməsi olan $v(x)$ funksiyası üçün

$$\int_a^b \omega(x)v(x)dx = -\int u(x)v'(x)dx \tag{5}$$

bərabərliyi ödənilir. $h(x)=\int_a^x \omega(t)dt$ işarə edək. Onda hissə - hissə inteqralama düsturuna görə alarıq:

$$\int_a^b \omega(x)v(x)dx = -\int_a^b h(x)v'(x)dx \tag{6}$$

(5) və (6) bərabərliklərindən

$$\int_a^b [u(x)-h(x)]v'(x)dx = 0.$$

$v(x)$ ixtiyari finit və diferensiallanan funksiya olduğundan sanki bütün $x\in[a,b]$ üçün $u(x)-h(x)=c$ alarıq. $h(a)=0$ olduğundan $c=u(a)$.

Nəticədə $u(x)$ və $h(x)+u(a)$ mütləq kəsilməz funksiya olduğundan $u(x)$ funksiyası da mütləq kəsilməzdir. Məlumdur ki, mütləq kəsilməz $u(x)$ funksiyanın sanki hər yerdə $u'(x)$ törəməsi vardır və bu funksiyanı törəməyə görə bərpa etmək olar:

$$u(x)=u(a)+\int_a^x u'(t)dt \tag{7}$$

Nəticə. Ümumiləşmiş törəməsi olan funksiyanın sanki hər yerdə adi törəməsinin olduğunu qəbul etmək olar. Amma, funksiyanın sanki hər yerdə törəməsinin olmasından onun ümumiləşmiş törəməsinin olduğunu hökm etmək olmaz. Məsələn, $[0,1]$ parçasında Kantorun $\theta(x)$ funksiyasının sanki hər yerdə $\theta'(x)=0$ törəməsi vardır. Lakin bu funksiyanın ümumiləşmiş törəməsi yoxdur.

İndi isə çoxdəyişənli funksiyanın ümumiləşmiş törəməsini öyrənək.

Tərif 2. Tutaq ki, $\Omega\subset R^n$ məhdud oblastdır. İxtiyari $\Omega'\subset\Omega$ oblastında cəmlənən $u(x)=u(x_1,x_2...x_n)$ funksiyası götürək. Ω' oblastında cəmlənən elə $\omega(x)=\omega(x_1,x_2...x_n)$ funksiyası varsa ki, Ω oblastında finit və k tərtibdən kəsilməz xüsusi törəmələri olan istənilən $v(x)$ funksiyası üçün

$$\int_{\Omega}\omega(x)v(x)dx=(-1)^k\int_{\Omega}u(x)\frac{\partial^k v(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\,dx \tag{8}$$

bərabərliyi ödənilsin, onda $\omega(x)$ funksiyasına $u(x)$ funksiyasının $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$ şəklində ümumiləşmiş törəməsi deyilir. Burada $k_1+k_2+...+k_n=k$.

Əgər k tərtibli ümumiləşmiş törəməni adi törəmə şəklində

$$\omega(x)=D^k u=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$$

işarə etsək, onda (8) bərabərliyini

$$\int_{\Omega}u(x)D^k v\,dx=(-1)^k\int_{\Omega}\omega(x)v(x)dx \tag{9}$$

şəklində yaza bilərik.

Qeyd edək ki, ümumiləşmiş törəmə adi törəmənin bir çox xassələrinə malikdir. Onlardan bir neçəsini göstərək.

1) $u(x)$ funksiyasının $\omega(x)=D^k u=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$, $\quad(k=k_1+k_2+...+k_n)$ şəklində ümumiləşmiş törəməsi ekvivalentlik mənada yeganədir. Doğrudan da,

fərz edək ki, $u(x)$ funksiyasının $\omega(x)$ və $\tilde{\omega}(x)$ kimi iki müxtəlif ümumiləşmiş törəmələri vardır. Onda

$$\begin{cases}\int_{\Omega}u(x)D^{\alpha}v\,dx=(-1)^k\int_{\Omega}\omega(x)v(x)dx\\ \int_{\Omega}u(x)D^{\alpha}v\,dx=(-1)^k\int_{\Omega}\tilde{\omega}(x)v(x)dx\end{cases} \tag{10}$$

Buradan alarıq:

$$\int_{\Omega}\left[\omega(x)-\tilde{\omega}(x)\right]v(x)dx=0.$$

$v(x)$ ixtiyari funksiya olduğundan sanki bütün $x\in\Omega$ üçün

$$\omega(x)-\tilde{\omega}(x)=0,\ \text{yəni}\ \ \omega(x)=\tilde{\omega}(x)$$

olduğunu alırıq.

2) $u(x)$ funksiyasının $\dfrac{\partial^k u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$ ümumiləşmiş törəməsi diferensiallama növbəsindən asılı deyildir. Bu xassənin doğruluğu $v(x)$ funksiyasının k tərtibli kəsilməz xüsusi törəmələrinin varlığından və qarışıq törəmələrin bərabərliyi haqqında məlum Şvarts teoremindən alınır.

3) Tutaq ki, $u(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyalarının eyni tərtibdən ümumiləşmiş törəmələri vardır və bu törəmələr uyğun olaraq $\omega_1(x)$ və $\omega_2(x)$ -dir. Onda $c_1u(x)+c_2\varphi(x)$ funksiyalarının da k tərtibli ümumiləşmiş törəmələri vardır və $c_1\omega_1(x)+c_2\omega_2(x)$-ə bərabərdir. Burada c_1 və c_2 istənilən sabitlərdir.

4) Tutaq ki, $u(x,t)$ funksiyası $Q=\Omega\times[0\le t\le T]$silindrik oblastında cəmlənən funksiyadır və $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ümumiləşmiş törəməsi vardır. Onda

$$f(t)=\int_\Omega u(x,t)dx$$

funksiyası mütləq kəsilməzdir və onun

$$f'(t)=\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx$$

ümumiləşmiş törəməsi vardır.

5) Tutaq ki, Ω oblastında $u(x)$ funksiyasının $\omega(x)=D^k u(x)$ ümumiləşmiş törəməsi vardır və $u_h(x)$ və $\omega_h(x)$ uyğun olaraq $u(x)$ və $\omega(x)$ funksiyalarının orta funksiyalarıdır. Onda $\Omega|\Omega_h$ oblastında $u(x)$funksiyasının ümumiləşmiş törəməsinin orta funksiyası, $u(x)$ -in orta funksiyasının həmin tərtibli törəməsinə bərabərdir, yəni

$$\left(D^k u\right)_h = D^k(u_h)$$

yaxud

$$\int_{\Omega|\Omega_h}\omega_h(r)D^k u(y)dy = D^k\left(\int_{\Omega|\Omega_h}\omega_h(r)u(y)dy\right),$$

burada $k=k_1+k_2+...+k_n \quad D^k=\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$.

6) Tutaq ki, $u_n(x),\ n=1,2,...$ funksiyalar ardıcıllığı sonlu $\Omega\subset R^n$ oblastında eyni tərtibli $v_n(x)=D^k u_n(x)$ ümumiləşmiş törəmələrinə malikdirlər. Əgər $\{u_n(x)\}$ və $\{v_n(x)\}$ ardıcıllıqları $L_1(\Omega)$ fəzasında uyğun olaraq $u(x)$və $v(x)$

limitlərinə malik isə, onda Ω oblastında $v(x)$ funksiyası $u(x)$-in eyni tərtibli ümumiləşmiş törəməsidir.

7) Tutaq ki, $u(x)$, $v(x)\in L_p(\Omega)$, $1\le p\le\infty$ və $v(x)$ funksiyası $u(x)$ funksiyasının k tərtibli ümumiləşmiş törəməsidir. $v(x)=D^k u(x)$. Onda hər bir daxili $\Omega'\subset\Omega$ oblastında sonsuz diferensiallanan funksiyalardan ibarət olan elə $\{u_n(x)\}$ ardıcıllığı qurmaq olar ki, $L_p(\Omega')$ fəzasında $u_n(x)\to u(x)$, $D^k u(x)\to v(x)$ olsun.

8) İndi isə ümumiləşmiş törəmələrin adi törəmələrdən fərqli olan bir xassəsini göstərən aşağıdakı misala baxaq. Tutaq ki, $f(t)$ və $g(t)$ funksiyaları $[-1,1]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır, amma bu parça daxilində heç bir nöqtədə diferensiallanan deyildirlər. Tərifdən istifadə etməklə göstərmək olar ki,

$$u(x)=u(x_1,x_2)=f(x_1)+g(x_2) \tag{11}$$

funksiyasının birinci tərtib ümumiləşmiş törəməsi yoxdur, amma bu funksiyanın ikinci tərtib ümumiləşmiş törəməsi vardır və bu törəmə sıfra bərabərdir.

Bunun üçün göstərmək kifayətdir ki. $-1\le x_1, x_2\le 1$ kvadratında finit və ikinci tərtib kəsilməz törəməsi olan $\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2)$ funksiyası üçün

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x_1,x_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1,\partial x_2}dx_1\,dx_2=0$$

eyniliyi doğrudur.

Bu eyniliyin doğruluğu aşağıdakı bərabərliklərdən alınır:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x_1,x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1,\partial x_2}dx_1\,dx_2=\int_{-1}^{1} f(x_1)\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1,\partial x_2}dx_2\right\}dx_1+$$

$$\int_{-1}^{1} g(x_2)\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1,\partial x_2}dx_1\right\}dx_2=\int_{-1}^{1} f(x_1)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=-1}^{x_2=1}dx_1+\int_{-1}^{1} g(x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Bigg|_{x_1=-1}^{x_1=1}dx_2=0\,.$$

Bu misal göstərir ki, hər hansı tərtibli ümumiləşmiş törəmənin varlığından ondan aşağı tərtibli ümumiləşmiş törəmələrin varlığı çıxmır.

9.5. Sobolev fəzaları

I. $W_2^1(D)-$ fəzası. Tutaq ki. $\Omega\subset E^m$ hissə - hissə hamar sərhəddə malik sonlu oblastdır. Oblast üzərinə əlavə şərtlər aşağıda göstəriləcəkdir. Ω oblastında $L_2(\Omega)$ fəzasına daxil olan və $L_2(\Omega)$-ya daxil olan bütün birinci tərtib ümumiləşmiş törəmələri olan funksiyalar çoxluğunu $W_2^1(\Omega)$ ilə işarə edək. Bu funksiyalar çoxluğu xətti çoxluqdur, yəni $u_k(x)\in L_2(\Omega)$ $(k=1,2...n)$ olduqda $\sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k(x)\in W_2^1(\Omega)$, $c_1, c_2 ... c_k$ – sabit ədədlərdir.

Bu sinifdə $u(x), v(x)\in W_2^1(\Omega)$ funksiyalarının skalyar hasili

$$(u,v)_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[u(x)v(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right] dx \tag{1}$$

kimi, elementin norması isə

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[u^2(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx \tag{2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ - ümumiləşmiş törəmələrdir.

Təyin olunmuş skalyar hasil və norma bütün zəruri şərtləri ödəyirlər:

1) $(u,v)_{W_2^1(\Omega)} = (v,u)_{W_2^1(\Omega)}$,

2) $(c_1 u_1 + c_2 u_2, v)_{W_2^1(\Omega)} = c_1 (u_1, v)_{W_2^1(\Omega)} + c_2 (u_2, v)_{W_2^1(\Omega)}$,

3) $(u,u) > 0$, $u \neq 0$ olduqda.

Bu xassələrdən

$$\left| (u,v)_{W_2^1(\Omega)} \right| \le \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{W_2^1(\Omega)}$$

Koşi – Bunyakovski bərabərsizliyi və

$$\left| (u+v)_{W_2^1(\Omega)} \right| \le \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|_{W_2^1(\Omega)}$$

üçbucaq bərabərsizliyi alınır.

$W_2^1(\Omega)$ fəzasında funksiyalar ardıcıllığının limiti təbii olaraq aşağıdakı kimi təyin edilir: $W_2^1(\Omega)$ fəzasında $n\to\infty$ şərtində $u_n \to u$ o zaman ki,

$$\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0\,. \tag{3}$$

Bu yığılma $L_2(\Omega)$ fəzasında

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{və} \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0\,. \tag{4}$$

olmasına ekvivalentdir. $L_2(\Omega)$ fəzasında üçbucaq aksiomundan $W_2^1(\Omega)$ fəzasında normanın kəsilməzliyi alınır, yəni
$\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ şərtindən $\|u_n\|_{W_2^1(\Omega)} \to \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$
olması çıxır.
Aşağıdakı mühüm teorem doğrudur.
Teorem 1. $W_2^1(\Omega)$ fəzası tam Hilbert fəzasıdır.
İsbatı. $\{u_n(x) \in W_2^1(\Omega)\}$ ardıcıllığını götürək. Fərz edək ki, bu ardıcıllıq fundamentaldır, yəni

$$p, q \to \infty \text{ şərtində } \|u_p - u_q\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0. \tag{5}$$

Göstərək ki, elə $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ vardır ki, $n \to \infty$ şərtində

$$\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0 . \tag{6}$$

(3) şərtindən çıxır ki, $p \to \infty$ $q \to \infty$ şərtində

$$\|u_p - u_q\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \text{ və } \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_k} - \frac{\partial u_q}{\partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 .$$

$L_2(\Omega)$ tam fəza olduğuna görə elə $u, v_1, v_2, ... v_m \in L_2(\Omega)$ funksiyaları vardır ki, $n \to \infty$ şərtində

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0 , \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - V_k \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad (k = 1, 2...m). \tag{7}$$

Ümumiləşmiş törəmə əməliinin qapalılıq xassəsinə görə alırıq ki, $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ və $v_k = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2...m)$. Onda (7) münasibətlərini də nəzərə alsaq (4) şərtlərinin ödəndiyini alarıq. Nəticədə (6) münasibətinin doğru olduğunu alırıq. Bu isə $W_2^1(\Omega)$ fəzasının tam olması deməkdir. Teorem isbat olundu.
Qeyd: $L_2(\Omega)$ fəzasında olduğu kimi $W_2^1(\Omega)$ fəzasında da yığılan ardıcıllığın limiti yeganədir.

II. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ **– fəzası.**

Tərifə görə $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ fəzası Ω oblastında sonsuz diferensiallanan bütün $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ funksiyalar çoxluğunun $W_2^1(\Omega)$ fəzasının normasına nəzərən qapanmasından ibarət alt fəza kimi təyin edilir. Başqa sözlə, $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ olması o deməkdir ki, elə $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ $(n = 1, 2, ...)$ vardır ki, $n \to \infty$ şərtində $\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ fəzasında skalyar hasil və norma $W_2^1(\Omega)$ fəzasında olduğu kimi (1), (2) bərabərlikləri ilə təyin edilir.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ sinfinə daxil olan funksiyalar üçün Puankare – Fridrixs bərabərsizliyi adlanan

$$\int_\Omega u^2(x)dx \le c\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right)dx \tag{8}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Qeyd edək ki, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ fəzasını $W_2^1(\Omega)$ fəzasına daxil olan və Ω oblastının sərhəddində müəyyən ümumiləşmiş mənada sıfra çevrilən funksiyalar sinfi kimi də təsvir etmək olar. Bütün bu tipli məsələlər ilk dəfə görkəmli riyaziyyatçı, akademik S.L.Sobolev tərəfindən öyrənilmiş və diferensial tənliklər nəzəriyyəsində tətbiq edilmişdir.

III. $W_2^2(\Omega)$ fəzası. Bu funksiyalar sinfi $L_2(\Omega)$ fəzasına daxil olan elə funksiyalardan ibarətdir ki, onların mümkün olan bütün birinci və ikinci tərtib ümumiləşmiş törəmələri olsun və bu törəmələr də $L_2(\Omega)$ fəzasına daxil olsun. $W_2^2(\Omega)$ fəzasında skalyar hasil

$$(u,v)_{W_2^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k,i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_i}\right)dx \tag{9}$$

bərabərliyi ilə təyin edilir. Uyğun norma isə

$$(u,v)_{W_2^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega u^2(x) + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \sum_{k,i=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Təyin edilmiş normaya nəzərən $W_2^2(\Omega)$ fəzasında funksiyalar ardıcıllığının yığılması anlayışı da daxil edilir. Bu fəzada yığılma $L_2(\Omega)$ fəzasında ardıcıllığın həm özünün, həm də birinci və ikinci tərtib ümumiləşmiş törəmələrinin eyni zamanda yığılmasından ibarətdir. $W_2^1(\Omega)$ fəzasında olduğuna analoji qaydada $W_2^2(\Omega)$ fəzasının da tam Hilbert fəzası olduğunu isbat etmək olar.

IV. $\widetilde{W}_k^p(\Omega)$. $p \geq 1$**- fəzası.** Bu fəza Ω- oblastında cəmlənən, verilmiş k tərtibli bütün mümkün olan ümumiləşmiş törəmələrə malik olan və bu törəmələri $p \geq 1$ dərəcədən cəmlənən funksiyalardan təşkil edilmişdir.

Bu çoxluq xəttidir. Bu çoxluqda elementin norması

$$\|u\|^p_{\tilde{W}_p^{(k)}(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p dx + \int_\Omega \sum_{k_1+k_2+...+k_n=k} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_m^{k_m}} \right|^p dx \qquad (11)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada cəm $k_1 + k_2 + ... + k_m = k$ şərtini ödəyən bütün natural və sıfır qiymətləri ala bilən $k_1, k_2 ... k_m$ ədədləri üzrə götürülür.

Baxılan funksiyalar çoxluğu bu normaya nəzərən yığılmaya görə tam normalaşmış fəzadır, yəni $\widetilde{W}_k^p(\Omega)$ - Banax fəzasıdır.

V. $W_p^{(k)}(\Omega)$ $(p \geq 1)$ **fəzası.** Tutaq ki, $u(x)$ funksiyasının $\Omega \subset R^m$ oblastında k tərtibə qədər (k-da daxil olmaq şərti ilə) bütün mümkün olan ümumiləşmiş törəmələri vardır və bu törəmələr $p \geq 1$tərtibdən cəmlənən funksiyalardır. Bu funksiyalar çoxluğu xətti fəza təşkil edir və $W_p^{(k)}(\Omega)$ kimi işarə edilir.

Bu fəzada elementin norması aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\| u \|^p_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{l=0} \sum_{k_1+k_2+...+k_m=l} \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_m^{k_m}} \right|^p dx \qquad (12)$$

İsbat olunmuşdur ki, daxil edilmiş normaya nəzərən yığılmaya görə bu çoxluq tam fəzadır. Yəni $W_p^{(k)}(\Omega)$ - Banax fəzasıdır.

Qeyd 1. Göründüyü kimi $\widetilde{W}_p^{(0)}(\Omega) = W_p^{(0)}(\Omega) = L_p(\Omega)$. Eləcə də $\widetilde{W}_p^{(1)}(\Omega) = W_p^{(1)}(\Omega)$.

Tutaq ki, Ω oblastının hər bir x_0 daxili nöqtəsindən çəkilmiş radius–vektor oblastının sərhəddini ancaq bir nöqtədə kəsir. Belə oblastlara x_0 nöqtəsinə nəzərən ulduzvari oblast deyilir. Əgər Ω oblastı daxilində elə S kürəsi varsa ki, Ω oblastı bu kürənin bütün nöqtələrinə nəzərən ulduzvari oblastdır, onda Ω oblastı S kürəsinə nəzərən ulduzvari oblast adlanır.

Tutaq ki, Ω oblastı sonlu sayda məhdud və hər biri müəyyən bir kürəyə nəzərən ulduzvari olan oblastların birləşməsindən ibarətdir. İsbat olunmuşdur ki, belə oblastlar üçün

$$\widetilde{W}_p^{(k)}(\Omega) = W_p^{(k)}(\Omega).$$

Başqa sözlə, bu onu göstərir ki, ulduzvari oblastlarda k tərtibli ümumiləşmiş törəmələrin varlığından k tərtibə qədər bütün tərtibdən $(l = 1, 2, ... k)$ ümumiləşmiş törəmələrin olması alınır.

Qeyd 2. Bəzi hallarda tam ədəd olmayan k indeksinə malik olan $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzalarına baxmaq zərurəti ortaya çıxır. Diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərinin həlli zamanı bu tipli fəzalar xüsusi rol oynayır. Ona görə də bu tipli fəzalarla tanış olaq. Bu fəzalar aşağıdakı kimi təyin olunur.

Tutaq ki, $k = l + \lambda$, belə ki, $l \geq 0$ tam ədəddir və $0 < \lambda < 1$. Bu halda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzasının elementləri $W_p^{(l)}(\Omega)$ fəzasına daxil olan elə $u(x)$ funksiyalarından ibarətdir ki,

$$J(u) = \int_{\Omega}\int_{\Omega}\sum_{|k|=l} \frac{\left| D^{\alpha}u(y) - D^{\alpha}u(x)\right|}{|y-x|^{m+\lambda p}}\, dxdy \tag{13}$$

inteqralı yığılan olsun.

Bu fəzada elementin norması

$$\|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \|u\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} + [J(u)]^{1/p} \tag{14}$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

9.6. Daxilolma teoremləri

Tutaq ki, X və Y Banax fəzalarıdır, belə ki, X fəzasının bütün elementləri eyni zamanda Y fəzasına da daxildir. Bu halda deyirlər ki, X fəzası Y fəzasına daxildir. (yaxud Y daxilində yerləşir) .

V ilə istənilən $u \in X$ elementinə qarşı, Y fəzasının elementi kimi baxılan eyni u elementini qarşı qoyan operatoru işarə edək. V operatoruna X fəzasından Y fəzasına daxilolma operatoru deyilir.

Aydındır ki, $D(V) = X$ və $R(V) \subset X$.

"Daxilolma teoremləri" dedikdə adətən daxilolma operatorunun məhdudluğu və ya tamam kəsilməzliyi haqqında teoremlər başa düşülür.

Sobolev tipli fəzalar nəzəriyyəsində, eləcə də diferensial tənliklərin həllinin hamarlıq məsələlərinin tədqiqində mühüm əhəmiyyətə malik olan aşağıdakı daxilolma teoremlərini qeyd edək:

Teorem 1 (Rellix). Tutaq ki, Ω istənilən məhdud oblastdır. Onda $W_2^{(1)}(\Omega)$ fəzasının normasına görə məhdud olan istənilən $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ funksiyalar çoxluğu $L_2(\Omega)$ fəzasında kompaktdır.

Bu teoremin hökmünü adətən aşağıdakı kimi də ifadə edirlər. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ fəzası $L_2(\Omega)$ fəzasına kompakt daxildir. Başqa sözlə, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ fəzasından $L_2(\Omega)$ fəzasına daxilolma operatoru kompakt (tamam kəsilməz) operatordur.

İndi tutaq ki, $\Omega\subset R^m$ (məhdud) oblastı hər hansı kürəyə nəzərən ulduzvari oblastdır.

Teorem 2. Əgər $pk>m$ şərti ödənilərsə, onda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzası $C(\Omega)$ fəzasına kompakt daxildir.

Bu halda daxilolma operatorunun tamam kəsilməzliyindən onun məhdudluğu alınır. Deməli $pk>m$ olduqda elə B sabiti vardır ki,

$$\|u\|_{C(\Omega)}\le B\|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

Teorem 3. Tutaq ki, $pk\le m$ və $\omega\subset\Omega$ s ölçülü hissə - hissə hamar çoxobrazlıdır, belə ki, $m-kp<s\le m$. Onda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzasından $L_q(\omega)$ fəzasına daxilolma məhduddur, burada $1\le q<\dfrac{sp}{m-kp}$.

Daxilolmanın məhdudluğu o deməkdir ki, elə $B_1>0$ sabiti vardır ki,

$$\|u\|_{L_q(\omega)}\le B_1\|u\|_{W_p^{(k)}(\omega)}.$$

Teorem 4. Əgər $pk\le m$ isə, onda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzasından $L_q(\Omega)$ fəzasına daxilolma kompaktdır, burada $1\le q<\dfrac{mp}{m-kp}$.

Teorem 5. Əgər $u\in W_p^{(k)}(\Omega)$ isə, onda onun Ω oblastında $l<k$ tərtibli mümkün olan bütün ümumiləşmiş törəmələri vardır və $(k-l)p>m$ olduqda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fəzasından $C_{(\Omega)}^{(l)}$ fəzasına daxilolma kompaktdır. Əgər $(k-l)p\le m$ və $1\le q<\dfrac{mp}{m-kp}$ isə, onda $W_p^{(k)}(\Omega)$-dən $W_q^{(l)}(\Omega)$-yə daxilolma da kompaktdır.

Qeyd edilən daxilolma teoremləri S.L.Sobolev tərəfindən funksiyanın öz törəmələri vasitəsilə inteqral göstərişlərindən istifadə isbat olunur.

II HİSSƏ
X FƏSİL
XƏTTİ FƏZALAR

10.1. Xətti fəzanın tərifi. Misallar

Əgər istənilən təbiətli $x, y, z, ...$ elementlərindən ibarət olan R çoxluğunda aşağıdakı üç şərt ödənərsə, onda R-ə xətti fəza deyilir:

I. R çoxluğunda elementlərin cəmi adlanan cəbri əməl təyin edilmişdir, yəni istənilən $x, y \in R$ elementlərinə qarşı onların cəmi adlanan, bu çoxluğa daxil olan və $z = x + y$ kimi işarə edilən z elementi təyin edilmişdir.

II. R çoxluğunda istənilən $x \in R$ elementi və istənilən λ həqiqi (kompleks) ədədi üçün λ ədədinin x elementinə hasili adlanan və $u = \lambda \cdot x$ kimi işarə edilən $u \in R$ elementi təyin edilmişdir.

III. Göstərilən iki cəbri əməl aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1^0. $x + y = y + x$ (kommutativlik)

2^0. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (assosativlik)

3^0. Sıfır element adlanan elə $\theta \in R$ vardır ki, istənilən $x \in R$ üçün $x + \theta = x$.

4^0. İstənilən $x \in R$ elementi üçün onun əksi olan $(-x)$ elementi vardır ki, $x + (-x) = \theta$.

5^0. İstənilən $x \in R$ üçün $1 \cdot x = x$.

6^0. İstənilən $x \in R$ və λ, μ ədədləri üçün $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

7^0. İstənilən $x \in R$ və λ, μ ədədləri üçün $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

8^0. İstənilən $x, y \in R$ və λ ədədi üçün $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Əgər tərifə daxil olan λ, μ ədədləri həqiqi ədədlər meydanından götürülürsə, R həqiqi xətti fəza, əgər kompleks ədədlər meydanından götürülərsə, onda R kompleks xətti fəza adlanır.

Bilavasitə xətti fəzanın tərifindən aşağıdakı nəticələri ala bilərik:

Nəticə 1. Xətti fəzanın sıfır elementi yeganədir.

Doğrudan da θ_1 və θ_2-nin R fəzasının sıfır elementləri olduğunu fərz etsək, 3^0 şərtinə görə $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$ və $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$ olar. Buradan 1^0 şərtinə görə $\theta_1 = \theta_2$ alarıq.

Nəticə 2. Xətti fəzada hər bir elementin yeganə əks elementi vardır.

Əksinə, fərz edək ki, hər hansı x elementinin y_1 və y_2 əks elementləri vardır. Onda $x + y_1 = \theta$, $x + y_2 = \theta$ olar. Ardıcıl olaraq 3^0, 2^0, 1^0 şərtlərindən istifadə edərək, yaza bilərik:

$$y_1 = y_1 + \theta = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 =$$
$$= (x + y_1) + y_2 = \theta + y_2 = y_2$$

$y_1 = y_2$, yəni əks element yeganədir.

Nəticə 3. Xətti fəzanın θ elementi istənilən x elementinin 0 ədədinə hasilinə bərabərdir.

Tutaq ki, x istənilən element, y - isə onun əksi olan elementdir. Yaza bilərik:

$$x\cdot 0 = x\cdot 0+\theta = x\cdot 0+(x+y) = (x\cdot 0+x)+y =$$
$$= (x\cdot 0+x\cdot 1)+y = x(0+1)+y = x\cdot 1+y = x+y = \theta \to x\cdot 0=\theta$$

Nəticə 4. Xətti fəzada hər bir x elementinin əksi $y=(-1)x$ -ə bərabərdir.

Bunun üçün göstərmək lazımdır ki, $x+y=\theta.$ Doğrudan da

$$x+y = x+(-1)x = 1\cdot x+(-1)x =$$
$$= [1+(-1)]x = 0\cdot x = x\cdot 0 = \theta .$$

Qeyd edək ki, xətti fəzada istənilən x və y elementlərinin fərqi yeganə üsulla təyin edilir. x və y -in fərqi elə z elementinə deyilir ki, $z+y=x$ olsun. Bu element $z=x+(-1)y$ kimi təyin edilir. Xətti fəzalara misallara baxaq:

Misal 1. Fəzada bütün sərbəst vektorlar çoxluğunu götürək. Vektorların cəmini analitik həndəsə kursunda olduğu kimi "paraleloqram" qaydası ilə təyin edək. Vektor λ ədədinə vurularkən, onun uzunluğu $|\lambda|$ ədədinə vurulur, $\lambda>0$ olduqda istiqamət dəyişmir, $\lambda<0$ olduqda isə vektorun istiqaməti əksinə dəyişir. Bu qayda ilə təyin edilmiş cəm və ədədə vurma əməllərinin 1^0-8^0 şərtlərini ödədiyini asanlıqla göstərə bilərik. Deməli, fəzada bütün sərbəst vektorlar çoxluğu xətti fəza təşkil edir. Eyni qayda ilə müstəvi üzərində və düz xətt üzərindəki vektorlar çoxluqlarının xətti fəza təşkil etdiyini göstərə bilərik. Bu fəzaları uyğun olaraq R^3, R^2 və R^1 ilə işarə edirlər.

Misal 2. Elementləri n sayda nizamlanmış həqiqi ədədlərdən ibarət $(x_1, x_2, ..., x_n)$ toplusundan düzəlmiş çoxluğa baxaq. Bu çoxluğun elementlərini $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ kimi işarə edək. $x_1, x_2, ..., x_n$ həqiqi ədədlərinə x elementinin koordinatları deyilir. Bu çoxluğu R^n ilə işarə edirlər. $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ elementlərinin cəmini və elementin ədədə hasilini aşağıdakı kimi təyin edək:

$x+y=(x_1+y_1,\, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$, $\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Fəzanın sıfır elementi $0=(0,0,...,0)$, x -in əksi olan element isə $-x=(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ kimi təyin edilir.

1^0-8^0 şərtlərinin ödənməsini asanlıqla yoxlamaq olar.

Misal 3. $a\le x\le b$ parçasında kəsilməyən bütün funksiyalar çoxluğunu götürək. Funksiyaların cəmi və ədədə hasilini adi qayda ilə, riyazi analiz kursunda olduğu qayda ilə təyin edək. Bu çoxluq da təyin edilmiş əməllərə nəzərən xətti fəza təşkil edir. Bu fəzanı $C[a,b]$ kimi işarə edirlər.

Misal 4. Dərəcəsi n natural ədədini aşmayan bütün $\{p_n(t)\}$ çoxhədlilər çoxluğunu götürək. Çoxhədlilərin cəmi və çoxhədlinin ədədə hasilini adi qayda ilə təyin edək. 1^0-8^0 şərtlərinin ödənilməsi aşkardır. Bu çoxluq da xətti fəza təşkil edir. Əgər $\{p_n(t)\}$ çoxluğuna $[a,b]$ parçasında baxsaq, bu çoxluğun $C[a,b]$ xətti fəzasının altçoxluğu olduğunu görərik.

Misal 5. n-tərtibli kvadrat matrislər çoxluğunu götürək. $\|a_{ij}\|$ və $\|b_{ij}\|$ matrislərinin cəmini $\|a_{ij}+b_{ij}\|$, $\|a_{ij}\|$ matrisinin λ ədədinə hasilini isə $\|\lambda a_{ij}\|$ kimi təyin edək. Sıfır matris bütün elementləri sıfırlardan ibarət olan matrisdir. Xətti fəzanın bütün aksiomlarının ödənməsini yoxlamaq olar. Bu çoxluq da xətti fəzadır.

Misal 6. $C^k[a,b]$ (k – natural ədəddir) ilə $[a,b]$ parçasında k dəfə kəsilməz diferensiallanan funksiyalar çoxluğunu işarə edək. $x(t), y(t) \in C^{(k)}[a,b]$ olduqda $(x(t)+y(t)) \in C^{(k)}[a,b]$ və $(\lambda x(t)) \in C^{(k)}[a,b]$.

Bu çoxluğunda xətti fəza təşkil etməsi aydındır.

Misal 7. Bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğunu götürək: $R_+ = (0,+\infty)$. Bu çoxluğun iki x və y elementlərinin cəmini bu ədədlərin $x\cdot y$ hasili kimi, x ədədinin λ–ya hasilini isə x^λ kimi təyin edək. Bu çoxluğun sıfır elementi 1, x elementinə uyğun əks element isə $\frac{1}{x}$ həqiqi ədədidir.

1^0-8^0 aksiomlarının doğruluğunu asanlıqla yoxlamaq olar. Məsələn $1^0, 2^0$ aksiomlarının doğruluğu $x\cdot y = y\cdot x$ və $x(yz)=(xy)z$ bərabərliklərindən alınır. $3^0, 4^0$ aksiomları isə $x\cdot 1 = x$ və $x\cdot\frac{1}{x}=1$ olmasından alınır. 5^0 şərti $x^1 = x$, $6^0, 7^0$ şərtləri isə $(x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda}$ və $x^{(\lambda+\mu)} = x^\lambda \cdot x^\mu$ bərabərliklərindən alınır. 8^0 şərti isə $(x\cdot y)^\lambda = x^\lambda\cdot y^\lambda$ – dan alınır.

Beləliklə R_+ çoxluğunun daxil edilmiş cəm və ədədə vurma əməllərinə görə xətti fəza olduğunu alırıq.

Misal 8. $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ şəklində ardıcıllıqlardan ibarət olan və $\sum_{n=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$ şərtini ödəyən elementlər çoxluğunu l_2 ilə işarə edək. Elementlərin cəmini və elementin ədədə hasilini belə təyin edək:

$$x+y=(x_1,x_2,...x_n,...)+(y_1,y_2,...y_n,...)=$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n,...)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...)$$

İki x və y elementlərinin cəminin də l_2 – yə daxil olması

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \le 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_k|^2\right)$$

bərabərsizliyindən alınır.

$1^0 - 8^0$ aksiomlarının ödənməsini biləvasitə yoxlamaq olar. l_2 – xətti fəzadır.

Misal 9. Yığılan ardıcıllıqlardan ibarət c çoxluğu, eləcə də bütün məhdud ədədi ardıcıllıqlardan ibarət m çoxluğu uyğun koordinantlara görə toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəza təşkil edirlər.

İndi isə müəyyən səbəblərə görə xətti fəza təşkil etməyən çoxluqlara misallar göstərək.

a) dərəcəsi n natural ədədinə bərabər olan bütün çoxhədlilər çoxluğu xətti fəza təşkil etmir. Çünki iki n – dərəcəli çoxhədlinin cəmi n dərəcəli olmaya da bilər. Məsələn $p(t) = t^n + 2t + 2,\ Q(t) = -t^n + t - 4$ çoxhədlilərin cəmi $p(t) + q(t) = 3t - 2$ n dərəcəli çoxhədli deyildir.

b) dərəcəsi n natural ədədini aşmayan və bütün əmsalları müsbət ədədlər olan çoxhədlilər çoxluğu xətti fəza təşkil etmir. Çünki şoxhədlinin mənfi ədədə hasili olan çoxhədli bu çoxluğa daxil deyildir.

v) $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan və $|f(t)| \le 1$ şərtini ödəyən bütün funksiyalar çoxluğu da xətti fəza təşkil etmir. Çünki $|f_1(t)| \le 1,\ |f_2(t)| \le 1,$ olmasından $|f_1(t) + f_2(t)| \le 1$ olması çıxmaya da bilər.

q) Fəzada hər hansı l düz xəttinə kolleniar olan vektorlar istisna olmaqla bütün sərbəst vektorlar çoxluğunu götürək. Bu vektorlar çoxluğu da xətti fəza təşkil etmir, çünki bu düz xəttə nəzərən simmetrik olan vektorların cəmi l – üzərində yerləşən vektorlardır və bu çoxluğa daxil deyildir.

10.2. Vektorların xətti asılılığı və xətti asılı olmaması

Fərz edək ki, R hər hansı həqiqi xətti fəza, $x, y, ...z, ...$ isə bu fəzanın elementləridir.

$\alpha, \beta, ..., \gamma$ istənilən həqiqi ədədlər olduqda

$$\alpha x + \beta y + ... + \gamma z \qquad (1)$$

şəklində ifadəyə $x, y, ...z$ elementlərinin xətti kombinasiyası deyilir.

Tərif 1. Əgər heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan elə $\alpha, \beta, ...\gamma$ həqiqi ədədləri tapmaq olarsa ki,

$$\alpha x + \beta y + ... + \gamma z = 0 \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənilsin, bu halda $x, y, ...z$ elementlərinə xətti asılı elementlər deyilir. Əgər $x, y, ...z$ elementləri xətti asılı deyilsə, onlara xətti asılı olmayan elementlər deyilir. Xətti asılı olmayan elementlərin dəqiq tərifi aşağıdakı kimi verilir.

Tərif 2. Əgər (2) bərabərliyi yalnız və yalnız $\alpha = \beta = ... = \gamma = 0$ olduqda ödənərsə, bu halda $x, y, ...z$ elementləri xətti asılı olmayan elementlər adlanır.

Teorem 1. R xətti fəzasında $x, y, ..., z$ elementlərinin xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu elementlərdən hər hansı birinin qalan elementlərin xətti kombinasiyası olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, $x, y, ..., z$ elementləri xətti asılıdır, yəni (2) bərabərliyi doğrudur, belə ki, $\alpha, \beta, ..., \gamma$ ədədlərindən heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Tutaq ki, $\alpha \neq 0$. Onda (2) bərabərliyindən

$$x = \lambda y + ... + \mu z\,,\ \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}, ...\ \ \mu = -\frac{\gamma}{\alpha} \tag{3}$$

alarıq, yəni x elementi digər $y, .., z$ elementlərinin xətti kombinasiyasıdır.

Kafilik. Tutaq ki, elementlərdən hər hansı biri, məsələn x qalan elementlərin xətti kombinasiyasıdır, yəni (3) doğrudur. Onda həmin bərabərliyi

$$(-1)x + \lambda y + ... + \mu z = 0 \tag{4}$$

şəklində yaza bilərik. Burada (-1), $\lambda, ...\mu$ ədədlərindən biri sıfırdan fərqli olduğu üçün bu elementlərin xətti asılı olduğunu alırıq. Teorem isbat edildi.

Aşağıdakı sadə təkliflər də doğrudur.

1. Əgər verilmiş $x, y, ..., z$ elementlərindən biri sıfır vektor olarsa, bu halda bu elementlər xətti asılıdır. Doğrudan da, əgər $x = 0$ olarsa, bu halda (2) bərabərliyində $\alpha = 1$, $\beta = ... = \gamma = 0$ götürə bilərik.
2. Əgər $x, y, ..., z$ elementlərinin müəyyən hissəsi xətti asılı olarsa, onda bu elementlərin hamısı xətti asılı elementlər olar.

Doğrudan da əgər $y...z$ elementləri xətti asılı olarsa, bu halda $\beta y + ... + \gamma z = 0$ olar, belə ki, $\beta, ..., \gamma$ -dan heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Bu halda eyni $\beta, ..., \gamma$ ədədləri və $\alpha = 0$ üçün də (2) bərabərliyi doğru olar. Bu isə bütün vektorların xətti asılı olması deməkdir.

Misal 1. R^n fəzasında aşağıdakı elementləri götürək:

$$e_1 = (1,0,0,...,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,...,0)$$
$$e_3 = (0,0,1,...,0)$$
$$......................$$
$$e_n = (0,0,0,...,1)$$

Göstərək ki, bu elementlər xətti asılı deyildirlər:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0$$

götürək:

$$\alpha_1(1,0,0,...,0) + \alpha_2(0,1,0,...,0) + ... + \alpha_n(0,0,0,...,1) = 0$$

$$(\alpha_1,0,0,...,0) + (0,\alpha_2,0,....,0) + ... + (0,0,0,...,\alpha_n) = 0 .$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 .$$

Buradan $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ alırıq. Bu isə baxılan elementlərin xətti asılı olmaması deməkdir. Göstərək ki, $e_1, e_2, ..., e_n$ elementləri və hər hansı $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ elementi birlikdə xətti asılı elementlər sistemidir. Bunun üçün x elementinin $e_1, e_2, ..., e_n$ elementlərinin xətti kombinasiyası olduğunu göstərmək kifayətdir. Bunu asanlıqla almaq olar:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1,0,0,...,0) + (0, x_2,0,...,0) +$$

$$+ (0,0, x_3,...,0) + ... + (0,0,0,..., x_n) = x_1(1,0,0,...,0) +$$

$$+ x_2(0,1,0,...,0) + x_3(0,0,1,...,0) + ... + x_n(0,0,0,...,1) =$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n .$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n .$$

Misal 2. $C[0,\pi]$ fəzasında $1, \cos 2t$, $\sin^2 t$ funksiyalarının xətti asılı olduğunu göstərin.

Doğrudan da

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2t = \alpha \cdot 1 + \beta \cos 2t$$

bərabərliyindən $\sin^2 t$-nin 1 və $\cos 2t$-nin xətti kombinasiyası olduğunu alırıq. Bu isə onların xətti asılı olması deməkdir.

10.3. Xətti fəzanın bazisi və vektorun koordinatları

İstənilən R həqiqi xətti fəzasını götürək.

Tərif 1. Əgər R xətti fəzasının istənilən x elementi üçün elə $x_1, x_2, ..., x_n$ həqiqi ədədləri tapmaq olarsa ki,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \tag{1}$$

bərabərliyi ödənilsin, bu halda xətti asılı olmayan $e_1, e_2, ..., e_n$ elementləri fəzanın bazisi adlanır.

Bu halda (1) bərabərliyi x elementinin $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisi üzrə ayrılışı, $x_1, x_2, ..., x_n$ isə x elementinin bu bazisdə koordinatları adlanır. x elementinin $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisi üzrə ayrılışı yeganədir, yəni x elementinin $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisinə görə koordinatları birqiymətli təyin edilir.

Bunun üçün fərz edək ki, x elementinin (1) ayrılışından başqa

$$x = x_1'e_1 + x_2'e_2 + \ldots + x_n'e_n \tag{2}$$

şəklində başqa bir ayrılışı da vardır. Bu halda (1) və (2) bərabərliklərini tərər-tərəfə çıxsaq, alarıq:

$$\left(x_1 - x_1'\right)e_1 + \left(x_2 - x_2'\right)e_2 + \ldots + \left(x_n - x_n'\right)e_n = 0 \tag{3}$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ elementləri xətti asılı olmadığı üçün (3) bərabərliyindən $x_1 - x_1' = 0$, $x_2 - x_2' = 0$,..., $x_n - x_n' = 0$, yaxud $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$,..., $x_n = x_n'$ alırıq. Bu isə bazis üzrə ayrılışın yeganə olduğunu göstərir.

Xətti fəzanın elementlərinin bazis vektorları üzrə ayrılışından istifadə edərək göstərə bilərik ki, fəzanın istənilən iki elementini topladıqda onların uyğun koordinatları toplanır, vektoru hər hansı ədədə vurduqda isə vektorun bütün koordinatları bu ədədə vururlur:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n, \quad y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$$

isə

$$x + y = \left(x_1 + y_1\right)e_1 + \left(x_2 + y_2\right)e_2 + \ldots + \left(x_n + y_n\right)e_n$$

$$\lambda x = \left(\lambda x_1\right)e_1 + \left(\lambda x_2\right)e_2 + \ldots + \left(\lambda_n x_n\right)e_n$$

İndi isə bəzi xətti fəzalarda bazis vektorlarını göstərək:

Analitik həndəsə kursundan məlumdur ki, bütün sərbəst vektorlardan ibarət R^3 fəzasında komplanar olmayan istənilən üç vektor bazis təşkil edir. Eyni qayda ilə müstəvi üzərində yerləşən bütün vektorlardan ibarət olan R^2 fəzasında kolleniar olmayan istənilən iki vektor bu fəzanın bazisini təşkil edir. Verilmiş istiqamətə paralel olan bütün vektorlar çoxluğunda sıfırdan fərqli istənilən vektor bu fəzanın bazis vektorudur.

Yuxarıda göstərdik ki, R^n fəzasında $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$,..., $e_n = (0,0,0,\ldots,1)$ vektorları xətti asılı deyildir və istənilən $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorunu $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots \ \ldots + x_ne_n$ şəklində ayırmaq olar. Bu onu göstərir ki, baxılan vektorlar R^n fəzasının bazisini təşkil edirlər.

Dərəcəsi $(n-1)$-i aşmayan bütün çoxhədlilər çoxluğunda $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2, \ldots, e_n = t^{n-1}$ elementləri bazis təşkil edirlər. $p(t) = a_1 + a_2(t) + a_3t^2 + \ldots + a_nt^{n-1}$ çoxhədlisinin bu bazisdə koordinatları $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ədədləridir. Bu fəzada başqa bir bazis $e_1' = 1$, $e_2' = (t-a)$, $e_3' = (t-a)^2, \ldots,$ $e_n' = (t-a)^{n-1}$ ola bilər. Hər bir $p(t)$ çoxhədlisini

$$p(t) = p(a) + p'(a)(t-a) + \ldots + \frac{p^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}$$

şəklində göstərmək mümkün olduğundan, $p(t)$ çoxhədlisinin bu bazisdə koordinatları $p(a)$, $p'(a)$,..., $\frac{p^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$ ədədləri olar.

10.4. Sonlu ölçülü və sonsuz ölçülü xətti fəzalar

Fərz edək ki, R hər hansı həqiqi xətti fəzadır.

Tərif 1. Əgər R xətti fəzasında n sayda xətti asılı olmayan elementlər varsa və istənilən $(n+1)$ sayda elementlər xətti asılı isə, onda R n-ölçülü xətti fəza adlanır. n ədədi xətti fəzanın ölçüsü adlanır.

R fəzasının ölçüsünü $\dim R$ kimi işarə edirlər.

Tərif 2. Əgər R xətti fəzasında istənilən sayda xətti asılı olmayan elementlər varsa, onda R fəzası sonsuz ölçülü fəza adlanır.

Fəzanın sonsuz ölçülü olması o deməkdir ki, istənilən n natural ədədi üçün bu fəzada n sayda xətti asılı olmayan elementlər tapmaq olar.

Əgər fəzanın ölçüsü n-ə bərabər isə, onda bu fəzada xətti asılı olmayan istənilən n sayda element bu fəzanın bazisini təşkil edir. Eləcə də, əgər R fəzasında n sayda elementlər bazis təşkil edirsə, onda bu fəzanın ölçüsü n-ə bərabərdir.

R^3 fəzasında komplanar olmayan istənilən üç vektor fəzanın bazisini təşkil etdiyi üçün bu fəza üç ölçülü, müstəvi üzərindəki vektorlar çoxluğu olan R^2 fəzasında kollinear olmayan istənilən iki vektor fəzanın bazisini təşkil edir. Ona görə də bu fəza iki ölçülüdür. Verilmiş düz xəttə paralel olan vektorlar fəzası R'-də sıfırdan fərqli istənilən vektor bazis vektoru olduğundan bu fəzanın ölçüsü birdir.

R^n fəzasında n sayda $e_1=(1,0,0,...,0)$, $e_2=(0,1,0,...,0)$,..., $e_n=(0,0,0,...,1)$ vektorların bu fəzanın bazisi olduğunu göstərmişik. Ona görə də bu fəza n-ölçülü fəzadır.

Göstərək ki, $C[a,b]$ fəzası sonsuz ölçülü fəzadır. Bu məqsədlə $(n+1)$ sayda $1, t, t^2,..., t^n$ elementlərini götürək və

$$\lambda_0+\lambda_1 t+\lambda_2 t^2+...+\lambda_n t^n=0 \tag{1}$$

bərabərliyini yazaq. Göstərək ki, $\lambda_0=\lambda_1=...=\lambda_n=0$.

(2) bərabərliyini ardıcıl olaraq n dəfə diferensiallasaq, alarıq:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n = 0 \\ 0 \cdot \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 t + \ldots + n\lambda_n t^{n-1} = 0 \\ 0 \cdot \lambda_0 + 0 \cdot \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n(n-1)\lambda_n t^{n-2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot \lambda_0 + 0 \cdot \lambda_1 + \ldots + n!\lambda_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) xətti bircins tənliklər sisteminin əsas determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \ldots & t^n \\ 0 & 1 & 2t & \ldots & nt^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & n(n-1)\,t^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğu üçün (2) sisteminin yalnız $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ həlli vardır. Deməli, $1, t, t^2, \ldots, t^n$ xətti asılı deyildir. Bu onu göstərir ki, $C[a,b]$ fəzasında istənilən n üçün $(n+1)$ sayda xətti asılı olmayan elementlər vardır.

Tərifə görə $C[a,b]$-nin sonsuz ölçülü olduğunu alırıq. Xüsusi halda $(n-1)$ dərəcəli $p_{n-1}(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$ çoxhədlisi üçün $p_{n-1}(t) = 0$ bərabərliyindən $a_0 = a_1 = \ldots \ \ldots = a_{n-1} = 0$ alındığı üçün n sayda $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ elementlərinin xətti asılı olmadığını alırıq. Ona görə də dərəcəsi $(n-1)$-i aşmayan çoxhədlilər çoxluğu n ölçülüdür.

Eyni qayda ilə dərəcəsi $(n-2)$-ni aşmayan çoxhədlilər çoxluğu $(n-1)$ ölçülü və nəhayət dərəcəsi 1-i aşmayan çoxhədlilər çoxluğu 2 və 0 dərəcəli çoxhədlilər çoxluğu (həqiqi ədədlər çoxluğu) 1 ölçülüdür.

10.5. Xətti altfəzalar və xətti çoxobrazlılar

Fərz edək ki, X xətti fəzasının L altçoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyir:
1^0. Əgər $x, y \in L$ isə, onda $x + y \in L$.
2^0. Əgər $x \in L$ isə, onda istənilən λ həqiqi ədədi üçün $\lambda x \in L$.

Göstərmək olar ki, əgər L altçoxluğu 1^0, 2^0 şərtlərini ödəyirsə, onda L altçoxluğu özü də xətti fəzadır. Bunun üçün L altçoxluğunda 1^0, 8^0 aksiomlarının ödənməsini göstərmək lazımdır. 3^0 və 4^0 aksiomlarından başqa digər aksiomlar X-ə daxil olan bütün elementlər üçün ödəndiyindən xüsusi halda L-ə daxil olan elementlər üçün də doğrudur. Göstərək ki, L-də 3^0 və 4^0 aksiomları da ödənir.

İstənilən $x \in L$ üçün $\lambda x \in L$ olduğundan xüsusi halda $\lambda = 0$ üçün $\lambda x = \theta$ və $\theta \in L$, eyni zamanda $\lambda = -1$ olduqda $-x \in L$ alırıq. Deməli, L-də 3^0, 4^0 şərtlərini ödəyən θ sıfır və $-x$ əks elementlər vardır. Bu isə L-in xətti fəza olduğunu göstərir.

Tərif 1. R fəzasının 1^0 və 2^0 şərtlərini ödəyən L altçoxluğuna xətti altfəza deyilir.

Yalnız sıfır elementdən ibarət altçoxluq və bütün fəza R-in altfəzalarıdır. Bunlar qeyri-məxsusi altfəzalar adlanır.

$[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzasında dərəcəsi n-i aşmayan bütün cəbri çoxhədlilər çoxluğu $\{p_n(t)\}$ 1^0, 2^0 şərtlərini ödəyir. Ona görə də $C[a,b]$ fəzasının altfəzasıdır.

Tutaq ki, X hər hansı xətti fəzadır.

Tərif 1. Əgər X xətti fəzasının elementlərindən düzülmüş L çoxluğu $x_1, x_2, ..., x_n$ elementləri ilə bərabər $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ şəklində istənilən xətti kombinasiyaları da öz daxilində saxlayarsa, onda L çoxluğuna xətti çoxobrazlı deyilir.

Qeyd edək ki, hər bir xətti çoxobrazlı sıfır elementi öz daxilində saxlayır. Doğrudan da, L boş olmadığından hər hansı x elementinə malikdir. L xətti çoxobrazlı olduğundan, xüsusi halda $-x = (-1)x$ elementini, eyni zamanda $x + (-1)x = 0$ elementini öz daxilində saxlayır.

$x_1, x_2, ..., x_n \in X$ götürək. Mümkün olan bütün $\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n\}$ şəklində olan bütün mümkün cəmlər çoxluğu X-da hər hansı L_0 çoxobrazlısı əmələ gətirir.

L_0 çoxobrazlısı $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlərini saxlayan ən kiçik xətti çoxobrazlıdır. (Yəni, $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlərini saxlayan hər hansı başqa bir L çoxobrazlısı L_0-ı öz daxilində saxlayır, $L_0 \subset L$).

Verilmiş elementləri daxilində saxlayan ən kiçik xətti çoxobrazlı anlayışını sonsuz sayda elementlər üçün də vermək olar. Fərz edək ki, $\{x_0, x_1, ..., x_n ...\} \subset X$ hesabi sayda elementlərdir. Bu elementləri daxilində saxlayan ən kiçik xətti çoxobrazlı dedikdə $\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n\}$ şəklində mümkün olan cəmlər çoxluğu başa düşülür, belə ki, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ istənilən ədədlər, n isə istənilən natural ədəddir.

Verilmiş elementləri daxilində saxlayan ən kiçik xətti çoxobrazlıya bəzən bu elementlərin xətti örtüyü də deyilir.

Misal 1. $C[a,b]$ fəzasında $1, t, t^2, ..., t^n$ elementlərinin xətti çoxobrazlısı dərəcəsi n-i aşmayan bütün $\{p_n(t)\}$ cəbri çoxhədlilərindən ibarətdir.

Misal 2. $C^k[a,b]$, $k \geq 1$ fəzası $C[a,b]$ fəzasında xətti çoxobrazlıdır, çünki k tərtibdən kəsilməz diferensiallanan hər bir funksiya kəsilməz funksiyadır və $C^k[a,b]$ -dən olan funksiyaların xətti kombinasiyaları da $C^k[a,b]$-yə daxildir.

10.6. Xətti fəzanın altfəzaların düz cəminə ayrılması

Tutaq ki, X – xətti fəza, $L_1, L_2, ..., L_n$ -isə ona daxil olan xətti çoxobrazlılardır.

Tərif. Əgər istənilən $x \in X$ elementini birqiymətli olaraq

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad x_i \in L_i \quad (i = 1,2,...,n) \tag{1}$$

şəklində göstərmək olarsa, bu halda deyirlər ki, X fəzası ona daxil olan $L_1, L_2, ..., L_n$ xətti çoxobrazlıların düz cəminə ayrılmışdır. Bu halda

$$X = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i$$

şəklində yazılır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, əgər $X = L_1 \oplus L_2$ isə, onda L_1 və L_2 altfəzalarının ortaq elementi yalnız sıfır element ola bilər. Doğrudan da, L_1 və L_2 sıfırdan fərqli hər hansı ortaq u elementinə malik olarlarsa, bu halda $x \in X$ elementi $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L_2$ ayrılışı ilə bərabər başqa

$$x = (y - u) + (z + u), \; y - u \in L, \; z + u \in L_2$$

ayrılışına da malik olardı. Bu isə şərtə görə mümkün deyildir.

10.7. Xətti fəzaların izomorfluğu

Fərz edək ki, X və X' xətti fəzalardır. Əvvəlcə bu fəzaların sonlu ölçülü olduğu hala baxaq.

Tərif 1. Əgər X və X' xətti fəzalarının elementləri arasında elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olarsa ki, bu uyğunluq zamanı $x, y \in X$ elementlərinə $x', y' \in X'$ uyğun olduqda, $x + y$ elementinə $x' + y'$ və λx elementinə $\lambda x'$ uyğun olsun, onda X və X' fəzaları izomorf xətti fəzalar adlanır.

Qeyd edək ki, əgər X və X' xətti fəzaları izomorf olarsa, bu zaman X fəzasının sıfır elementinə X' fəzasının sıfır elementi uyğun gəlir və tərsinə.

Buradan alırıq ki, əgər fəzalar izomorf isə və X fəzasının $x, y, ..., z$ elementlərinə X' fəzasının $x', y', ..., z'$ elementləri uyğun olarsa, onda $\alpha x + \beta y + ... + \gamma z$ xətti kombinasiyası X fəzasının o zaman sıfır elementi olar ki, $\alpha x' + \beta y' + ... + \gamma z'$ xətti kombinasiyası X' fəzasının sıfır elementi olsun.

Bu onu göstərir ki, əgər X və X' fəzaları izomorf isə, onda bu fəzalarda xətti asılı olmayan elementlərin maksimal sayı bərabərdir. Başqa sözlə, iki izomorf fəza eyni ölçüyə malik olmalıdır və iki müxtəlif ölçülü fəzalar izomorf ola bilməzlər.

Aşağıdakı təklif doğrudur:

Teorem 1. n ölçülü həqiqi X və X' xətti fəzaları izomorfdur.

İsbatı. X fəzasında $e_1, e_2, ..., e_n$, X' fəzasında isə $e_1', e_2', ..., e_n'$ bazislərini götürək. X fəzasının hər bir $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ elementinə qarşı X' fəzasının $x = x_1 e_1' + x_2 e_2' + ... + x_n e_n'$ elementini qarşı qoyaq. Bu uyğunluq X və X' arasında qarşılıqlı birqiymətlidir və $x \to x'$, $y \to y'$ isə onda $x + y \to x' + y'$, $\lambda x \to \lambda x'$ olar.

İndi isə X və X'-in istənilən xətti fəzalar olduğu hala baxaq.

Tərif 2. Əgər X və X' xətti fəzaları arasında xətti və qarşılıqlı birqiymətli uyğunlu q yaradan $x' = J(x)$ funksiyası tapmaq olarsa, onda X və X' fəzaları izomorf xətti fəzalar adlanır. Başqa sözlə, aşağıdakı şərtlər ödənməlidir:

1) İstənilən $x, y \in X$ və istənilən λ, μ ədədləri üçün $J(\lambda x + \mu y) = \lambda Jx + \mu Jy$
2) Əgər $J(x_1) = J(x_2)$ isə, onda $x_1 = x_2$
3) İstənilən $\tilde{x} \in X'$ üçün elə $x \in X$ vardır ki, $\tilde{x} = J(x)$.

İzomorf xətti fəzalara misallar göstərək.

Misal 1. Dərəcəsi n-i aşmayan həqiqi əmsallı çoxhədlilər fəzası R^{n+1} xətti fəzasına izomorfdur. $p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ çoxhədlisi götürək və bu çoxhədliyə qarşı $a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n) \in R^{n+1}$ vektorunu qarşı qoyan $J(p_n(t)) = a$ funksiyası düzəldək. Bu funksiya qarşılıqlı birqiymətli funksiyadır.

Misal 2. İstənilən n ölçülü həqiqi xətti E fəzası R^n fəzasına izomorfdur.

Bu məqsədlə E fəzasında $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisini götürək. İstənilən $x \in E$ vektorunu $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ şəklində göstərə bilərik. x vektoruna qarşı onun $\{e_k\}$ bazisindəki koordinatlarından düzəlmiş $a = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ vektorunu qarşı qoyaq:

$$J(x) = a$$

$y=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+...+\eta_n e_n$ vektoruna qarşı

$$b=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\in R^n$$

qoysaq, $J(y)=b$ olar. Onda λ və μ həqiqi ədədləri üçün

$$\lambda x+\mu y=\lambda(\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+...+\xi_n e_n)+\mu(\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+...+\eta_n e_n)=$$
$$=(\lambda\xi_1+\mu\eta_1)e_1+(\lambda\xi_2+\mu\eta_2)e_2+...+(\lambda\xi_n+\mu\eta_n)e_n$$

oldugundan

$$J(\lambda x+\mu y)=\lambda a+\mu b=\lambda J(x)+\mu J(y)$$

yaza bilərik.

Verilmiş bazisdə vektorun koordinatları yeganə üsulla təyin edildiyi üçün J funksiyası qarşılıqlı birqiymətli olar. Bu qayda ilə E -nin R^n -ə izomorf olduğunu alırıq.

10.8. Xətti fəzalarda qabarıq çoxluqlar

Tutaq ki, X xətti fəzadır. İstənilən $x_1,x_2\in X$ elementlərini götürək. $x=(1-t)x_1+tx_2$, $t\in[0,1]$ şəklində bütün nöqtələr çoxluğuna x_1 və x_2 nöqtələrini birləşdirən parça deyilir.

$E\subset X$ çoxluğunu götürək.

Tərif. Əgər istənilən $x_1,x_2\in E$ üçün bu nöqtələri birləşdirən parça da E çoxluğuna daxil olarsa, onda E çoxluğuna qabarıq çoxluq deyilir.

Tərifdən istifadə edərək göstərmək olar ki, xətti fəzada istənilən xətti çoxobrazlı qabarıq çoxluqdur. Eyni zamanda istənilən sayda qabarıq çoxluqların kəsişməsinin də qabarıq çoxluq olduğunu göstərmək olar.

10.9. Xətti fəzalara aid məsələlər

1. Müstəvi üzərində yerləşən aşağıdakı vektorlar çoxluğunun hansının xətti fəza təşkil edib-etmədiyini göstərin.
a) uc nöqtələri verilmiş düz xətt üzərində yerləşən bütün verktorlar çoxluğu;
b) uc nöqtələri müstəvinin birinci rübündə yerləşən bütün vektorlar çoxluğu
v) uc nöqtələri birinci və ya üçüncü rübdə yerləşən bütün vektorlar çoxluğu
q) uc nöqtələri birinci və ya ikinci rübdə yerləşən bütün vektorlar çoxluğu

2. Verilmiş $a\neq 0$ vektoru ilə φ, $0\le\varphi\le\pi$ bucağı əmələ gətirən bütün vektorlar çoxluğunun xətti fəza təşkil edib-etmədiyini göstərin.

3. Bütün çoxhədlilər çoxluğunun xətti fəza təşkil edib-etmədiyini yoxlayın.

4. Aşağıdakı şərtləri ödəyən bütün çoxhədlilər çoxluğu xətti fəza təşkil edirmi?

a) $f(0)=1$, b) $f(0)=0$, v) $2f(0)-3f(1)=0$,
q) $f(1)+f(2)+...+f(n)=0$

5. Aşağıdakı n tərtibli kvadrat matrislər çoxluğundan hansının xətti fəza təşkil edib-etmədiyini göstərin:
a) birinci sətir elementləri sıfır olan matrislər çoxluğu
b) bütün diaqonal matrislər çoxluğu
v) bütün cırlaşan (məxsusi) matrislər çoxluğu

6. Sıfır vektor daxil olan vektorlar sisteminin xətti asılı olduğunu göstərin.

7. Bir-birindən sabit vuruqla fərqlənən iki vektorun daxil olduğu sistemin xətti asılı olduğunu göstərin.

8. Göstərin ki, vektorlar sisteminin hər hansı altsistemi xətti asılı isə, onda bütün sistem xətti asılıdır.

9. Göstərin ki, sistem xətti asılı deyilsə, onda onun istənilən althissəsi də xətti asılı deyildir.

10. Tutaq ki, x, y, z xətti asılı olmayan vektorlar sistemidir.

a) $x,\ x+y,\ x+y+z$;

b) $x+y,\ y+z,\ z+x$;

v) $x-y,\ y-z,\ z-x$

vektorlar sistemi xətti asılı olmayan sistemlər olarmı?

11. r, s, υ – bərabər olmayan həqiqi ədədlərdir. $(t-r)(t-s)$, $(t-r)(t-\upsilon)$, $(t-s)(t-\upsilon)$ çoxhədliləri xətti asılı olarmı?

12. Aşağıda göstərilən vektorlar sisteminin xətti asılı olub olmadığını göstərin.

a) $x_1=(1,2,3)$, $x_2=(2,5,7)$, $x_3=(3,7,10)$

b) $x_1=(1,2,3)$, $x_2=(2,5,7)$, $x_3=(3,7,11)$

v) $x_1=(1,2,3)$, $x_2=(2,5,7)$, $x_3=(3,7,10+\varepsilon)$.

Burada $\varepsilon>0$ ixtiyari kiçik ədəddir.

q) $x_1=(1,1,1,1)$, $x_2=(1,-1,-1,1)$,
$x_3=(1,-1,1,-1)$, $x_4=(1,1,-1,-1)$

13. R^5 fəzasında aşağıdakı vektorların xətti örtüyünü təsvir edin.

a) $x_1=(1,0,0,0,0)$, $x_2=(0,0,1,0,0)$, $x_3=(0,0,0,0,1)$

b) $x_1=(1,0,0,0,1)$, $x_2=(0,1,0,1,0)$, $x_3=(0,0,1,0,0)$

v) $x_1=(1,0,0,0,-1)$, $x_2=(0,1,0,0,-1)$,
$x_3=(0,1,0,0,-1)$, $x_4=(0,0,0,1,-1)$

14. Aşağıdakı çoxhədlilər sisteminin xətti örtüyünü təsvir edin.

a) $1, t, t^2$ b) $(1+t^2)$, $(1+t^2)$, $(1+t+t^2)$

v) $(1-t^2)$, $(t-t^2)$, $(2-t-t^2)$, q) $(1-t^2)$, $(t-t^2)$

15. Aşağıda vektorlar sisteminin R^n fəzasında basiz təşkil etdiyini göstərin.

a) $x_1=(1,2,3,...,n)$, $x_2=(0,2,3,...,n)$, $x_3=(0,0,3,...,n),\ldots,$
$x_n=(0,0,0,...,n)$

b) $x_1=(1,1,1,...,1)$, $x_2=(1,1,1,...,1,1,0)$,
$x_3=(1,1,1,...,1,0,0),\ldots,x_n=(1,0,0,...,0,0,0)$

v) $x_1=(1,1,1,1,...,1)$, $x_2=(0,1,0,0,...,0)$, $x_3=(0,1,1,0,...,0)$,
$x_4=(0,1,1,1,...,0),\ldots,$ $x_n=(0,1,1,1,...,1)$

16. Aşağıdakı vektorlar sistemindən hansının R^4 fəzasında bazis əmələ gətirdiyini göstərin.

a) $x_1=(1,2,-1,-2)$, $x_2=(2,3,0,-1)$, $x_3=(1,2,1,3)$,
$x_4=(1,3,-1,0)$

b) $x_1=(1,2,-1,-2)$, $x_2=(2,3,0,-1)$, $x_3=(1,2,1,4)$,
$x_4=(1,3,-1,0)$

17. Aşağıdakı vektorların R^3 fəzasında bazis əmələ gətirdiyini göstərin və verilmiş vektorun bu bazisdə koordinatlarını tapın.

a) $e_1=(2,2,-1)$, $e_2=(2,-1,2)$, $e_3=(-1,2,2)$, $x=(1,1,1)$

b) $e_1=(1,5,3)$, $e_2=(2,7,3)$, $e_3=(3,9,4)$, $x=(2,1,1)$

18. Aşağıdakı vektorların R^4 fəzasında bazis əmələ gətirdiyini göstərin və verilmiş vektorun bu bazisdə koordinatlarını tapın.

a) $e_1=(1,2,1,1)$, $e_2=(2,3,1,0)$, $e_3=(3,1,1,-2)$,
$e_4=(4,2,-1,-6)$, $x=(0,0,2,7)$

b) $e_1=(1,2,-1,-2)$, $e_2=(2,3,0,-1)$, $e_3=(1,2,1,4)$,
$e_4=(1,3,-1,0)$, $x=(7,14,-1,2)$

19. $t^5-t^4+t^3-t^2-t+1$ çoxhədlisinin aşağıdakı göstərilən bazislərdə koordinatlarını tapın.

a) $1,t,t^2,t^3,t^4,t^5$

b) $1,t+1,t^2+1,t^3+1,t^4+1,t^5+1$

v) $1+t^3,t+t^3,t^2+t^3,t^3,t^4+t^3,t^5+t^3$

20. Dərəcəsi n-i aşmayan bütün çoxhədlilər çoxluğunda a) $f(0)=0$, b) $f(1)=0$, v) $f(a)=0$, a – istənilən həqiqi ədəddir, q) $f(0)=f(1)=0$ şərtləri ilə təyin edilmiş altçoxluqların xətti altfəza olduğunu göstərin və bu altfəzaların ölçüsünü tapın.

XI FƏSİL
METRİK FƏZALAR

Riyazi analizin bir çox mühüm anlayışları, o cümlədən ardıcıllığın və funksiyanın limiti, funksiyanın kəsilməzliyi və törəməsi, eləcə də bir çox anlayışlar ədəd oxu üzərində nöqtələr arasındakı məsafə anlayışı ilə sıx bağlıdır. Bir çox mühüm faktlar həqiqi ədədlərin cəbri xarakteri ilə deyil, bu ədədlərin bir-birinə yaxınlığını göstərən məsafə ilə təyin edilir. Həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş məsafə anlayışının istənilən təbiətli elementlərdən ibarət çoxluqlarda ümumiləşməsi müasir riyaziyyatın çox mühüm analyışı olan metrik fəzalar anlayışına gətirir. Ona görə də əvvəlcə metrik fəza analyışını daxil edək və onun bəzi xassələrini göstərək.

11.1. Metrik fəzanın tərifi. Misallar

Fərz edək ki, X fəzasının istənilən $x, y \in X$ elementlərinə qarşı bu elementlər arasındakı məsafə adlanan və aşağıdakı şərtləri ödəyən mənfi olmayan $\rho(x, y)$ kəmiyyəti qarşı qoyulmuşdur:

I. $\rho(x, y) = 0$ yalnız və yalnız $x = y$ olduqda

II. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \ \forall x, y \in X$ (simmetriklik)

III. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \ \forall x, y, z \in X$ (üçbucaq aksiomu)

$\rho(x, y)$ kəmiyyəti x və y elementləri arasındakı məsafə, yaxud X fəzasının metrikası adlanır. I-III şərtlərinə məsafə aksiomları və ya metrika aksiomları deyilir.

Əgər verilmiş X fəzasında təyin edilmiş məsafə (metrika) I,II,III şərtlərini (aksiomlarını) ödəyərsə, onda X metrik fəza adlanır.

Metrik fəzalara misallar göstərək.

1. İstənilən elementlər çoxluğunda

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ əgər } x = y \\ 1, \text{ əgər } x \neq y \end{cases}$$

kimi məsafə təyin etsək, bu çoxluq metrik fəza olar. Bu fəzaya izolə edilmiş nöqtələr fəzası deyilir.

2. R **-fəzası.** $R = (-\infty, \infty)$ həqiqi ədədlər çoxluğunu götürək. x və y ədədləri arasında məsafəni

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

kimi təyin edək. Mütləq qiymətin məlum xassələrindən məsafə aksiomlarının ödənildiyini almaq olar. Doğrudan da

I. $|x - y| = 0$ olarsa, $x - y = 0$, $x = y$ və tərsinə

II. $\rho(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|=|-1|\cdot|y-x|=|y-x|=\rho(y,x)$

III. $\rho(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y|\leq$

$\leq|x-z|+|z-y|=\rho(x,z)+\rho(z,y)$

Ona görə də R metrik fəzadır.

3. R^n-fəzası. Nizamlanmış n sayda həqiqi ədədlərdən düzəlmiş $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ çoxluğunda məsafəni

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \tag{1}$$

kimi təyin edək. Bu fəza n-ölçülü Evklid fəzası adlanır və R^n kimi işarə edilir. I və II aksiomların ödənməsi aşkardır. III aksiomun doğru olduğunu göstərək. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ götürək. Bu halda üçbucaq aksiomu aşağıdakı kimi olar:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2} \tag{2}$$

$z_k-x_k=a_k$, $y_k-z_k=b_k$ qəbul etsək, $y_k-x_k=a_k+b_k$ olar. Onda (2) bərabərsizliyi belə olar:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2} \tag{3}$$

(3) bərabərsizliyinin doğruluğu isə məlum Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən alınır. Həmin bərabərsizlik belədir:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right) \tag{4}$$

(4) Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə etsək, yaza bilərik:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

Buradan (3) bərabərsizliyinin və nəticədə (2) bərabərliyinin doğru olmasını alırıq. Bu isə III aksiomun doğru olduğunu göstərir.

Qeyd 1. Bir çox hallarda eyni bir elementlər çoxluğunda I-III aksiomlarını ödəyən müxtəlif metrikalar təyin etmək olar. Məsələn, baxdığımız misalda, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ şəklində elementlər çoxluğunda məsafəni

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \tag{5}$$

kimi təyin etmək olar. Bu halda I-III aksiomlarının ödənməsini asanlıqla yoxlamaq olar. Alınmış metrik fəzanı R_1^n kimi işarə edirlər.

Baxılan çoxluqda elementlər arasındakı məsafəni

$$\rho_0(x,y)=\max_{1\le k\le n}|y_k-x_k| \tag{6}$$

kimi təyin edək. Bu halda da məsafə aksiomlarının ödəndiyini göstərə bilərik. Alınmış metrik fəza R_0^n kimi işarə olunur.

Bu misaldan görünür ki, eyni bir elementlər çoxluğu müxtəlif üsullarla metrikləşə bilər və bu zaman alınmış fəzalar müxtəlif metrik fəzalar olar.

Tərif. Əgər elə $c_1>0$, $c_2>0$ ədədləri varsa ki,

$$c_1\rho_1(x,y)\le\rho_2(x,y)\le c_2\rho_1(x,y)$$

bərabərsizliyi ödənsin, bu halda $\rho_1(x,y)$ və $\rho_2(x,y)$ məsafələri ekvivalent məsafələr adlanır.

4. $C[a,b]$ **fəzası.** $[a,b]$ parçasında kəsilməz bütün funksiyalar çoxluğunda məsafəni

$$\rho(f,g)=\max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)| \tag{7}$$

kimi təyin edək. Məsafə aksiomlarının ödənməsini yoxlayaq:

I. $|f(t)-g(t)|\ge 0$ olduğu üçün $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|\ge 0$ olduğunu alırıq. $\rho(f,g)=0$ olarsa, $\max\limits_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|=0$ və buradan $f(t)=g(t)$. Tərsinə, $f(t)=g(t)$ olarsa, $\rho(f,g)=0$ olar.

II. $\rho(f,g)=\max\limits_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|=\rho(g,f)$ olması aydındır.

III. Həqiqi ədədin mütləq qiymətinin xassələrinə görə

$$|f(t)-g(t)|=|f(t)-\varphi(t)+\varphi(t)-g(t)|\le|f(t)-\varphi(t)|+|\varphi(t)-g(t)|$$

Buradan

$$|f(t)-g(t)|=\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|+\max_{a\le t\le b}|\varphi(t)-g(t)|,$$

$$\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|\le\max_{a\le t\le b}|f(t)-\varphi(t)|+\max_{a\le t\le b}|\varphi(t)-g(t)|$$

$$\rho(f,g)\le\rho(f,\varphi)+\rho(\varphi,g)$$

alırıq.

Alırıq ki, I-III aksiomları ödənir və $C[a,b]$ metrik fəzadır.

Qeyd 2. $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar çoxluğunda məsafəni başqa üsulla, aşağıdakı qayda ilə təyin edək:

$$\rho(f,g)=\left(\int_a^b[f(t)-g(t)]^2dt\right)^{1/2} \tag{8}$$

Bu üsulla təyin edilmiş məsafənin I, II aksiomlarını ödənməsini asanlıqla yoxlamaq olar. III aksiomun doğru olması Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinin inteqral forması olan

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \le \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

bərabərsizliyindən istifadə etməklə alınır.

Alınmış metrik fəza $C^2[a,b]$ kimi işarə edilir və kvadratik metrikaya malik kəsilməz funksiyalar fəzası adlanır. Bu üsulla alınmış metrik fəzanın elementlərinin kəsilməz funksiyalar olmasına baxmayaraq, bu fəza $C[a,b]$ fəzasından metrik xassələrinə görə kəskin şəkildə fərqlənən fəzadır.

5. l_2**-fəzası.** Bu fəzanın elementləri mümkün olan bütün $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ həqiqi ədədlər ardıcıllıqlarından ibarətdir, belə ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

Bu fəzada elementlər arasında məsafə

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2\right)^{1/2} \tag{9}$$

bərabərliyi ilə təyin edilir. Aşağıda göstərilən sadə

$$(x_k \pm y_k)^2 \le 2\left(x_k^2 + y_k^2\right)$$

bərabərsizliyindən alınır ki, əgər $x, y \in l_2$ isə, yəni

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \quad \text{və} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$$

olarsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2 < \infty$. Bu onu göstərir ki, (8) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıra yığılandır və məsafəni bu üsulla təyin etmək olar. I və II aksiomların ödənməsi aydındır. Üçbucaq aksiomu aşağıdakı kimidir:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - z_k)^2} \tag{10}$$

(10) bərabərsizliyinə daxil olan hər üç sıra yığılandır. Digər tərəfdən istənilən n üçün

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2}$$

doğru olduğundan $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək, bu bərabərsizlikdən (10)-un doğru olduğunu alarıq. l_2 fəzasında I-III aksiomları ödəndiyi üçün l_2 metrik fəzadır.

6. m **fəzası.** Həqiqi ədədlərdən təşkil edilmiş bütün məhdud $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ardıcıllıqlar çoxluğunu götürək. İstənilən iki element arasında məsafəni

$$\rho(x,y)=\sup_k |y_k - x_k| \tag{11}$$

kimi təyin edək. Ardıcıllıqların məhdudluğu şərtindən və dəqiq yuxarı sərhəddin xassələrindən istifadə etməklə, I-III aksiomlarının doğru olduğunu yoxlaya bilərik. Alınmış metrik fəzanı m ilə işarə edirlər.

7. R_p^n $(p \geq 1)$ **fəzası.** Nizamlanmış n sayda həqiqi ədədlərdən düzəlmiş $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ elementlər çoxluğunda məsafəni

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^p\right)^{1/p}, \ p\geq 1 \tag{12}$$

kimi təyin edək. Bu məsafənin I-III aksiomlarını ödədiyini göstərək. I və II aksiomların ödənməsi aşkardır. III aksiomunun doğruluğunu göstərək. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ götürək. $z_k - x_k = a_k$, $y_k - z_k = b_k$ işarə edək. Onda $a_k + b_k = y_k - x_k$ olar və

$$\rho_p(x,y)\leq \rho_p(x,z)+\rho_p(z)y$$

bərabərsizliyi

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p} \tag{13}$$

şəklində olar. (13) bərabərsizliyi Minkovski bərabərsizliyi adlanır və onun isbatını sonralar göstərəcəyik.

Qeyd 3. Bu misalda baxılan $\rho_p(x,y)$ metrikası $p=2$ olduğu halda R^n fəzasının Evklid metrikası ilə üst-üstə düşür. $p=1$ olduğu halda isə R_1^n fəzasının metrikası ilə eynidir. R_0^n fəzasının $\rho_0(x,y)=\max\limits_{1\leq k\leq}|y_k - x_k|$ metrikasının $\rho_p(x,y)$ metrikasının limit halı kimi baxmaq olar, yəni

$$\rho_0(x,y)=\lim_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k - x_k|^p\right)^{1/p}.$$

8. l_p **fəzası** $(p\geq 1)$**.** Bu fəzanın elementləri həqiqi ədədlərdən düzəlmiş mümkün olan elə $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ardıcıllıqlardır ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$$

Elementlər arasındakı məsafə

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p} \tag{14}$$

kimi təyin edilir.

Minkovski bərabərsizliyinə görə istənilən n üçün

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}. \tag{15}$$

doğrudur. Şərtə görə

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \quad \text{və} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|y_{x_k}|^p$$

sıraları yığılan olduğundan (15) bərabərsizliyində $n\to\infty$ şərtində limitə keçsək, alarıq:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p} \tag{16}$$

Bu bərabərsizlikdən alırıq ki, istənilən $x,y\in l_p$ üçün elementlər arasında məsafənin (14) şəklində təyin edilməsinin mənası vardır. Eyni zamanda (16) bərabərsizliyi l_p fəzasında üçbucaq aksiomunun doğru olduğunu göstərir. Digər iki aksiomun ödənməsini asanlıqla yoxlamaq olar.

9. $M[0,1]$**– həqiqi məhdud funksiyalar fəzası.** $[0,1]$ parçasında təyin edilmiş, həqiqi t dəyişənindən asılı bütün məhdud funksiyalar çoxluğuna baxaq. Bu çoxluqda məsafə

$$\rho(f,g)=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)-g(t)|$$

kimi təyin edilir. Metrika aksiomlarının ödənməsini asanlıqla yoxlamaq olar. Bu fəza $M[0,1]$ kimi işarə edilir. Aydındır ki, $C[0,1]\subset M[0,1]$ doğrudur.

10. S**– bütün ədədi ardıcıllıqlar fəzası.** Həqiqi ədədlərdən ibarət bütün ədədi ardıcıllıqlar çoxluğunu götürək: $x=\{x_{\dot n}\}$, $y=\{y_{\dot n}\}$. Bu adıcıllıqlar arasında məsafəni

$$\rho(x,y)=\sum_{\dot n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\dot n}}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} \tag{17}$$

kimi təyin edək. (17) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıra yığılan olduğundan məsafəni bu qayda ilə təyin etmək olar. Metrikanın I və II aksiomlarının doğruluğu aydındır. Üçbucaq aksiomunun ödənməsi isə aşağıdakı məlum bərabərsizlikdən alınır:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \qquad (a,\,b\in R)$$

Sonuncu bərabərsizliyin doğruluğunu göstərmək üçün $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ funksiyasına baxaq. $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ olduğu üçün $f(x)$ artan funksiyadır. Ona görə də $|a+b|\le|a|+|b|$ olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|a|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

Deməli, təyin edilmiş məsafə I-III aksiomlarını ödəyir və S -metrik fəzadır.

11. $L_p[a,b]$, $p\ge1$ **fəzası.** $[a,b]$ parçasında ölçülən və p dərəcədən cəmlənən, yəni

$$\int_a^b|f(x)|^p dx<\infty$$

şərtini ödəyən bütün funksiyalar çoxluğunu götürək. Ekvivalent funksiyalar L_p fəzasında bərabər hesab edilir. Bu çoxluqda elementlər arasında məsafə aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\rho(f,g)=\left\{\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p} \tag{18}$$

Minkovski bərabərsizliyinə görə

$$\left\{\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p}\le\left\{\int_a^b|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b|g(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

olduğundan $f(x),g(x)\in L_p(a,b)$ şərtindən

$$(f(x)-g(x))\in L_p(a,b)$$

alırıq. Deməli, məsafə (18) bərabərliyi ilə təyin edilə bilər. $f(x)\sim g(x)$ olduğundan $\rho(f,g)=0$. Eləcə də $\rho(f,g)=\rho(g,f)$. Üçbucaq aksiomu isə bilavasitə Minkovski bərabəsizliyindən alınır:

$$\left\{\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p}\le\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\int_a^b|\varphi(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

Buradan $L_p(a,b)$-nin metrik fəza olsuğunu alırıq. Xüsusi hallar olan $L_1(a,b)$ və $L_2(a,b)$ fəzalarından bir çox məsələlərin həlli zamanı geniş istifadə edilir. Bu fəzalar Lebeq fəzaları adlanır.

12. $|z|<1$ vahid dairəsində analitik, qapalı $|z|\le 1$ vahid dairəsində kəsilməz olan bütün $f(z)$ funksiyalar çoxluğu

$$\rho(f,g)=\max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|$$

məsafəsinə görə metrik fəza təşkil edir.

13. $[0,1]$ parçasında təyin edilmiş bütün ölçülən funksiyalar çoxluğunu götürək. Bu çoxluqda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalar arasında məsafəni

$$\rho(f,g)=\int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx$$

bərabərliyi ilə təyin edək. Bu qayda ilə təyin edilmiş məsafə I-III aksiomlarını ödəyir. Deməli, bu çoxluq metrik fəza təşkil edir.

11.2. Metrik fəzada ardıcıllığın limiti

Tutaq ki, X hər hansı metrik fəzadır, $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ isə X fəzasında hər hansı elementlər ardıcıllığıdır.

Tərif. Əgər elə $x\in X$ elementi varsa ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$ olsun, bu halda ardıcıllıq yığılan ardıcıllıq, x elementi isə $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti adlanır və $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ kimi işarə olunur. Metrik fəzalarda yığılan ardıcıllıqlar haqqında aşağıdakı ümumi teoremləri isbat etmək olar.

Teorem 1. Əgər X metrik fəzasında $\{x_n\}$ ardıcıllığı x elementinə yığılan isə, onda onun istənilən $\{x_{n_k}\}$ altardıcıllığı da x elementinə yığılır.

Teoremin isbatı çox sadə olduğundan verilmir.

Teorem 2. Metrik fəzada x_n elementlər ardıcıllığının ən çoxu bir limiti ola bilər.

İsbatı. Əksini fərz edək, tutaq ki, $x_n \to x$ və $y_n \to y$. Onda istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün kifayət qədər böyük n nömrələri üçün $\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ və $\rho(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Üçbucaq aksiomuna görə

$$\rho(x,y)\le\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\rho(x,y)<\varepsilon$. x və y qeyd edilmiş elementlər olduğundan və ε istənilən kiçik müsbət ədəd olduğundan $\rho(x,y)=0$ alarıq. Buradan $x=y$.

Teorem 3. Əgər X fəzasında $\{x_n\}$ ardıcıllığı $x \in X$ elementinə yığılırsa, onda fəzanın istənilən θ elementi üçün $\rho(x_n, \theta)$ ədədi ardıcıllığı məhduddur.

İsbatı. $x_n \to x$, $n \to \infty$ olduğu üçün $\{\rho(x_n, x)\}$ məhduddur, yəni elə M_0 ədədi vardır ki, $\rho(x_n x) \le M_0$. Onda üçbucaq aksiomuna görə istənilən n üçün yaza bilərik:

$$\rho(x_n, \theta) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, \theta) \le M_0 + \rho(x, \theta) = M$$

yəni $\rho(x_n, \theta) \le M$ alarıq. Teorem isbat olundu.

11.3. Metrik fəzalarda çoxluqlar

Tutaq ki, X – metrik fəzadır. Fəzanın $\rho(x, x_0) < r$ şərtini ödəyən bütün x nöqtələri çoxluğuna mərkəzi x_0 nöqtəsində, radiusu r olan açıq kürə, $\rho(x, x_0) \le r$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğuna isə qapalı kürə deyilir və uyğun olaraq $S(x_0, r)$ və $\bar{S}(x_0, r)$ kimi işarə edilir. $\rho(x_0, x) = r$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu sfera adlanır. Mərkəzi x_0 nöqtəsində olan istənilən açıq kürə x_0 nöqtəsinin ətrafı adlanır.

Tutaq ki, $E \subset X$ hər hansı çoxluqdur.

Tərif 1. Əgər $a \in E$ nöqtəsinin elə $S(a, \varepsilon)$ ətrafı varsa ki, $S(a, \varepsilon) \subset E$ olsun, onda a nöqtəsinə E çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir.

Tərif 2. Əgər E çoxluğu yalnız daxili nöqtələrdən ibarət olarsa, ona açıq çoxluq deyilir.

Tərif 3. Əgər $a \in X$ nöqtəsinin istənilən ətrafında E çoxluğunun a-dan fərqli heç olmazsa bir nöqtəsi varsa, onda a nöqtəsinə E çoxluğunun limit nöqtəsi deyilir. a limit nöqtəsi E çoxluğuna daxil olmaya da bilər.

Əgər a nöqtəsi E çoxluğunun limit nöqtəsi isə, onda a-nın istənilən ətrafında E çoxluğunun sonsuz sayda nöqtələri vardır.

Tərif 4. E çoxluğunun bütün limit nöqtələri çoxluğu E-nin törəmə çoxluğu adlanır və E' kimi işarə olunur.

Tərif 5. Əgər çoxluğun bütün limit nöqtələri onun özünə daxil isə, onda həmin çoxluğa qapalı çoxluq deyilir. Bu halda $E' \subset E$.

Tərif 6. Əgər E çoxluğu öz törəmə çoxluğuna daxil olarsa, yəni $E \subset E'$, bu halda E özündə sıx çoxluq adlanır.

Tərif 7. Əgər E çoxluğu öz törəmə çoxluğu ilə üst-üstə düşərsə, ona mükəmməl çoxluq deyilir. Bu halda $E = E'$.

Tərif 8. Bütün limit nöqtələrinin E çoxluğuna əlavə olunması nəticəsində alınan $\overline{E}$ çoxluğuna E-nin qapanması deyilir. Əgər E qapalı çoxluq isə, bu halda $\overline{E} = E$.

Tərif 9. Əgər $E \subset X$ çoxluğunun qapanması X fəzası ilə üst-üstə düşərsə, yəni $\overline{E} = X$ olarsa, E çoxluğuna X fəzasında hər yerdə sıx çoxluq deyilir.

Tərif 10. Əgər X fəzasında istənilən $S(a,r) \subset X$ kürəsi daxilində E çoxluğunun heç bir elementini daxilində saxlamayan, başqa bir $S(a_1,r_1) \subset S(a,r)$ kürəsi varsa, bu halda E çoxluğu X fəzasında heç yerdə sıx olmayan çoxluq adlanır.

Tərif 11. Əgər E çoxluğu ən çoxu hesabi sayda heç yerdə sıx olmayan çoxluqların cəmindən ibarət olarsa, ona I kateqoriyalı, əks halda isə II kateqoriyalı çoxluq deyilir.

Tərif 12.Əgər $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ardıcıllığı X fəzasında sıx isə, ona X fəzasının hesabi hər yerdə sıx şəbəkəsi deyilir. Bu halda istənilən $x \in X$ elementi bu ardıcıllığın müəyyən $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}, ...$ ardıcıllığının limitidir.

Tərif 13. Əgər verilmiş fəzada hesabi, hər yerdə sıx çoxluq varsa, ona separabel fəza deyilir.

11.4. Separabel fəzalar

Tutaq ki, X metrik fəzadır.

Tərif. Əgər X fəzasında elə $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ elementlər ardıcıllığı varsa ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi və istənilən $x \in X$ elementi üçün ardıcıllığın elə x_{n_0} elementi olsun ki, $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$, bu halda X fəzası separabel fəza adlanır.

Tərifdən istifadə edərək, bəzi konkret fəzaların separabel fəzalar olduğunu göstərək:

1. $R = (-\infty, \infty)$ həqiqi ədədlər çoxluğunu götürək. Bütün rasional ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğunda hesabi və hər yerdə sıx olan çoxluqdur. Ona görə də R həqiqi ədədlər çoxluğu separabeldir.

2. R^n **fəzası separabel fəzadır.** R^n fəzasında bütün koordinatları rasional ədədlər olan $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ şəklində elementlər çoxluğu hesabi və hər yerdə sıx çoxluqdur.

3. $C[0,1]$ **separabel fəzadır.** $C[0,1]$ fəzasında bütün əmsalları rasional ədədlər olan bütün $\{p_n^{(0)}(x)\}$ çoxhədlilər çoxluğunu götürək. Bu çoxluq hesabi çoxluqdur. Bu çoxluğun $C[0,1]$ fəzasında hər yerdə sıx olduğunu göstərək.

Doğrudan da istənilən $f(x)\in C[0,1]$ funksiyasını götürək. Veyerştrass teoreminə görə elə $\widetilde{p}(x)$ çoxhədlisi vardır ki, $\max_t |f(x)-\widetilde{p}(x)|<\varepsilon/2$ ödənir, burada $\varepsilon>0-$ verilmiş ədəddir. Digər tərəfdən rasional əmsallı elə $p_n^{(0)}(x)$ çoxhədlisi tapmaq olar ki, $\max\left|\widetilde{p}(x)-p_n^{(0)}(x)\right|<\varepsilon/2$.

Üçbucaq aksiomundan istifadə etsək,

$$\rho\left(f(x),p_n^{(0)}(x)\right)=\max_x\left|f(x)-p_n^{(0)}(x)\right|<\varepsilon$$

olduğunu alarıq. Deməli $C[0,1]$ separabel fəzadır.

4. l_p **fəzası separabeldir.** Tutaq ki, E_0 $\{r_1,r_2,...,r_n,0,0...\}$ şəklində elementlər çoxluğudur. Belə ki, bütün $r_1,r_2,...,r_n$ ədədləri rasional ədədlərdir. Aydındır ki, E_0 hesabi çoxluqdur.

Göstərək ki, E_0 çoxluğu l_p-də hər yerdə sıxdır. Doğrudan da, tutaq ki, $x=\{\xi_i\}\subset l_p$ istənilən element və $\varepsilon>0$ istənilən müsbət ədəddir. $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty$ olduğundan elə n natural ədədi tapmaq olar ki, $\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p<\dfrac{\varepsilon^p}{2}$.

Elə $x_0=\{r_1,r_2,...,r_n,0,0...\}$ elementi götürək ki, $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-r_k|^p<\dfrac{\varepsilon^p}{2}$. Onda yaza bilərik:

$$[\rho(x,x_0)]^p=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|^p+\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi|^p\le\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}=\varepsilon^p,$$

buradan $\rho(x,x_0)<\varepsilon$ alarıq. Bu isə E_0-ın l_p-də hər yerdə sıx olması deməkdir. Deməli l_p separabeldir.

5. L_p **fəzası separabeldir.** Lebeq inteqralının xassəsinə əsasən $L_p(0,1)$ fəzasına daxil olan istənilən $f(x)$ funksiyasının

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\le n \text{ olduqda} \\ 0 & |f(x)|>n \text{ olduqda}\end{cases}$$

şəklində ölçülən məhdud funksiyalar ardıcıllığının p dərəcədən orta mənada limiti kimi göstərmək olar. Hər bir ölçülən məhdud funksiya kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının p dərəcədən orta mənada limiti kimi göstərilə bildiyindən $[0,1]$ parçasında kəsilməz funksiyalar çoxluğu $L_p(0,1)$-də hər yerdə sıxdır. Digər tərəfdən rasional əmsallı çoxhədlilər çoxluğu $C[0,1]$ fəzasında bu fəzanın metrikası mənada, deməli, eyni zamanda $L_p(0,1)$ fəzasının metrikası mənada hər yerdə sıxdır. Onda rasional əmsallı çoxhədlilər çoxluğu $L_p(0,1)$ fəzasında hər yerdə sıxdır. Bu isə $L_p(0,1)$-in separabel fəza olması deməkdir.

6. S **fəzası separabeldir.** Tutaq ki, E_0 $\{r_1, r_2, ..., r_n, 0,0...\}$ şəklində elementlərdən ibarət çoxluqdur, belə ki, $r_1, r_2, ..., r_n$ rasional ədədlər, $n-$ istənilən natural ədəddir. E_0- hesabi çoxluqdur. Göstərək ki, E_0 çoxluğundan istənilən götürülmüş $x = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\} \in S$ elementinə yığılan altardıcıllıq ayırmaq olar. Hər bir ξ_n üçün $k \to \infty$ şərtində ξ_n-ə yığılan $\left\{r_n^{(k)}\right\}$ $k = 1,2,...$ rasional ədədlər ardıcıllığı götürək. E_0 çoxluğundan $x^{(k)} = \left\{r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, ..., r_k^{(k)}, 0,0,...\right\}$ şəklində ardıcıllıq götürək. Aydındır ki, $k \to \infty$ olduqda $x^{(k)} \to x$. Doğrudan da kifayət qədər böyük $k > n$ üçün $\left|\xi_n - r_n^{(k)}\right| < \varepsilon$ olduğu üçün $n \to \infty$ şərtində $x^{(k)}$-nın n-ci komponenti x-in n-ci komponentinə yığılar. Beləliklə S-in separabel olduğunu alırıq.

7. m **fəzası separabel olmayan fəzadır.** $x = \{\xi_i\}$, $\xi_i = 0$ yaxud $\xi_i = 1$ olan bütün ardıcıllıqlar çoxluğunu götürək. Aydındır ki, bu ardıcıllıqıar m fəzasına daxildirlər. İsbat olunmuşdur ki, bu şəkildə bütün ardıcıllıqlar kontinium güclü çoxluq təşkil edirlər.

Bu çoxluqdan götürülmüş istənilən $x = \{\xi_i\}$ və $y = \{\eta_i\}$ elementləri üçün $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| = 1$. Alırıq ki, bir-birindən $\rho(x, y) = 1$ məsafədə yerləşən kontinium sayda elementlər vardır. Bu faktdan m-in separabel olmamasını asanlıqla ala bilərik. Doğrudan da, fərz edək ki, m fəzasında hesabi, hər yerdə sıx E_0 çoxluğu vardır. E_0-ın hər bir elementini radiusu $r = \frac{1}{3}$ olan kürə ilə əhatə edək. Onda m çoxluğunun bütün elementləri bu kürələr daxilində yerləşər. Bu kürələr hesabi sayda olduğundan heç olmazsa bu kürələrdən elə birisi vardır ki, onun daxilində yuxarıdakı kontimium çoxluqdan iki müxtəlif element vardır. Həmin kürənin mərkəzi x_0 olsun. Onda alarıq:

$$1 = \rho(x, y) \le \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \ 1 \le \frac{2}{3}$$

Bu isə mümkün deyildir. Deməli, m separabel deyildir. Amma yuxarıda göstərmişik ki, m-in alt fəzası olan C separabel fəzadır.

Aşağıdakı iki ümumi teoremi qeyd edək:

Teorem 1. X separabel metrik fəzasının istənilən X_1 altçoxluğu da separabel fəzadır.

İsbatı. Tutaq ki, $\{x_n\}$ $(n=1,2,...)$– X fəzasında hesabi hər yerdə sıx çoxluqdur. İstənilən iki n və k natural ədədləri götürək. Əgər elə $x \in X_1$ elementi varsa ki, $\rho(x, x_n) < \frac{1}{k}$ şərti ödənsin, bu elementi $x_n^{(k)}$ ilə işarə edək. Bu qayda ilə seçilmiş bütün $x_n^{(k)}$ elementlər çoxluğunu A ilə işarə edək; $A \subset X_1$. Məlum teoremə görə hesabi qiymətlər alan n və k indekslərindən asılı olan $x_n^{(k)}$ nöqtələr çoxluğu hesabi çoxluqdur. Ona görə də A çoxluğu da ən çoxu hesabidir (sonlu çoxluq da ola bilər).

İndi göstərək ki, $x \in X_1$-dir. $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və elə k natural ədədi seçək ki, $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. $\{x_n\}$ çoxluğu X-də hər yerdə sıx çoxluq olduğu üçün elə n_0 nömrəsi vardır ki, $\rho\left(x_{n_0}, x\right) < \frac{1}{k}$. $n = n_0$ olduqda sonuncu bərabərsizliyi ödəyən $x \in X_1$ elementi olduğu üçün, elə $x_{n_0}^{(k)} \in A$ elementi vardır ki, $\rho\left(x_{n_0}^{(k)}, x_{n_0}\right) < \frac{1}{k}$. Onda yaza bilərik:

$$\rho\left(x_{n_0}^{(k)}, x\right) < \rho\left(x_{n_0}^{(k)}, x_{n_0}\right) + \rho\left(x_{n_0}, x\right) < \frac{2}{k} \le \varepsilon$$

ε-nun ixtiyari kiçik olmasından A-nın X_1-də hər yerdə sıx olmasını alırıq. Deməli X_1-separabeldir.

Teorem 2. Əgər X metrik fəzasının hər yerdə sıx olan X_1 altçoxluğu separabel fəzadırsa, onda X fəzası özü də separabeldir.

İsbatı. Tutaq ki, A X_1-də hər yerdə sıx hesabi çoxluqdur. Istənilən $x \in X$ elementi və $\varepsilon > 0$ ədədi götürək. X_1 çoxluğu X-də hər yerdə sıx olduğundan elə $x' \in X_1$ vardır ki, $\rho(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$. A çoxluğu E_1-də hər yerdə sıx olduğu üçün elə $x'' \in A$ vardır ki, $\rho(x', x'') < \frac{\varepsilon}{2}$. Buradan $\rho(x, x'') < \varepsilon$, yəni A çoxluğu X-də hər yerdə sıxdır. Bu isə X-in separabel olması deməkdir.

11.5. Tam metrik fəzalar. Misallar

Tutaq ki, X hər hansı metrik fəzadır. $\{x_n\} \in X$ ardıcıllığını götürək.

Tərif 1. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olarsa ki, $n, m \geq N_0(\varepsilon)$ olduqda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ olsun, bu halda $\{x_n\}$ ardıcıllığı fundamental ardıcıllıq adlanır.

Aydındır ki, əgər $\{x_n\}$ yığılan ardıcıllıq isə, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ varsa, bu halda $\{x_n\}$ fundamental ardıcıllıqdır. Doğrudan da, bu halda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $N_0(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $n > N_0(\varepsilon)$ olduqda $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Bu halda $n, m > N_0(\varepsilon)$ üçün

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \varepsilon$$

Bu təklifin tərsi istənilən metrik fəzada doğru deyildir. Elə metrik fəzalar vardır ki, orada fundamental olan ardıcıllıq yığılan deyildir. Misallara baxaq:

1. X – rasional ədədlər çoxluğu $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ məsafəsinə nəzərən metrik fəzadır. $r_1 = \dfrac{1}{2}, r_2 = \dfrac{1}{4}, ..., r_n = \dfrac{1}{2^n}, ...$ ardıcıllığı fundamentaldır və sonlu $r_0 = 0$ limiti vardır. Əgər $r_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ardıcıllığını götürsək, bu ardıcıllıq fundamentaldır və yığılandır. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, amma ardıcıllığın limiti rasional ədəd deyildir, yəni fəzanın özünə daxil deyildir.

2. X – çoxhədlilər çoxluğu $\rho(P, Q) = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |P(t) - Q(t)|$ məsafəsinə nəzərən metrik fəzadır. Tutaq ki, $\{p_n(t)\}$ çoxhədlilər ardıcıllığı çoxhədlidən fərqli kəsilməz $f(t)$ funksiyasına müntəzəm yığılan çoxhədlilər ardıcıllığıdır. Aydındır ki, $\{p_n(t)\}$ fundamental ardıcıllıqdır, amma baxılan fəzada limiti yoxdur. Məsələn, $p_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!}$ ardıcıllığına baxaq. Məlumdur ki, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}$ sırası yığılandır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $\left|\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}\right| < \varepsilon$. Onda istənilən $n > N(\varepsilon)$ və m natural ədədi üçün

$$\rho(p_n(t), p_{n+m}(t)) = \left|\sum_{k=N(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)+m} \frac{t^k}{k!}\right| < \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} < \varepsilon$$

Göründüyü kimi fundamental ardıcıllıqdır. Bu ardıcıllığın limiti e^t funksiyasına bərabərdir və çoxhədlilər fəzasına daxil deyildir.

Tərif 2. Əgər X metrik fəzasında hər bir fundamental ardıcıllıq fəzanın hər hansı bir elementinə yığılırsa, onda X fəzasına tam metrik fəza deyilir.

Qeyd edək ki, tam metrik fəzada istənilən qapalı çoxluq özü də tam fəzadır.

İndi isə bəzi metrik fəzaların tamlığını göstərək:

1. $R=(-\infty,\infty)$– həqiqi ədədlər çoxluğuna baxaq. $\{x_n\}\in R$ ardıcıllığı götürək. Tutaq ki, $\{x_n\}$ fundamentaldır, yəni, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $n>N(\varepsilon)$ və istənilən m natural ədədi üçün

$$|x_{n+m}-x_n|<\varepsilon$$

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, Koşi meyarına görə bu ardıcıllıq yığılan ardıcıllıqdır, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad x_0\in R$ vardır. Deməli, həqiqi ədədlər çoxluğu tam metrik fəzadır.

2. R^n fəzasına baxaq. $x^{(n)}=\left\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_n^{(n)}\right\}\in R^n$ fundamental ardıcıllığı götürək. İstənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, $n,m>N(\varepsilon)$ üçün

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right)^2<\varepsilon^2$$

Onda, $k=1,2,...,n$ üçün $x_k^{(n)}$ koordinatları üçün

$$\left|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right|<\varepsilon$$

Bu onu göstərir ki, $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ ədədi ardıcıllığı fundamentaldır. Koşi meyarına görə $k=1,2,...,n$ üçün bu ədədi ardıcıllıqlar yığılandır.

$$x_k=\lim_{n\to\infty}x_k^{(n)}$$

işarə edək. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ düzəldək. Nəticədə $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=x$ olduğunu alarıq. Deməli, R^n tam metrik fəzadır.

3. $C[a,b]$ **fəzası.** Tutaq ki, $\{x_n(t)\}\in C[a,b]$ hər hansı fundamental ardıcıllıqdır, yəni, istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, $n,m>N(\varepsilon)$ üçün $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. Buradan

$$\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon \tag{1}$$

(1) bərabərsizliyində $m\to\infty$ şərtində limitə keçsək, istənilən t və $n>N$ üçün

$$|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon$$

alarıq. Alırıq ki, $\{x_n(t)\}$ müntəzəm yığılan ardıcıllıqdır. Məlumdur ki, bu halda $x(t)$ limit funksiyası kəsilməz funksiya olar. Bu isə $\{x_n(t)\}$ ardıcıllığının $x(t)$-yə $C[a,b]$ mənada yığılan olduğunu göstərir. $x(t)\in C[a,b]$ olmasından $C[a,b]$ fəzasının tam olmasını alırıq.

Qeyd. Fəzanın tam olub-olmaması məsələsi həmin fəzada təyin edilmiş məsafədən ciddi şəkildə asılıdır. Belə ki, hər hansı bir məsafəyə görə tam olan fəza, başqa bir məsafəyə nəzərən tam olmaya bilər.

Məsələn, yuxarıda baxdığımız $C[a,b]$ fəzasının orada təyin edilmiş $\rho(f,g)=\max\limits_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|$ məsafəsinə görə tam olduğunu gördük.

Göstərək ki, əgər $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş kəsilməz funksiyalar çoxluğunda məsafəni

$$\rho(f,g)=\left[\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,dt\right]^{1/2} \tag{2}$$

bərabərliyi ilə təyin etsək, bu fəza tam fəza olmaz. (2) bərabərliyi ilə təyin edilmiş məsafə metrik fəza aksiomlarını ödəyir. Doğrudan da I, II aksiomlarının doğruluğu aşkardır. III aksiomun ödənməsi ilə inteqrallar üçün Minkovski bərabərsizliyindən alınır:

$$\left(\int_a^b (a(t)+b(t))^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b |a(t)|^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |b(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \tag{3}$$

Əgər bu bərabərsizlikdə $a(t)=f(t)-\varphi(t)$, $b(t)=\varphi(t)-g(t)$ qəbul etsək, $a(t)+b(t)=f(t)-g(t)$ olar və (3) bərabərsizliyi aşağıdakı şəkildə olar.

$$\left(\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b (f(t)-\varphi(t))^2\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\int_a^b (\varphi(t)-g(t))^2\,dt\right)^{1/2} \tag{4}$$

Alınmış bu bərabərsizlik (2) şəklində $\rho(x,y)$ metriklasının

$$\rho(f,g)\le \rho(f,\varphi)+\rho(\varphi,g)$$

üçbucaq aksiomunu ödədiyini göstərir. Bu metrik fəza $\widetilde{L}_2(a,b)$ kimi işarə edilir.

İndi bu fəzadan aşağıdakı ardıcıllığı götürək. Fərz edək ki, $a=-1$, $b=1$.

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t\le -\dfrac{1}{n} \quad \text{olduqda}\\ nt, & -\dfrac{1}{n}<t<\dfrac{1}{n} \quad \text{olduqda}\\ 1, & \dfrac{1}{n}\le t\le 1 \quad \text{olduqda}\end{cases}$$

Göstərək ki, bu ardıcıllıq fundamental ardıcıllıqdır. İstənilən m natural ədədi üçün

$$\varphi_{n+m}(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t\le -\dfrac{1}{n+m} \quad \text{olduqda}\\ (n+m)\,t, & -\dfrac{1}{n+m}<t<\dfrac{1}{n+m} \quad \text{olduqda}\\ 1, & \dfrac{1}{n+m}\le t\le 1 \quad \text{olduqda}\end{cases}$$

olar. Göstərə bilərik ki,

$$\rho^2(\varphi_{n+m},\varphi_n)=\int_{-1}^{1}(\varphi_{n+m}(t)-\varphi_n(t))^2\,dt\le\frac{2}{n}$$

Göründüyü kimi $\rho(\varphi_{n+m},\varphi_n)\to 0$, $n\to\infty$, yəni $\{\varphi_n(t)\}$ fundamentaldır. Göstərək ki, bu ardıcıllıq təyin etdiyimiz məsafəyə görə heç bir kəsilməz funksiyaya yığıla bilməz.

$$\varphi(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t\le 0 \quad \text{olduqda}\\ 1, & 0<t\le 1 \quad \text{olduqda}\end{cases}$$

funksiyasını götürək.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\varphi(t))^2\,dt=0$$

olduğundan $\{\varphi_n(t)\}$ ardıcıllığı $\varphi(t)$-yə orta kvadratik mənada yığılır, yəni $\rho(\varphi_n,\varphi)\to 0$, $n\to\infty$.

Fərz edək ki, $f(t)$ istənilən kəsilməz funksiyadır. Onda $\rho(f,\varphi)\ne 0$ olar.

$$\rho(f,\varphi)\le\rho(f,\varphi_n)+\rho(\varphi_n,\varphi)$$

bərabərsizliyindən alınır ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f,\varphi_n)\ne 0$. Yəni $\{\varphi_n(t)\}$ ardıcıllığı baxılan məsafəyə görə heç bir kəsilməz funksiyaya yığıla bilməz. Bu isə $\tilde{L}_2(-1,1)$-in tam metrik fəza olmadığını göstərir.

4. l_2 fəzası tamdır. Hər hansı $\{x^{(n)}\}\subset l_2$ fundamental ardıcıllığı götürək, belə ki, $x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\dots,x_k^{(n)},\dots\right)$. $\{x^{(n)}\}$ fundamental olduğundan istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $N_0(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $n > N_0(\varepsilon)$ və istənilən m natural ədədi üçün

$$\rho\left(x^{(n)}, x^{(n+m)}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(n+m)}\right)^2} < \varepsilon . \qquad (5)$$

(5) bərabərsizliyindən alırıq ki, istənilən $\dot{k}$ nömrəsi üçün $n > N_0(\varepsilon)$ və istənilən m natural ədədi üçün

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(n+m)}\right| < \varepsilon, \quad \dot{k} = 1,2,...$$

Alırıq ki, istənilən $\dot{k}$ üçün $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ ədədi ardıcıllığı fundamentaldır. $R-$ həqiqi ədədlər çoxluğu tam fəza olduğundan $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ ardıcıllıqları yığılandır.

Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)}$. (5) şərtindən alırıq ki,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(n+m)}\right)^2} < \varepsilon$$

Sonuncu bərabərsizlikdə $m \to \infty$ şərtində limitə keçsək, alarıq:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right)^2} \le \varepsilon \qquad (6)$$

Bu bərabərsizlikdə $p \to \infty$ şərtində limitə keçsək, alarıq:

$$\rho\left(x^{(n)}, x^{(0)}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right)^2} \le \varepsilon \qquad (7)$$

Bu onu göstərir ki, $\left\{x^{(n)}\right\} \subset l_2$ ardıcıllığı $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)} ...\right)$ elementinə yığılır. Göstərək ki, $x^{(0)} \in l_2$. Bunun üçün $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(0)}\right)^2 < \infty$ olduğunu göstərmək lazımdır. Minkovski bərabərsizliyini tətbiq etməklə alarıq:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(0)}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(0)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(0)} - x_k^{(n)}\right)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2} < \infty .$$

Beləliklə, alırıq ki, $x^{(0)} \in l_2$. Yəni l_2-dən olan ixtiyari fundamental ardıcıllıq bu fəzanın elementinə yığılır. Deməli l_2-tam fəzadır.

5. $m-$ **tam fəzadır.** Tutaq ki, $x^{(n)} = \left\{x_i^{(n)}\right\} \in m$ fundamental ardıcıllıqdır. $\left\{x_i^{(n)}\right\} \in m$ olduğundan $\left|x_i^{(n)}\right| \le k_n$, $i = 1,2,...$ və istənilən $\varepsilon > 0$

ədədi üçün elə $N_0(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N_0(\varepsilon)$ və istənilən m natural ədədi üçün

$$\rho\left(x^{(n)}, x^{(n+m)}\right) < \varepsilon$$

yəni

$$\sup_i \left|x_i^{(n)} - x_i^{(n+m)}\right| < \varepsilon$$

Onda istənilən i nömrəsi üçün

$$\left|x_i^{(n)} - x_i^{(n+m)}\right| < \varepsilon \tag{8}$$

i nömrəsini qeyd edək. (8) bərabərsizliyi onu göstərir ki, $\left\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, ..., x_i^{(n)}, ...\right\}$ ədədi ardıcıllığı fundamentaldır və Koşi meyarına görə yığılan ardıcıllıqdır. Bu ardıcıllığın limitini x_i ilə işarə edək. Bu qayda ilə $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ ardıcıllığını alırıq. (8) bərabərsizliyindən $m \to \infty$ şərtində istənilәni və $n > N_0(\varepsilon)$ üçün $\left|x_i^{(n)} - x_i\right| \le \varepsilon$ alırıq. Buradan istənilən i üçün

$$|x_i| \le \left|x_i^{(N_0)} - x_i\right| + \left|x_i^{(N_0)}\right| \le \varepsilon + k_{n_0}$$

Alırıq ki, $\{x_i\}$ ardıcıllığı məhduddur, yəni $\{x_i\} \in m$. Nəticədə $\sup\left|x_i^{(n)} - x_i\right| \le \varepsilon$, $\rho\left(x^{(n)}, x\right) \le \varepsilon$ alırıq, burada $x = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Deməli, m – tam fəzadır.

6. c **– tam fəzadır.** Məlum olduğu kimi c çoxluğu m fəzasının altçoxluğudur. Əgər c çoxluğunun m fəzasında qapalı olduğunu göstərsək, c-nin tam fəza olduğunu alarıq. Tutaq ki, $\left\{x^{(n)}\right\}$ ardlcıllığı c-yə daxil olan ardıcıllıqdır:

$$x^{(n)} = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_i^{(n)}, ...\right\}$$

və $x^{(n)} \to x^{(0)}$, $x^{(0)} = \left\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_i^{(0)}, ...\right\}$.

Göstərək ki, $\left\{x_i^{(0)}\right\}$ ardıcıllığı yığılan ardıcıllıqdır. Aşağıdakı bərabərsizliyi yaza bilərik:

$$\left|x_i^{(0)} - x_j^{(0)}\right| \le \left|x_i^{(0)} - x_i^{(n)}\right| + \left|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right| + \left|x_j^{(n)} - x_j^{(n)}\right| \le$$

$$\le 2\rho(x_n, x_0) + \left|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right| \tag{9}$$

Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ istənilən ədəddir. n nömrəsini kifayət qədər böyük seçsək $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon / 4$ olar. Bu n nömrəsini qeyd edək. $\left\{x_i^{(n)}\right\}$ ardıcıllığı yığılan olduğundan o fundamentaldır, ona görə də elə i_0 nömrəsi tapmaq olar ki, $i, j \ge i_0$ olduqda $\left|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right| < \varepsilon$ olar. Bunu (9) bərabərsizliyində nəzərə alsaq, $\left|x_i^{(0)} - x_j^{(0)}\right| < \varepsilon$ olar. Buradan $\left\{x_i^{(0)}\right\}$ ardıcıllığının yığılan olduğunu alarıq.

Deməli, $x^{(0)} \in c$, yəni $c-$ qapalı çoxluqdur. Bu isə c-nin tam olmasını göstərir.

11.6. Metrik fəzaların tamamlanması

Məlum olduğu kimi fəzanın tamlığı anlayışı mühüm bir anlayışdır və yalnız tam fəzalarda bir çox mühüm faktların doğruluğu haqqında danışmaq mümkündür. Məsələn, riyazi analiz kursunda ədəd oxunun tamlığı həqiqi ədədlərin mükəmməl nəzəriyyəsini qurmağa imkan vermişdir. Eləcə də metrik fəzaların tamlığı anlayışı funksional analizdə mühüm rol oynayır. Ona görə də tam olmayan metrik fəzaların tamamlanması rasional ədədlər çoxluğunun bütün irrasional ədədlər çoxluğu vasitəsilə tamamlanması prosesinə analoji olaraq aparılır.

Metrik fəzaların tamamlanması prosesini öyrənmək üçün əvvəlcə aşağıdakı anlayışları daxil edək.

Tutaq ki, X və Y metrik fəzalardır. $x_1, x_2 \in X$ üçün məsafəni $\rho_X(x_1, x_2)$, $y_1, y_2 \in Y$ arasında məsafəni isə $\rho_Y(y_1, y_2)$ ilə işarə edək.

Əgər X və Y fəzaları arasında elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olarsa ki, bu zaman uyğun elementlər arasındakı məsafə saxlansın, yəni $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$ isə

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(y_1, y_2)$$

olarsa, X və Y izometrik fəzalar adlanır.

Aydındır ki, yığılma ilə əlaqədar olan bəzi məsələlərin həllində izometrik fəzaları eyniləşdirmək olar.

Tutaq ki, X tam olmayan metrik fəzadır. Onda bu fəzada fundamental ardıcıllıqlar vardır ki, onların X fəzasında limiti yoxdur.

Göstərək ki, bu halda elə tam X' metrik fəzası vardır ki, bu fəzada hər yerdə sıx olan və X ilə izomertik olan X_0 vardır. X' fəzası X-in tamamlanması adlanır.

Tərif. X' fəzası o zaman X fəzasının tamamlanması adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

1) X fəzası X'-in altfəzası olsun;

2) X fəzası X'-də hər yerdə sıx olsun, yəni $\overline{X} = X'$ olsun (burada $\overline{X}$ ilə X-in X'-də qapanması işarə olunur).

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Hər bir X metrik fəzasının tamamlanması vardır. Bu tamamlanma X-in nöqtələrini tərpənməz saxlayan izometriya dəqiqliyi ilə yeganıdir.

İsbatı. Əvvəlcə X-in tamamlanmasının yeganəliyini göstərək. Bunun üçün göstərməliyik ki, əgər X' və X'' fəzaları X-in iki tamamlanması isə, onda X'-in X''-ə elə qarşılıqlı birqiymətli φ inikası vardır ki,

1) $\varphi(x) = x$ istənilən $x \in X$ üçün,

2) $x' \to x''$, $y' \to y''$ isə, onda $\rho_{X'}(x', y') = \rho_{X''}(x'', y'')$.

φ inikasını aşağıdakı qayda ilə təyin edək. Tutaq ki, $x' \in X'$ istənilən nöqtədir. Onda tamamlanmanın tərifinə görə elə $\{x_n\} \in X$ ardıcıllığı vardır ki, $x_n \to x'$. $\{x_n\} \in X''$ və X'' tam olduğu üçün $x_n \to x''$, $x'' \in X''$.

$\varphi(x') = x''$ qəbul edək. Bu inikas tələb edilən izometrik inikasdır. Doğrudan da, qurmaya görə istənilən $x \in X$ üçün $\varphi(x) = x$.

Fərz edək ki, X' fəzasında $\{x_n\} \to x'$, $\{y_n\} \to y'$ və X'' fəzasında $\{x_n\} \to x''$, $\{y_n\} \to y''$. Onda məsafənin kəsilməzliyinə görə

$$\rho_{X'}(x', y') = \lim_{n\to\infty} \rho_{X'}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

və

$$\rho_{X''}(x'', y'') = \lim_{n\to\infty} \rho_{X''}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

Buradan

$$\rho_{X'}(x', y') = \rho_{X''}(x'', y'')$$

Indi isə tamamlanmanın varlığını göstərək. Əvvəlcə aşağıdakı tərifi verək.

Tərif. Əgər $\{x_n\}$, $\{x'_n\} \in X$ fundamental ardıcıllıqları üçün $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ şərti ödənərsə, onda bu ardıcıllıqlara ekvivalent ardıcıllıqlar deyilir və $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ kimi işarə edilir. Bu münasibət refleksiv, simmetrik və tranzitivdir. X fəzasının bütün fundamental ardıcıllıqlarını bu münasibətə nəzərən ekvivalentlik siniflərinə ayıra bilərik. X' fəzasını aşağıdakı kimi təyin edək. X' fəzasının elementləri olaraq öz aralarında ekvivalent olan fundamental ardıcıllıqlardan ibarət mümkün olan sinifləri götürək, belə ki, bu siniflər arasında məsafə aşağıdakı qaydada təyin olunur. Əgər x' və y' X'-ə daxil olan siniflər isə, onda hər sinifdən bir $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ fundamental ardıcıllıq götürməklə

$$\rho(x', y') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) \qquad (1)$$

təyin edirik.

Qeyd edək ki, bu qayda ilə təyin olunmuş məsafə x' və y' siniflərindən hansı fundamental ardıcıllığın götürülməsindən asılı deyildir.

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \qquad (2)$$

bərabərsizliyindən $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$-in fundamentallığına görə n və m-in kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)\right| < \varepsilon .$$

Alırıq ki, $S_n = \rho(x_n, y_n)$ ədədlər ardıcllığı üçün Koşi meyarı ödənilir və deməli S_n ardıcıllığının sonlu limiti vardır. Bu ardıcıllığın limiti də $\{x_n\} \in x'$ və $\{y_n\} \in y'$ fundamental ardıcıllıqlarının seçilməsindən asılı deyildir. Doğrudan da $\{x_n\}$, $\{x'_n\} \in x'$ və $\{y_n\}$, $\{y'_n\} \in y'$ götürsək, (2) bərabərsizliyindən istifadə etməklə

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)\right| \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

alarıq. Buradan $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ və $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

alırıq.

I aksiom fundamental ardıcıllıqların ekvivalentliyinin tərifindən alınır. II aksiomun doğruluğu aşkardır.

III üçbucaq aksiomunu göstərmək üçün X fəzasında doğru olan

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$$

bərabərsizliyini götürüb, $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\rho(x', y') \le \rho(x', z') + \rho(z', y')$$

alarıq.

İndi göstərək ki, X fəzasına X' fəzasının altfəzası kimi baxmaq olar.

Doğrudan da hər bir $x \in X$ elementinə bir fundamental ardıcıllıqlar sinfi qarşı qoymaq olar. Bu sinif boş deyildir. Ən azı bütün hədləri x-ə bərabər olan fundamental ardıcıllıqlar bi sinfə daxildir. Bu halda

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ y = \lim_{n\to\infty} y_n \text{ olarsa, } \rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

Beləliklə, hər bir $x \in X$ elementinə qarşı bu elementə yığılan fundamental ardıcıllıqlar sinfi olan x^*-u qarşı qoyaq. Bu qayda ilə X-in X'-ə izometrik inikasını alarıq. Ona görə də X fəzası ilə onun X' daxilindəki obrazını eyniləşdirmək və X-ə X'-in altfəzası kimi baxmaq olar. İndi isə göstərək ki, X fəzası X'-də hər yerdə sıxdır. İstənilən $x^* \in X'$ və $\varepsilon > 0$ ədədini götürək. x^* sinfinə uyğun hər hansı $\{x_n\}$ fundamental ardıcıllığı götürək. Kifayət qədər böyük N üçün $n, m \ge N$ olduqda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Onda alarıq:

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \le \varepsilon .$$

Buradan alırıq ki, x^* nöqtəsinin hər bir ətrafında X fəzasının elementi vardır. Bu onu göstərir ki, X-in X'-də qapanması X' ilə üst-üstə düşür.

Nəhayət, X' fəzasının tam olduğunu göstərək. Qeyd edək ki, X' fəzasının qurulması qaydasına görə X fəzasında hər bir fundamental $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ardıcıllığı X'-də bu ardıcıllıq vasitəsilə təyin edilən x' elementinə yığılır. X fəzası X'-də hət yerdə sıx olduğundan X' fəzasından götürülmüş $x'_1, x'_2, ..., x'_n, ...$ fundamental ardıcıllığına görə X -dən ona ekvivalent olan $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ardıcıllığını qura bilərik. Bunun üçün X fəzasından x_n olaraq $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ şərtini ödəyən istənilən nöqtəni götürmək lazımdır.

Bu qayda ilə qurulmuş $\{x_n\}$ ardıcıllığı X -da fundamentaldır və tərifə görə hər hansı $x' \in X'$ nöqtəsinə yığılır. Onda alırıq ki, $\{x'_n\}$ ardıcıllığı da x' nöqtəsinə yığılır. Teorem isbat edildi.

Bəzi misallara baxaq.

1. $C_0[0,1]$ ilə $[0,1]$ parçasında təyin edilmiş çoxhədlilər çoxluğunu götürək, belə ki, $p, q \in C_0[0,1]$ çoxhədliləri üçün məsafə $\rho(p,q) = \max\limits_{t\in[0,1]}|p(t) - q(t)|$ kimi təyin edilir. $C_0[0,1]$ tam olmayan çoxluqdur. $C_0[0,1]$ tam $C[0,1]$ fəzasında hər yerdə sıx çoxluq olduğu üçün onun tamamlanması $C[0,1]$-ə izometrik olan fəzadır.

2. $L'_p[0,1]$ ilə $[0,1]$ parçasında kəsilməz bütün funksiyalar çoxluğunu işarə edək, belə ki, $f(t), g(t) \in L_p[0,1]$ funksiyaları arasında məsafə aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\rho(f,g) = \left[\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p \, dt\right]^{1/p}$$

$L'_p[0,1]$ fəzası tam deyildir. Belə ki, p dərəcədən orta mənada kəsilən funksiyaya yığılan kəsilməz funksiyalar ardıcıllığı $L'_p[0,1]$-də fundamentaldır, amma bu fəzada limiti yoxdur. $L'_p[0,1]$ fəzasını tamamlasaq, $L_p[0,1]$ fəzasına izometrik olan fəza alırıq.

11.7. Metrik fəzalarda bir-birinə daxil olan kürələr ardıcıllığı haqqında teorem

Bir-birinə daxil olan parçalar ardıcıllığı haqqında Kantor teoremi riyazi analizin mühüm bir prinsipidir və çoxsaylı tətbiqləri vardır. Metrik fəzalarda bu prinsipin analoqu olan bir-birinə daxil olan kürələr haqqında teorem doğrudur.

Teorem 1. X tam metrik fəzasında bir-birinə daxil olan və radiusları sıfra yaxınlaşan qapalı kürələrin hamısına daxil olan yeganə nöqtə vardır.

İsbatı. Tutaq ki, $\overline{B}_1(x_1,r_1), \overline{B}_2(x_2,r_2),...,\overline{B}_n(x_n,r_n),...$ $r_n \to 0$ baxılan kürələrdir. Teoremin şərtinə görə $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset ... \supset \overline{B}_n \supset ...$ ($\overline{B}_n = \overline{B}(x_n,r_n)$). Baxılan kürələrin mərkəzlərindən düzəlmiş $x_1, x_2,..., x_n,...$ ardıcıllığını götürək. $p>0$ üçün $x_{n+p} \in \overline{B}_{n+p} \subset \overline{B}_n$ olduğundan $\rho(x_{n+p},x_n) < r_n \to 0$, $n \to \infty$. X fəzası tam olduğundan $\{x_n\}$ ardıcıllığı hər hansı $x \in X$ elementinə yığılır. İstənilən n üçün $\{x_{n+p}\}_{p=1,2,...} \in \overline{B}_n$, $x_{n+p} \to x$, $p \to \infty$ və $\overline{B}_n$ kürəsi qapalı olduğu üçün istənilən $n = 1,2,3,...$ üçün $x \in \overline{B}_n$ alırıq.

İndi isə fərz edək ki, bütün kürələrə daxil olan və x-dən fərqli hər hansı y elementi də vardır. $\rho(x,y) = \delta > 0$ işarə edək. İstənilən $n = 1,2,...$ üçün $x, y \in \overline{B}_n$ olduğundan yaza bilərik:

$$\delta = \rho(x,y) \le \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) \le 2r_n,$$

Bu isə ola bilməz, çünki, $n \to \infty$ olduqda $r_n \to 0$.

Teorem 2. X metrik fəzasının tam olması üçün zəruri və kafi şərt, radiusları sıfra yaxınlaşan, bir-birinə daxil olan qapalı kürələrin boş olmayan kəsişməyə malik olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, X fəzası tamdır və $B_1, B_2,..., B_n...$ bir-birinə daxil olan qapalı kürələrdir. Tutaq ki, r_n bu kürələrin radiusları, x_n isə mərkəz nöqtələridir. $\{x_n\}$ ardıcıllığı fundamentaldır. Doğrudan da, $m > n$ üçün $\rho(x_n,x_m) < r_n$ və $n \to \infty$ şərtində $r_n \to 0$ olduğundan $\rho(x_n,x_m) \to 0$. X fəzası tam olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ vardır. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ işarə edək. Göstərək ki, $x \in \bigcap\limits_n B_n$.

Doğrudan da $x_1, x_2,..., x_{n-1}$ nöqtələri istisna olmaqla ardıcıllığın bütün hədləri B_n kürəsinə daxildir. Ona görə də x nöqtəsi bütün B_n kürələri üçün limit nöqtəsidir. B_n kürələri qapalı olduğu üçün istənilən n üçün $x \in B_n$.

Kafilik. Tutaq ki, $\{x_n\}$ fundamental ardıcıllıqdır. Göstərək ki, onun limiti vardır. Ardıcıllıq fundamental olduğundan onun elə $x_{n'}$ həddini seçmək olar ki, $n \ge n_1$ olduqda $\rho(x_n, x_{n'}) < \dfrac{1}{2}$ olsun. Mərkəzi x_{n_1} nöqtəsində, radiusu $r_1 = 1$ olan kürəni B_1 ilə işarə edək. Ardıcıllığın elə x_{n_2} həddini seçək ki, $n_2 > n_1$ və $\rho(x_n, x_{n_2}) < \dfrac{1}{2^2}$, $n \ge n_2$ olsun. Mərkəzi x_{n_2} nöqtəsində, radiusu $r_2 = \dfrac{1}{2}$ olan kürəni B_2 ilə işarə edək. Əgər $x_{n_1}, x_{n_2},..., x_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k)$ nöqtələri artıq seçilmişsə, onda elə $x_{n_{k+1}}$ nöqtəsi seçək ki, $n \geq n_{k+1}$ üçün $\rho\left(x_n, x_{n_{k+1}}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}$, $n_{k+1} > n_k$ olsun. $x_{n_{k+1}}$ mərkəzinə və $r = \frac{1}{2^{k+1}}$ radiusuna malik kürəni B_{k+1} ilə işarə edək. Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə bir-birinə daxil olan B_k qapalı kürələr ardıcıllığı alırıq. Şərtə görə bu kürələr ardıcıllığının ümumi nöqtəsi vardır. Həmin nöqtəni x ilə işarə edək. Aydındır ki, x nöqtəsi $\left\{x_{n_k}\right\}$ ardıcıllığının limit nöqtəsidir. Əgər $\{x_n\}$ fundamental ardıcıllığının x nöqtəsinə yığılan altardıcıllığı varsa, onda bu ardıcıllıq özü də həmin x nöqtəsinə yığılır, yəni $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Teorem isbat edildi.

Tərif. Əgər verilmiş M çoxluğunu ən çoxu hesabi sayda heç yerdə sıx olmayan çoxluqların cəmi şəklində göstərmək olarsa, M çoxluğu birinci tip çoxluq adlanır. Birinci tip olmayan çoxluqlar ikinci tip çoxluqlar adlanır. Məsələn, ədəd oxu üzərində yerləşən bütün rasional ədədlər çoxluğu birinci tip çoxluq, bütün irrasional ədədlər çoxluğu isə ikinci tip çoxluqdur.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 3. (Ber teoremi). Hər bir tam fəza ikinci tip çoxluqdur.

11.8. Metrik fəzalarda kompakt çoxluqlar

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, ədəd oxu üzərində götürülmüş istənilən sonsuz məhdud nöqtələr çoxluğunun heç olmazsa, bir limit nöqtəsi vardır. Sonralar bu ideya ümumiləşdirilmiş, artıq ədəd oxu üzərində verilmiş məhdud çoxluqdan deyil, funksiyalardan təşkil edilmiş məhdud sonsuz çoxluqdan yığılan ardıcıllığın seçilə bilməsindən müxtəlif məsələlərin həlli zamanı istifadə edilmişdir. Diferensial tənliklərin həllinin varlığının isbatında və variasiya hesabı məsələlərinin həllində geniş şəkildə istifadə edilən bu ideyanın inkişafı müxtəlif funksional fəzalarda kompakt çoxluq anlayışına gətirmişdir.

Tərif 1. Əgər X metrik fəzasının M çoxluğundan götürülmüş istənilən məhdud sonsuz altçoxluğundan bu altçoxluğun müəyyən nöqtəsinə yığılan ardıcıllıq ayırmaq olarsa, onda M çoxluğuna kompakt çoxluq deyilir.

Bu tərifdən və metrik fəzada yığılan ardıcıllığın istənilən altardıcıllığının həmin ardıcıllığın limitinə yığılması faktından alınır ki, hər bir kompakt çoxluq qapalıdır. Eyni zamanda kompakt çoxluğun istənilən qapalı altçoxluğu da kompakt çoxluqdur.

Tərif 2. Əgər $M \subset X$ çoxluğunun $\overline{M}$ qapanması kompakt olarsa, onda M nisbi kompakt çoxluq adlanır.

Aşağıdakı sadə teorem doğrudur.

Teorem 1. Hər bir nisbi kompakt çoxluq məhduddur.

İsbatı. Fərz edək ki, M çoxluğu nisbi kompaktdır, amma məhdud deyildir. İstənilən $x_1 \in M$ nöqtəsi götürək. M məhdud olmadığı üçün elə $x_2 \in M$ nöqtəsi tapmaq olar ki, bu nöqtə $S(x_1, r_1)$ kürəsi xaricində yerləşər.

$r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ qəbul edək. M qeyri-məhdud olduğundan elə $x_3 \in M$ vardır ki, $x_3 \overline{\in} S(x_1, r_2)$. Sonra $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ qəbul edək və prosesi bu qayda ilə davam etdirək. Nəticədə elə $\{x_n\} \subset M$ ardıcıllığı taparıq ki, $\rho(x_i, x_j) \geq 1$, $i \neq j$ olar. Bu ardıcıllığın heç bir yığılan altardıcıllığı yoxdur. Bu isə M-in nisbi kompakt çoxluq olması şərtinə ziddir. Alınmış ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Deməli, M məhduddur. Teorem isbat olundu.

Tərif 3. Əgər X metrik fəzasının hər bir sonsuz altçoxluğu bu fəzanın elementinə yığılan ardıcıllığa malik isə, onda X fəzasına kompakt fəza deyilir.

Əgər X kompakt isə, onda o tam metrik fəzadır. Misallara baxaq.

1. $X = [0,1]$. Bolsano-Veyerştrass teoreminə görə X kompaktdır. Amma $R = (-\infty, \infty)$ fəzası kompakt deyildir. Çünki, bu fəzanın $M = \{1,2,3,...\}$ altçoxluğu heç bir yığılan altçoxluğa malik deyildir.

R fəzasının istənilən qapalı məhdud altçoxluğu isə kompakt çoxluqdur.

2. $X = R^n$. Bu fəza kompakt deyildir, amma fəzanın istənilən qapalı məhdud altçoxluğu kompakt çoxluqdur.

3. Bütün kompleks ədədlər çoxluğu C, $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ məsafəsinə nəzərən kompakt deyildir. Amma bu fəzanın istənilən qapalı məhdud altçoxluğu kompaktdır, çünki C kompleks ədədlər fəzası və R^2 fəzası izometrik fəzalardır. Ümumiyyətlə, istənilən M və M' çoxluqları izometrik çoxluqlar isə, bu halda bunlardan birinin kompakt olmasından digərinin də kompakt olması alınır.

4. $X = C[0,1]$ fəzası kompakt fəza deyildir. Bu fəzada qapalı məhdud və kompakt olmayan altçoxluqlar vardır. Məsələn, $C[0,1]$ fəzasında $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ və $\max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)| \leq 1$ şətrini ödəyən funksiyalar çoxluğu M qapalı və məhdud çoxluqdur, amma kompakt deyildir.

5. $X = l_2$. Bu fəza kompakt deyildir, çünki bu fəzada kompakt olmayan qapalı məhdud çoxluqlar vardır. Məsələn, vahid radiuslu qapalı $\overline{S}(0,1)$ kürəsi bu fəzada kompakt deyildir. Doğrudan da, $\overline{S}(0,1)$ kürəsinə daxil olan $e_1(1,0,0,...)$, $e_2(0,1,0,...)$, $e_3(0,0,1,...)$ elementlərini götürsək, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, $i \neq j$ olduğunu görərik. Buradan aydındır ki, $\{e_i\}$ ardıcıllığı və onun heç bir altardıcıllığı yığılan deyildir. Bu isə $\overline{S}(0,1)$-in kompakt olmadığını göstərir.

İndi isə metrik fəzalarda çoxluqların kompakt olması şərtlərini göstərək. Bu məqsədlə, əvvəlcə aşağıdakı tərifləri verək:

Tərif 4. Tutaq ki, M və N X metrik fəzasına daxil olan çoxluqlardır. Əgər istənilən $x \in M$ üçün elə $x_\varepsilon \in N$ tapmaq olarsa ki, $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$ olsun, bu halda N çoxluğu M çoxluğunun ε şəbəkəsi adlanır.

Tərif 5. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ üçün M çoxluğunun sonlu ε şəbəkəsi varsa, onda $M \subset X$ çoxluğu tamam məhdud çoxluq adlanır.

Hər bir tamam məhdud çoxluğun məhdud olmasını asanlıqla göstərmək olar.

F.Hausdorfa məxsus olan aşağıdakı mühüm teoremi qeyd edək.

Teorem 2. $M \subset X$ çoxluğunun nisbi kompakt olması üçün zəruri, X fəzası tam olduğu halda, həm də kafi şərt M çoxluğunun tamam məhdud olmasıdır.

Tərif 6. Tutaq ki, $\{G_i\}$ X fəzasında açıq çoxluqlar sistemidir. Əgər istənilən $x \in M$ nöqtəsi $\{G_i\}$ sisteminin heç olmazsa bir çoxluğuna daxil olarsa, bu halda həmin sistemə M çoxluğunun açıq örtüyü deyilir.

Teorem 3. $M \subset X$ çoxluğunun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt, bu çoxluğun istənilən $\{G_i\}$ açıq örtüyündən sonlu altörtüyün ayrıla bilməsidir.

Yuxarıda göstərdiyimiz teoremlərdən aşağıdakı mühüm nəticə alınır:

Nəticə. Hər bir kompakt metrik fəza separabeldir. Doğrudan da, $\{\varepsilon_n\}$ ardıcıllığı götürək, belə ki, $\varepsilon_n \to 0$. Hər bir ε_n üçün sonlu ε_n şəbəkə quraq: $N_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1,2,\dots,k_n}$. $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ işarə edək. Aydındır ki, N çoxluğu hesabidir və X fəzasında hər yerdə sıxdır. Deməli, X separabeldir.

11.9. Topoloji fəzalar

Əsas anlayışlar. Metrik fəzaları öyrənərkən gördük ki, bir çox mühüm anlayışlar nöqtənin ətrafi anlayışı ilə sıx bağlıdır. Məsələn, $x \in X$ elementi o zaman $x_n \in X$ ardıcıllığının limiti olar ki, x-in istənilən U_x ətrafı üçün elə N_0 nömrəsi olsun ki, $n \geq N_0$ olduqda $x_n \in U_x$ olsun. Eləcə də, limit nöqtəsi, açıq və qapalı çoxluqlar, onların bir çox xassələri ətraf anlayışına əsaslanır. Metrik fəzada isə ətraf anlayışı daxil edilmiş məsafə vasitəsilə təyin edilir. Məlum olmuşdur ki, yuxarıda qeyd etdiyimiz bir çox anlayışları məsafə olmadan belə yalnız ətraf anlayışının köməyi ilə də daxil etmək olar. Bu ideya nöqtənin ətrafı anlayışına əsaslanan topoloji fəza analyışına gətirir. Ona görə də əvvəlcə topoloji fəzanın tərifini verək.

Tərif 1. Hər hansı təbiətə malik elementlərdən ibarət olan X çoxluğu o zaman topoloji fəza adlanır ki, X çoxluğunda açıq çoxluqlar adlanan τ altçoxluqlar sistemi təyin edilsin, belə ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

I. Bütün X çoxluğu və boş çoxluq– açıq çoxluqdur.

II. İstənilən sayda açıq çoxluqların birləşməsi açıq çoxluqdur.

III. Sonlu sayda açıq çoxluqların kəsişməsi açıq çoxluqdur.

X çoxluğunun altçoxluqlarından ibarət olan müxtəlif τ açıq çoxluqlar sistemi götürməklə müxtəlif topoloji fəzalar almaq olar. Ona görə də adətən, topoloji fəza dedikdə X çoxluğundan və onda təyin edilmiş τ topologiyasından (yəni τ açıq çoxluqlar sistemindən) ibarət (x,τ) cütlüyü başa düşülür.

$x \in X$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan istənilən açıq çoxluq bu nöqtənin ətrafı adlanır. Ətraf anlayışından istifadə etməklə, metrik fəzalarda olduğu kimi burada da ardıcıllığın limiti, çoxluğun limit nöqtəsi və daxili nöqtəsi, çoxluğun qapanması və digər anlayışları daxil edə bilərik. Amma bu qayda ilə təyin edilmiş ümumi X topoloji fəzasında $\{x_n\} \subset X$ ardıcıllıqlarının limiti yeganə olmaya da bilər. Məsələn, $X = (-\infty, \infty)$ və açıq çoxluqlar sistemi olaraq X, ϕ və ədəd oxundan sonlu sayda nöqtələrin atılması nəticəsində alınan çoxluqlar olarsa, onda alınmış topoloji fəzada istənilən $\{x_n\} \subset X$ ardıcıllığının limiti istənilən $x \in X$ nöqtəsi olar. Ardıcıllıqların limitinin yeganəliyini təmin etmək məqsədilə topoloji fəzanın yuxarıda verilmiş I-III aksiomlarına Hausdorf aksiomunu da əlavə edirlər.

Ayrılma aksiomu. X topoloji fəzasının istənilən $x, y \in X$ nöqtələrinin elə U_x və U_y ətrafları vardır ki, $U_x \bigcap U_y = \varnothing$. Bu aksiom ikinci ayrılma aksiomu da adlanır. İkinci ayrılma aksiomunun ödənildiyi topoloji fəzaya Hausdorf tipli, yaxud ayrıla bilən topoloji fəza deyilir. Bu tipli fəzalarda ardıcıllıqların limiti yeganə üsulla təyin edilir.

Əgər x elementinin bütün $\{u_x, \upsilon_x, w_x, ...\}$ ətraflarını götürsək, aydındır ki, aşağıdakı təkliflər doğrudur:

1. x-in istənilən ətrafı üçün $x \in u_x$.

2. Əgər u_x və υ_x x-in ətrafları isə, onda bu nöqtənin elə w_x ətrafı vardır ki, $w_x \subset u_x \bigcap \upsilon_x$.

3. Əgər $y \in U_x$ isə, onda y-in elə υ_y ətrafı vardır ki, $\upsilon_y \subset u_x$.

Bu təkliflər topoloji fəzanın yuxarıda verilmiş tərifinə ekvivalent olan ikinci tərifini verməyə imkan yaradır.

Tərif 2. İstənilən $x \in X$ elementinə qarşı X çoxluğunun boş olmayan altçoxluqlarından ibarət olan, x elementinin ətraflar sistemi adlanan S_x çoxluğu qarşı qoymaq olarsa ki, aşağıdakı aksiomlar ödənilsin, bu halda X topoloji fəza adlanır:

I. x-in hər bir U_x ətrafı bu nöqtəni əhatə edir.

II. Əgər u_x və υ_x x-in iki ətrafı isə, onda üçüncü elə w_x ətrafı vardır ki, $w_x \subset u_x \bigcap \upsilon_x$.

III. İstənilən $y \in U_x$ nöqtəsinin elə υ_y ətrafı vardır ki, $V_y \in U_x$.

I,II,III topoloji fəzanın Hausdorf aksiomları adlanır.

Metrik fəzalarda olduğu kimi istənilən $x \in G$ nöqtəsinin elə u_x ətrafı vardırsa ki, $u_x \subset G$ olsun, bu halda $G \subset X$ çoxluğu açıq çoxluq adlanır. Boş çoxluq da açıq çoxluq hesab olunur. Hausdorf aksiomlarından istifadə etməklə asanlıqla göstərmək olar ki, istənilən sayda açıq çoxluqların birləşməsi və sonlu sayda açıq çoxluqların kəsişməsi açıq çoxluqdur. Buradan topoloji fəzanın göstərilən təriflərinin ekvivalent olması alınır. Topoloji fəzanın tərifinə daxil olan S_x çoxluğu fundamental sistem, yaxud baza adlanır. Aydındır ki, metrik fəza $K(x,\varepsilon)$ şəklində ətraflardan ibarət bazaya malik ayrıla bilən topoloji fəzanın xüsusi halıdır.

Əgər X topoloji fəzasında məsafəni elə təyin etmək olarsa ki, bu məsafə ilə təyin edilən τ topologiyası (yəni, açıq çoxluqlar sistemi) X-də verilmiş topologiya ilə üst-üstə düşsün, bu halda X-metrikləşə bilən topoloji fəza adlanır.

Qeyd edək ki, metrikləşə bilməyən topoloji fəzalar da vardır. Məsələn, $F[0,1]$ ilə $[0,1]$ parçasında təyin edilmiş bütün həqiqi qiymətli funksiyalar çoxluğunu götürək, belə ki, $x(t) \in F[0,1]$ nöqtəsinin V_x ətraflar bazası

$$\upsilon(x;t_1,t_2,...,t_n;\varepsilon) = \{y(t) \in F[0,1] / |y(t_i) - x(t_i)| < \varepsilon,\ i = 1,2,...,n\}$$

kimi təyin edilir.

Tutaq ki, (X,τ)– topoloji fəzadır. Əgər X çoxluğunda başqa bir τ' topologiyası (yəni başqa açıq çoxluqlar sistemi) təyin edilərsə, onda (X,τ') topoloji fəzası alarıq.

Əgər istənilən $G \in X$ çoxluğu τ topologiyasına görə açıq olduqda τ' topologiyasına görə də açıq olarsa, onda τ' topologiyası τ-dan güclü adlanır. Başqa sözlə, bu halda istənilən $x \in X$ nöqtəsinin τ topologiyasında istənilən ətrafı x nöqtəsinin τ' topologiyasında da ətrafıdır. Aydındır ki, τ' topologiyasının τ-dan güclü olması üçün zəruri və kafi şərt τ topologiyasında V_x ətraflar bazasına daxil olan u_x ətrafı üçün τ' topologiyasında V'_x bazasına daxil olan elə u'_x ətrafı tapmaq mümkün olsun ki, $u'_x \subset u_x$. Əgər bundan əlavə hər bir $\upsilon'_x \in V'_x$ üçün elə $\upsilon_x \in V_x$ tapmaq olarsa ki, $\upsilon_x \subset \upsilon'_x$ olsun, bu halda τ və τ' topologiyaları ekvivalent adlanırlar. Bu halda (X,τ) və (X,τ') fəzaları eyni açıq çoxluqlar ehtiyatına malikdirlər.

Tutaq ki, X topoloji fəza, $X_0 \subset X$ isə onun altçoxluğudur. X_0 çoxluğunda topologiya aşağıdakı qayda ilə təyin oluna bilər: X_0 çoxluğunda açıq çoxluq elə $H \subset X_0$ çoxluqları adlanır ki, $H = G \bigcap X_0$ olsun, burada G X çoxluğunda açıq çoxluqdur. H altçoxluğu G altçoxluğunun X_0-da "izi" adlanır və bu halda deyirlər ki, X_0-da topologiya X fəzasındakı topologiya vasitəsilə yaranmışdır.

Tutaq ki, X və Y – topoloji fəzalardır.

Tərif. $f : X \to Y$ inikası o zaman $x \in X$ nöqtəsində kəsilməz adlanır ki, istənilən $\upsilon_{f(x)} \subset Y$ ətrafı üçün elə $u_x \subset X$ ətrafı tapmaq olsun ki, $f(u_x) \subset \upsilon_{f(x)}$.

Göründüyü kimi bu tərif kəsilməzliyin Koşi mənada ("$\varepsilon - \delta$" dilində) tərifinin mücərrəd fəzalar üçün analoqudur. Belə ki, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ və $(f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$ intervalları uyğun topoloji fəzalarda nöqtənin ətrafları ilə əvəz edilmişdir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. $f : X \to Y$ inikasının X fəzasında kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt $H \subset Y$ istənilən açıq çoxluğunun $f^{-1}(H)$ proobrazının X çoxluğunda açıq çoxluq olmasıdır.

Topoloji fəzalar içərisində hesabi bazaya malik topoloji fəzalar xüsusi sinif təşkil edirlər. Əgər hər hansı T topoloji fəzasında hesabi baza varsa, onda həmin fəzada hökmən hesabi hər yerdə sıx çoxluq vardır, yəni elə hesabi çoxluq vardır ki, onun qapanması bütün T fəzasıdır. Metrik fəzalarda olduğu kimi, hesabi hər yerdə sıx çoxluğa malik topoloji fəzalar da separabel fəzalar adlanır.

Əgər R metrik fəzası separabel isə, onda o hesabi bazaya malikdir. Əgər $\{x_n\}$ R-də hesabi hər yerdə sıx çoxluq isə, onda $B\left(x_n, \dfrac{1}{m}\right)$ açıq kürələri, $m, n \in N$, hesabi baza təşkil edir. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. R metrik fəzası yalnız o zaman hesabi bazaya malikdir ki, o separabel olsun.

Teoremə əsasən məhdud ardıcıllıqlardan ibarət separabel olmayan metrik fəza hesabi bazaya malik deyildir. Qeyd olunmuş bu teorem ümumi halda, metrik fəza olmayan topoloji fəzalarda doğru olmaya da bilər, yəni hesabi bazaya malik olmayan separabel fəza göstərmək olar.

Tərif. Əgər $\{M_\alpha\}$ çoxluqlar sistemi üçün $X = \underset{\alpha}{U} M_\alpha$ şərti ödənərsə, onda bu sistemə X çoxluğunun örtüyü deyilir. T topoloji fəzasının açıq (qapalı) çoxluqlardan ibarət örtüyü açıq (qapalı) örtük adlanır.

Əgər $\{M_\alpha\}$ sisteminin hər hansı $\{M_{\alpha_i}\}$ alt hissəsi T fəzasının örtüyü isə, ona $\{M_\alpha\}$-nın alt örtüyü deyilir. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Əgər T – hesabi bazaya malik topoloji fəza isə, onda onun istənilən örtüyündən sonlu və ya hesabi alt örtük ayırmaq olar.

Topoloji fəzalarda kompaktlıq. Riyazi analiz kursunda Heyme-Borel lemması adlanan aşağıdakı fakt mühüm rol oynayır.

Ədəd oxu üzərində $[a,b]$ parçasının istənilən intervallar sistemi ilə örtüyündən onun sonlu alt örtüyünü ayırmaq olar. Əgər bu təklifdə intervalları istənilən açıq çoxluqlarla əvəz etsək, təklif yenə doğru olar; yəni $[a,b]$ parçasının istənilən açıq örtüyündən sonlu altörtük ayırmaq olar. Ədəd oxu üzərində parçanın bu xassəsindən istifadə edərək aşağıdakı mühüm anlayışı daxil edək.

Tərif. Əgər T topoloji fəzasının istənilən açıq örtüyü sonlu altörtüyə malik isə onda T -yə kompakt topoloji fəza deyilir.

Hausdorf ayırma aksiomunu ödəyən kompakt topoloji fəza kompakt adlanır.

Aşağıdakı teoremlər göstərir ki, ədəd oxu üzərində $[a,b]$ parçasının malik olduğu kompaktlıq xassəsi istənilən sonlu ölçülü evklid fəzasında qapalı məhdud çoxluqlar üçün də doğrudur. Əksinə, ədəd oxu, müstəvi, üçölçülü fəza kompakt olmayan fəzalara misallardır.

Fərz edək ki, $\{A_i\}$ T çoxluğunun müəyyən altçoxluqlar sistemidir. Əgər bu sistemin istənilən sonlu kəsişməsi $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ boş çoxluq deyilsə, onda bu sistemə mərkəzləşmiş sistem deyilir.

Kompakt çoxluqların yuxarıda verilmiş tərifindən və ikilik prinsipindən istifadə etməklə fəzanın kompaktlığı haqqında teoremi isbat etmək olar.

Teorem 1. T topoloji fəzasının kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt, onun hər bir mərkəzləşmiş qapalı altçoxluqlar sisteminin boş olmayan kəsişməyə malik olmasıdır.

İndi isə kompakt fəzaların bəzi xassələrini qeyd edək. Bu xassələri aşağıdakı teoremlərlə ifadə etmək olar.

Teorem 2. Əgər T kompakt fəza isə, onda onun istənilən sonsuz altçoxluğu heç olmazsa bir limit nöqtəsinə malikdir.

Teorem 3. Kompakt fəzanın istənilən qapalı altçoxluğu da kompaktdır.

Teorem 4. Kompakt fəzanın kəsilməz obrazı da kompakt fəzadır.

11.10. Metrik fəzalara aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. $|z| < R$ $(0 < R \le \infty)$ dairəsində birqiymətli və analitik funksiyalar çoxluğunun

$$\rho(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - g(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - g(z)|},$$

məsafəsinə nəzərən metrik fəza təşkil etdiyini göstərin, burada r_k monoton artan və R ədədinə yığılan müsbət ədədlər ardıcıllığıdır. Bu fəzanı A_R kimi işarə edirlər.

Həlli. $\rho(f,g) = 0$ eynilik aksiomu istənilən $k \ge 0$ üçün $\max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - g(z)| = 0$ bərabərliyinə eynigüclüdür. Buradan $|z| \le r_k$ üçün $f(z) = g(z)$ alırıq. Analitik funksiyalar üçün yeganəlik teoremindən istənilən $|z| < R$ üçün $f(z) = g(z)$ olduğunu alırıq.

$\rho(f,g) = \rho(g,f)$ simmetriya aksiomunun ödənməsi aydındır. Ona görə də üçbucaq aksiomunun doğru olduğunu yoxlayaq: fərz edək ki, $f(z)$, $g(z)$, $\varphi(z)$ A_R-ə daxil olan istənilən funksiyalardır. $|z| < R$ şərtini ödəyən istənilən z nöqtəsində

$$|f(z) - g(z)| \le |f(z) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - g(z)|$$

və

$$\max_{|z|\le r_k} |f(z) - g(z)| \le \max_{|z|\le r_k} |f(z) - \varphi(z)| + \max_{|z|\le r_k} |\varphi(z) - g(z)|$$

olması aydındır.

$$\psi(t) = \frac{t}{1+t}, \quad \psi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

olduğu üçün $\psi(t)$ funksiyası istənilən $t > 0$ qiymətlərində monoton artandır. Ona görə də istənilən $k \ge 0$ üçün

$$\frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - g(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - g(z)|} \le \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - \varphi(z)| + \max\limits_{|z|\le r_k} |\varphi(z) - g(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - \varphi(z)| + 1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |\varphi(z) - g(z)|} \le$$

$$\le \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - \varphi(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |f(z) - \varphi(z)|} + \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |\varphi(z) - g(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |\varphi(z) - g(z)|}$$

Buradan $\rho(f,g) \le \rho(g,f) + \rho(\varphi,g)$ alınır.

2. Tutaq ki, X – $[0,1]$ parçasında verilmiş bütün n-dərəcəli cəbri çoxhədlilər çoxluğudur. İstənilən $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ və $Q(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ çoxhədliləri üçün

$$\rho_1(P,Q)=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|,$$

və

$$\rho_2(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|$$

məsafələri təyin edək. Bu məsafələrin ekvivalent olduğunu göstərin.

Həlli. Tutaq ki,

$$g(x)=P(x)-Q(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)x^k=\sum_{k=0}^{n}c_k x^k$$

Onda

$$\rho_1(P,Q)=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|=\max_{x\in[0,1]}|g(x)|=$$

$$=\max_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n}c_k x^k\right|\le\sum_{k=0}^{n}|c_k|=\rho_2(P,Q)$$

İndi isə əks bərabərsizliyi göstərək. Bu məqsədlə, $[0,1]$ parçasından $x_0<x_1<x_2<...<x_n$ şərtini ödəyən nöqtələr götürək və $(n+1)$ məchullu $(n+1)$ sayda tənliklər sisteminə baxaq:

$$\sum_{k=0}^{n}c_k x_i^k=g(x_i)\quad(i=0,1,2,...,n)$$

Bu sistemin əsas determinantı Vandermond determinantıdır və sıfırdan fərqlidir. Ona görə də sistemin yeganə

$$c_k=\sum_{i=0}^{n}\alpha_{ki}g(x_i)\ \ (k=0,1,2,...,n)$$

həlli vardır. Burada α_{ki} əmsalları seçilmiş t_i nöqtələrindən asılıdır, amma $g(x)$ çoxhədlisindən asılı deyildir. Ona görə də yaza bilərik:

$$\rho_2(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}|c_k|=\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=0}^{n}\alpha_{ki}g(x_i)\right|\le$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}|\alpha_{ki}|\right)\max_{x\in[0,1]}|g(x)|\le\beta\rho_1(P,Q)$$

Buradan $\rho_1(P,Q)\le\rho_2(P,Q)\le\beta\rho_1(P,Q)$ olduğunu, yəni bu məsafələrin ekvivalent olduğunu alırıq.

3. X metrik fəzasında istənilən x, y, z elementləri üçün $|\rho(x,y)-\rho(y,z)| \le \rho(x,z)$ olduğunu göstərin.

Həlli. Üçbucaq aksiomuna görə

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(y,z)$$

Eyni qayda ilə $\rho(y,z) \le \rho(y,x)+\rho(x,z)$. Buradan

$$\rho(x,y)-\rho(y,z) \ge -\rho(x,z)$$

Nəticədə

$$-\rho(x,z) \le \rho(x,y)-\rho(y,z) \le \rho(x,z)$$

yaxud

$$|\rho(x,y)-\rho(y,z)| \le \rho(x,z)$$

alarıq.

4. İxtiyari metrik fəzada $\rho(x,y)$ məsafə funksiyası hər iki arqumentə nəzərən kəsilməz funksiyadır.

İsbatı. Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} (y_n, y) = 0$,

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| = |\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y_n)+\rho(x,y_n)-\rho(x,y)| \le$$

$$\le |\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y_n)| + |\rho(x,y_n)-\rho(x,y)|$$

bərabərsizliyinin sağ tərəfinə 2.3-də alınmış bərabərsizliyi tətbiq etsək

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| \le \rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)$$

Buradan isə $\lim\limits_{n\to\infty} |\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| = 0$ alarıq.

5. $R=(-\infty,\infty)$ həqiqi ədədlər çoxluğunda məsafəni $\rho(x,y)=arctg|x-y|$ kimi təyin etmək olarmı?

Həlli. $arctgx$ funksiyası artan funksiyadır və $f(0)=0$. Ona görə də $|x-y| \ge 0$ olduqda $arctg|x-y| \ge 0$. $arctg|x-y|=0$ olarsa, $|x-y|=0$, $x=y$ alırıq. $x=y$ olduqda $\rho(x,y)=0$ olması aydındır.

$|x-y|=|y-x|$ olmasından $arctg|x-y|=arctg|y-x|$ və deməli $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ alınır.

Göstərək ki, istənilən x, y, z üçün

$$arctg|x-y| \le arctg|x-z| + arctg|z-y|.$$

Bunun üçün $arctg(\alpha+\beta) \le arctg\alpha + arctg\beta$ bərabərsizliyinin doğru olduğunu göstərmək kifayətdir. Köməkçi

$$f(t) = arctgt + arctg\beta - arctg(t+\beta)$$

funksiyasına baxaq.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(t+\beta)^2} \ge 0 \quad t \ge 0,\ \beta \ge 0$$

üçün olduğundan $f(t)$ funksiyası qeyd olunmuş $\beta \in (0,\infty)$ üçün $[0,+\infty)$ aralığında artan funksiyadır. Ona görə də $t \geq 0$ üçün $f(t) \geq f(0) = 0$. Buradan

$$arctg\alpha + arctg\beta - arctg(\alpha+\beta) \geq 0,$$

yaxud

$$arctg(\alpha+\beta) \leq arctg\alpha + arctg\beta$$

alarıq. $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ bərabərsizliyini və $arctgt$-nin artan olduğunu nəzərə alsaq, $\alpha = |x-z|$, $\beta = |z-y|$ qəbul edərək, sonuncu bərabərsizlikdən

$$arctg|x-y| \leq arctg|x-z| + arctg|z-y|$$

alarıq. Bu isə üçbucaq aksiomunun doğru olduğunu göstərir.

6. Tutaq ki, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ uyğun olaraq $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ...$ məsafələrinə malik metrik fəzalardır.

$$X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \times ... \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n ...)$$

dekart hasilini işarə edək.

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n ...),\ x_k, y_k \in X_k$$

elementləri arasında məsafəni aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1+\rho_n(x_n, y_n)} \qquad (*)$$

Göstərin ki, $\rho(x,y)$– məsafə aksiomlarını ödəyir.

Həlli. $\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(x_n,y_n)}{1+\rho_n(x_n,y_n)} < \frac{1}{2^n}$ olduğu üçün və $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ yığılan həndəsi sıra olduğundan (*) sırası da yığılandır. Məsafənin I və II aksiomlarının ödənməsi aydındır. Üçüncü aksiomun ödənildiyini göstərək. $x, y, z \in X$ götürək. $\rho_n(x_n, y_n) = a_n$, $\rho_n(x_n, z_n) = b_n$, $\rho_n(y_n, z_n) = c_n$ işarə edək. $x_n, y_n, z_n \in X_n$ və ρ_n X_n-də məsafə olduğundan $a_n \leq b_n + c_n$. Buradan

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leq \frac{b_n}{1+b_n} + \frac{c_n}{1+c_n} \quad (n \in N)$$

bərabərsizliyinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{a_n}{1+a_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{b_n}{1+b_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{c_n}{1+c_n}$$

alırıq. Bu isə $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ olması deməkdir.

7. $a_1, a_2, ..., a_n$ və $b_1, b_2, ..., b_n$ həqiqi ədədləri üçün Koşi bərabərsizliyi adlanan aşağıdakı bərabərsizliyin doğru olduğunu göstərin.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

İsbatı. Köməkçi

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_i x+b_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=Ax^2+2Bx+C$$

funksiyasına baxaq. $A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$, $B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, $C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ işarə edək. $A\geq 0$, $\varphi(x)\geq 0$ olduğundan $B^2-AC\leq 0$ ödənməlidir. Buradan $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$, yaxud

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}$$

alırıq.

8. Minkovski bərabərsizliyi adlanan aşağıdakı bərabərsizliyi isbat edin:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}$$

İsbatı. Sonlu cəm üçün Koşi bərabərsizliyindən alırıq ki,

$$2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}$$

Bu bərabərsizliyin hər tərəfinə $\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ cəmini əlavə etsək, alarıq:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leq\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\leq\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}.$$

9. $[0,2]$ parçasında kəsilməz funksiyalardan ibarət $C^1[0,2]$ fəzasının $\rho(f,g)=\int_0^2|f(x)-g(x)|dx$ məsafəsinə nəzərən tam olmadığını göstərin.

Həlli.

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n},\\ n(1-x), & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1,\\ 0, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

ardıcıllığını götürək. $\varphi_n(x)\in C^1[0,2],\ n\in N$.

Göstərək ki, $\varphi_n(x)$ bu fəzada fundamental ardıcıllıqdır, amma yığılan deyildir.

Doğrudan da $n>m$ olduqda alarıq

$$\rho(\varphi_n,\varphi_m)=\int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{n}}[1-m(1-x)]dx+$$

$$+(n-m)\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}(1-x)dx=\frac{n-m}{2nm}\le\frac{1}{2m}$$

Ona görə də $\rho(\varphi_n,\varphi_m)\le\dfrac{1}{2\min(n,m)}\to 0$, yəni $\varphi_n(x)$ fundamental ardıcıllıqdır.

Tutaq ki, $f(x)\in C^1[0,2]$ istənilən kəsilməz funksiya və

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

Aşağıdakı bərabərsizliyi yazaq:

$$0\le\int_0^2|f(x)-\psi(x)|dx\le\int_0^2|f(x)-\varphi_n(x)|dx+\int_0^2|\varphi_n(x)-\psi(x)|dx$$

Burada $\int_0^2|\varphi_n(x)-\psi(x)|dx=\dfrac{1}{2n}\to 0,\ n\to\infty$ olduğundan bərabərliyin sağ tərəfindəki $\rho(\varphi_n,f)=\int_0^2|f(x)-\varphi_n(x)|dx$ ifadəsi heç bir kəsilməz $f(x)\in C^1[0,2]$ funksiyası üçün sıfra yığıla bilməz, yəni $\rho(\varphi_n,f)\not\to 0,\ n\to\infty$. Bu isə $C^1[0,2]$-nin tam olmaması deməkdir.

10. X metrik fəzasında aşağıdakı $x_n=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\dots,x_k^{(n)},\dots\right)$ nöqtələr ardıcıllıqları yığılandırmı?

a) $X = l_1, \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots \right);$

b) $X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots \right);$

v) $X = l_3, \quad x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right).$

Həlli. a) İstənilən $n \in N$ üçün $x_n \in l_1$ olması aydındır. Göstərək ki, x_n ardıcıllığı fundamental deyildir. Doğrudan da istənilən $n \in N$ üçün

$$\rho(x_n, x_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1, \ \rho(x_n, x_{2n}) = 1 \not\to 0 .$$

x_n fundamental deyildir, deməli heç yığılan da deyildir.

b) x_n ardıcıllığı l_2 fəzasında da fundamental deyildir.

$$\rho^2(x_n, x_{2n}) = \sum_{k=1}^{n^2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right|^2 + \sum_{k=n^2+1}^{(2n)^2} \frac{1}{4n^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{4n^2} + \sum_{k=n^2+1}^{4n^2} \frac{1}{4n^2} = 4n^2 \frac{1}{4n^2} = 1, \ \rho^2(x_n, x_{2n}) = 1$$

Deməli x_n ardıcıllığı l_2 fəzasında fundamental deyildir və yığılmır.

v) Bu halda

$$\rho^3(x_n, x_{n+m}) = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^3} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \to 0, \quad n \to \infty$$

və istənilən $m \in n$ üçün. Deməli, x_n ardıcıllığı l_3 fəzasında fundamentaldır. l_3 tam fəza olduğu üçün x_n yığılandır.

11. Tutaq ki, $N_\alpha -$ elə $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ədədi ardıcıllıqlarıdır ki, $\sup\limits_n (\alpha_n |x_n|) < +\infty$ şərti ödənilir, burada $\alpha = (\alpha_n) -$ qeyd edilmiş müsbət ədədlər ardıcıllığıdır. $\beta = (\beta_n)$ elə müsbət ədədlər ardıcıllığıdır ki, $L = \sup\limits_n \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)$ sabit kəmiyyətdir. N_α çoxluğunda məsafəni

$$\rho(x, y) = \sup_n (\beta_n |x_n - y_n|)$$

kimi təyin edək. İsbat edin ki, N_α tam metrik fəzadır.

İsbatı. Tutaq ki, $x^k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, ...\right)$ N_α fəzasında fundamental ardıcıllıqdır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, $k, m \geq n_0$ olduqda

$$\rho(x_k, x_m) = \sup_n \left(\beta_n \left| x_n^{(k)} - x_n^{(m)} \right|\right) = L \sup_n \left(\alpha_n \left| x_n^{(k)} - x_n^{(m)} \right|\right) < \varepsilon$$

ödənilir. Buradan qeyd olunmuş n üçün $\alpha_n \left| x_n^{(k)} - x_n^{(m)} \right| < \frac{\varepsilon}{L}$ ($k, m \geq n_0$) alarıq. Bu o deməkdir ki, $\left\{x_n^{(m)}\right\}$ ardıcıllıqları R həqiqi ədədlər çoxluğunda fundamentaldırlar. Ona görə də $\gamma_n = \lim\limits_{m \to \infty} x_n^{(m)}$ limitləri vardır.

Göstərək ki, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n ...) \in N_\alpha$. Bu məqsədlə $\alpha_n \left| x_n^{(k)} - x_n^{(m)} \right| < \frac{\varepsilon}{L}$ bərabərsizliyində $m \to \infty$ şərtində limitə keçsək (qeyd olunmuş $n \in N$ və $k \geq n_0$ üçün) alarıq:

$$\alpha_n \left| x_n^{(k)} - \gamma_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{L}$$

Onda yaza bilərik:

$$\alpha_n |\gamma_n| \leq \alpha_n \left| x_n^{(n_0)} - \gamma_n \right| + \alpha_n \left| x_n^{(n_0)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{L} + \sup_n \alpha_n \left| x_n^{(n_0)} \right| = C_{n_0} < +\infty,$$

yəni $\gamma \in N_\alpha$. Bundan əlavə, $k \geq n_0$ olduqda

$$\rho(x_k, \gamma) = \sup_n \beta_n \left| x_n^{(k)} - \gamma \right| = \sup_n \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}, \alpha_n \left| x_n^{(k)} - \gamma_n \right| \right) \leq L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

yəni, $\rho\left(x^{(k)}, \gamma\right) \to 0$, $k \to \infty$.

12. $[0,1]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiyalardan ibarət $C_0^{(1)}[0,1]$ fəzasının

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

məsafəsinə nəzərən tam olmadığını göstərin.

Həlli. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k \pi x\right)$ Veyerştrass funksiyasını götürək, burada $0 < a < 1$, $b -$ tam tək ədəddir və $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Baxılan sıra müntəzəm yığılan olduğundan onun cəmi olan $f(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. Amma məlum olduğu kimi bu funksiyanın $[0,1]$ parçasının heç bir nöqtəsində törəməsi yoxdur. Beləliklə, alırıq ki, bu sıranın xüsusi cəmləri ardıcıllığı müntəzəm yığılandır və deməli $C_0^{(1)}[0,1]$ fəzasında fundamentaldır.

Amma gördüyümüz kimi bu ardıcıllığın baxılan fəzada limiti yoxdur. Yəni $C_0^{(1)}[0,1]$ tam fəza deyildir.

13. Göstərin ki, $C[-1,1]$ fəzası $[-1,1]$ parçasında verilmiş $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ cəbri çoxhədlilərdən ibarət P fəzasının $\rho(P,Q)=\max_{x\in[-1,1]}|P(x)-Q(x)|$ məsafəsinə nəzərən tamamlanmasından ibarətdir.

Həlli. $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $n=0,1,2,...$ çoxhədlilər ardıcıllığını götürək. Bu ardıcıllığın limiti e^x funksiyasına bərabərdir və P çoxluğuna daxil deyildir, deməli P tam fəza deyildir. Amma Veyerştrass teoreminə görə P çoxluğu $C[-1,1]$ fəzasında hər yerdə sıxdır. Ona görə də $C[-1,1]$ fəzasına P fəzasının tamamlanması kimi baxmaq olar.

14. 1) $[0,1]$ parçasında kəsilməz və $|f(x)|\le 1,\ x\in[0,1]$ şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğu M -in $C[0,1]$ fəzasında nisbi kompakt olmadığını göstərin.

2) $[0,1]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan və $|f'(x)|\le 1$, $f(0)=a$ şərtini ödəyən M' çoxluğunun $C[0,1]$ fəzasında nisbi kompakt olduğunu göstərin.

Həlli. 1) $f_n(x)=\sin 2^n \pi x \quad (n=1,2,...)$ funksiyalar ardıcıllığı M çoxluğuna daxildir, amma bu ardıcıllıq $C[0,1]$ fəzasında yığılmır. Doğrudan da $k>n$ olduqda

$$\rho(f_n, f_k)=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f_k(x)|\ge\left|f_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-f_k\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right|=1$$

münasibətindən verilmiş ardıcıllığın fundamental olmadığı alınır. Bu isə ardıcıllığın yığılan olmaması deməkdir. Yəni M kompakt deyildir.

2) İstənilən $f(x)\in M'$ funksiyasının

$$f(x)=a+\int_0^t f'(\tau)d\tau$$

şəklində göstərmək olar. Buradan $|f(x)|\le|a|+1$ alırıq. Eyni zamanda

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\int_{x'}^{x''} f'(\tau)d\tau\right|\le|x''-x'|$$

alarıq.

Alınmış bu münasibətlər göstərir ki, M' çoxluğuna daxil olan funksiyalar müntəzəm məhdud və eyni dərəcədən kəsilməzdirlər. Onda məlum Arsel teoreminə görə M' çoxluğunun kompakt olmasını alırıq.

15. $\Pi = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2;\ |x_n| \le \frac{1}{2^n} \right\}$

paralelepipedinin l_2 fəzasında nisbi kompakt olduğunu göstərin.

Həlli. Göstərək ki, Π tamam məhdud çoxluqdur, yəni istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün Π çoxluğunun sonlu ε-şəbəkəsi vardır.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ bərabərsizliyini ödəyən n nömrəsini seçək və hər bir $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \Pi$ nöqtəsinə qarşı $x^{(0)} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in \Pi$ nöqtəsini qarşı qoyaq. Onda

$$\rho\left(x, x^{(0)}\right) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Π paralelepipedinin bütün $x^{(0)}$ nöqtələrindən düzəlmiş Π_0 çoxluğu tamamilə məhdud çoxluqdur (n-ölçülü fəzada məhdud çoxluq olduğu üçün). Ona görə də Π_0 çoxluğunun sonlu $\frac{\varepsilon}{2}$ şəbəkəsi vardır. Bu eyni zamanda Π çoxluğu üçün sonlu ε şəbəkə olar.

16. Bütün çoxhədlilər çoxluğu R-in n dəfə kəsilməz diferensillanan funksiyalar fəzası $C^n[a,b]$-də

$$\rho(f, g) = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) \right|$$

məsafəsinə nəzərən hər yerdə sıx olduğunu göstərin.

Həlli. İsbatı riyazi induksiya üsulu ilə aparaq.

$k = 0$ olduqda R-in bütün $C[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıx olması istənilən kəsilməz funksiyanın çoxhədlilər ardıcıllığı ilə yaxınlaşması haqqında məlum Veyerştrass teoremindən nəticə kimi alınır.

Tutaq ki, R fəzası $C^{n-1}[a,b]$ fəzasında hər yerdə sıxdır. İstənilən $f_0(x) \in C^{(n)}[a,b]$ götürək. Onda $f_0'(x) \in C^{(n-1)}[a,b]$ olar. Onda fərziyyəmizə görə elə $P(x)$ çoxhədlisi vardır ki,

$$\rho_{C^{(n-1)}[a,b]}(f_0', P) = \max_{x \in [a,b]} \left| f_0'(x) - P(x) \right| + \max_{x \in [a,b]} \left| f_0''(x) - P'(x) \right| + ... +$$

$$+ \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n)}(x) - P^{(n-1)}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a + \varepsilon}.$$

$P_1(x) = f_0(a) + \int_0^x P(\tau) d\tau$ götürək. Onda alarıq:

$$\rho_{C^{(n)}[a,b]}(f_0,P_1)=\max_{x\in[a,b]}\left|f_0(x)-f_0(a)-\int_0^x P(\tau)d\tau\right|+$$

$$+\max_{x\in[a,b]}\left|f_0'(x)-P(x)\right|+\ldots+\max_{x\in[a,b]}\left|f_0^{(n)}(x)-P_0^{(n-1)}(x)\right|\le$$

$$\le\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x(f_0'(\tau)-P(\tau))d\tau\right|+\frac{\varepsilon}{b-a+\varepsilon}\le$$

$$\le(b-a)\max_{\tau\in[a,b]}\left|f_0'(\tau)-P(\tau)\right|+\frac{\varepsilon}{b-a+\varepsilon}<$$

$$<\frac{(b-a)\varepsilon}{b-a+1}+\frac{\varepsilon}{b-a+1}=\varepsilon\,.$$

Alırıq ki, $\overline{R}=C^{(n)}[a,b]$.

17. Bütün ədədi ardıcıllıqlar çoxluğu olan S fəzasını götürək. İsbat edin ki, 1) S fəzası $\rho(x,y)=\sup\limits_n\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ məsafəsinə nəzərən separabel olmayan metrik fəzadır. 2) S fəzası $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ məsafəsinə nəzərən separabel metrik fəzadır.

Həlli. 1) $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$– belə ki, x_i koordinatları yalnız 0 və ya 1 qiymətləri ala bilər, şəklində bütün ardıcıllıqlar çoxluğunu $S_{0,1}$ ilə işarə edək. Məlum olduğu kimi $S_{0,1}$ kontinium güclü çoxluqdur. $x\neq y$ olduqda $\rho(x,y)=\frac{1}{2}$, $(x,y\in S_{0,1})$ olduğu üçün aydındır ki, $S_{0,1}$ çoxluğunun hər bir elementini hər hansı hesabi çoxluğun elementləri ilə yaxınlaşdırmaq mümkün deyildir. Çünki, mərkəzi $S_{0,1}$ çoxluğunun nöqtələrində yerləşən və radiusları $r=\frac{1}{3}$-ə bərabər olan kürələr öz aralarında kəsişmirlər və kontinium güclü çoxluqdur. Əgər hər hansı A çoxluğu S fəzasında hər yerdə sıx olarsa, onda qurulmuş kürələrdən hər biri bu çoxluğun heç olmazsa bir elementini öz daxilində saxlamalıdır. Ona görə də A çoxluğu hesabi ola bilməz. $S_{0,1}\subset S$ münasibətindən S-in separabel olmadığını alırıq.

2) M ilə $(r_1,r_2,...,r_n0,0,...)$ şəklində elementlər çoxluğunu işarə edək, belə ki, $r_1,r_2,...,r_n$– rasional ədədlər, n-isə istənilən natural ədəddir. Məlumdur ki, M – hesabi çoxluqdur. Göstərək ki, M çoxluğu S fəzasında hər yerdə sıxdır. Bu məqsədlə $\varepsilon>0$ ədədini və istənilən $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in S$ elementini

götürək. Elə n nömrəsi götürək ki, $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k|}{1+|x_k|}<\frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Rasional ədədlər çoxluğu ədəd oxunda sıx olduğuna görə elə $x^{(0)}=(r_1,r_2,...,r_n,0,0,...)$ elementi tapa bilərik ki, $\sum_{k=1}^{n}|x_k-r_k|<\frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Onda alarıq:

$$\rho\left(x,x^{(0)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-r_k|}{1+|x_k-r_k|}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k|}{1+|x_k|}\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}|x_k-r_k|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

Buradan alırıq ki, $\overline{M}=S$.

18. İstənilən X metrik fəzasında x,y,u,υ elementləri üçün $|\rho(x,\upsilon)-\rho(y,u)|\leq\rho(x,y)+\rho(u,\upsilon)$ bərabərsizliyinin doğru olduğunu göstərin.

19. Göstərin ki, $R=(-\infty,\infty)$ ədəd oxu üzərində məsafəni $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$ bərabərliyi ilə təyin etmək olar.

20. İkiölçülü vektorlar çoxluğunda məsafəni

$$\rho[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=\left(\sqrt{|x_1-y_1|}+\sqrt{|x_2-y_2|}\right)^2$$

kimi təyin etmək olarmı?

21. Göstərin ki, N natural ədədlər çoxluğunda məsafə aşağıdakı kimi təyin edilə bilər:

a) $\rho(m,n)=\frac{|m-n|}{mn}$; b) $\rho(m,n)=\begin{cases}0, & m=n,\\ 1+\frac{1}{m+n}, & m\neq n.\end{cases}$

22. Tutaq ki, $X=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. $\rho_1(x,y)=|x-y|$, $\rho_2(x,y)=|tgx-tgy|$ ρ_1 və ρ_2 məsafələrinin ekvivalent olduğunu göstərin.

23. Göstərin ki, $\rho(x,y)$ hər hansı X fəzasında məsafə təyin edirsə, onda $\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ funksiyası da məsafə təyin edir.

24. $[0,1]$ parçasinda n-ci tərtibə qədər kəsilməz törəməsi olan $C^{(n)}[0,1]$ funksiyalar fəzasında aşağıdakı məsafələrin ekvivalent olduğunu göstərin.

$$\rho_1(f,g)=\sum_{k=0}^{n}\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\right|,$$

$$\rho_2(f,g)=\sum_{k=0}^{n}\max_{x\in[0,1]}\frac{\left|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\right|}{k!},$$

$$\rho_3(f,g)=\max_{0\le k\le n}\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\right|.$$

25. $C_1[0,1]$ ilə $[0,1]$ parçasinda kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edək, belə ki, məsafə

$$\rho_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$$

kimi təyin edilir. Göstərin ki, $C[0,1]$ və $C_1[0,1]$ fəzalarında məsafələr ekvivalent deyildir.

Göstəriş. Bu fəzalarda $f_n(x)=\begin{cases} nx, & 0\le x\le \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n}\le t\le 1. \end{cases}$ ardıcıllıqlarına baxın.

26. Göstərin ki, $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ ardıcıllığı $C[0,1]$ fəzasında yığılan deyildir.

27. İsbat edin ki, $(-\infty,\infty)$ intervalında təyin edilmiş kəsilməz və $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$ şərtini ödəyən funksiyalar fəzası $\rho(f,g)=\sup\limits_{x\in R}|f(x)-g(x)|$ məsafəsinə nəzərən tam fəzadır.

28. $R=(-\infty,\infty)$ fəzası $\rho(x,y)=arctg|x-y|$ məsafəsinə nəzərən tamdırmı?

29. $R=(-\infty,\infty)$ fəzasının $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|$ məsafəsinə nəzərən tam olmadığını göstərin və onun tamamlanmasını tapın.

30. $[0,1]$ parçasinda təyin edilmiş bütün çoxhədlilər fəzasının $\rho(P,Q)=\max\limits_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|$ məsafəsinə nəzərən tam olmadığını göstərin və onun tamamlanmasını tapın.

31. $\pi=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in l_2,\ |x_n|\le\frac{1}{n}\right\}$

paralelepipedinin l_2 fəzasında nisbi kompakt olduğunu göstərin.

32. Aşağıdakı funksiyalar çoxluğunun $C[0,1]$ fəzasında kompakt çoxluq əmələ gətirdiyini göstərin.

a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3}e^{-nx}$, b) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x+n^2}$, burada a_n ardıcıllığı $|a_n|<1$, $n \in N$ şərtini ödəyən istənilən ədədlər ardıcıllığıdır.

33. İsbat edin ki, Lipşits şərtini ödəyən hər bir məhdud funksiyalar çoxluğu $C[a,b]$ fəzasında kompakt çoxluqdur.

34. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$ funksiyası ilə aparılan inikasın $[1,2]$ parçasında sıxılmış inikas olduğunu göstərin.

35. $[1,+\infty)$ intervalında təyin edilmiş $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ funksiyası sıxılmış inikasdırmı? Onun tərpənməz nöqtəsi varmı?

36. $x_i=\lambda\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k+b_i$, $i=1,2,...$ tənliklər sisteminə baxaq:

a) Əgər $(b_1,b_2,...,b_n,...)\in m$, $\sup\limits_i \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|=c<\infty$ və $|\lambda|c<1$ şərtləri ödənilirsə, tənliklər sisteminin m fəzasında yeganə həllinin olduğunu göstərin.

b) Əgər $(b_1,b_2,...,b_n,...)\in l_2$, $d=\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2<\infty$ və $|\lambda|d<1$ şərtləri ödənilirsə, tənliklər sisteminin l_2 fəzasında yeganə həllinin olduğunu göstərin.

XII FƏSİL
XƏTTİ NORMALAŞMIŞ FƏZALAR

Yuxarıda gördük ki, həqiqi ədədlər çoxluğunda ədədin mütləq qiyməti, kompleks ədədin və vektorun modulu anlayışları bu çoxluqlarda məsafə anlayışını daxil etməyə imkan verir. Həmin çoxluqlarda məsafə anlayışının olması isə bu çoxluqlarda ardıcıllıqların və sıraların yığılması, limit, kəsilməzlik və funksiyanın törəməsi anlayışlarını daxil etməyə imkan veir.

İndi isə göstərəcəyik ki, istənilən xətti fəzada əsas xassələri modulun xassələrinə analoji olan elə kəmiyyət daxil etmək olar ki, bu kəmiyyət fəzada metrik fəza strukturu əmələ gətirsin və bu fəzalarda da elementlər ardıcıllığının yığılması və limiti kimi anlayışları təyin etmək mümkün olsun.

12.1. Normalaşmış fəzanın tərifi və sadə xassələri

Tutaq ki, $X-$ xətti fəzadır. İstənilən $x \in X$ elementinə qarşı bu elementin norması adlanan və $\|x\|$ kimi işarə edilən mənfi olmayan kəmiyyət qarşı qoyaq, belə ki, aşağıdakı üç şərt ödənsin:

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ yalnız və yalnız $x = 0$ olduqda mümkündür.

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ istənilən λ ədədi üçün

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ istənilən $x, y \in X$ üçün

1)-3) şərtləri normanın aksiomları adlanır.

Əgər X xətti fəzasında təyin olunmuş norma bu üç şərti ödəyərsə, onda X -ə normalaşmış fəza deyilir.

Qeyd edək ki, verilmiş X xətti fəzasında elementin normasını müxətlif üsullarla təyin etmək olar. Bu zaman müxtəlif normalara nəzərən alınmış normalaşmış fəzalar eyni elementlərdən təşkil edilməsinə baxmayaraq müxtəlif quruluşa malik ola bilərlər.

Verilmiş X normalaşmış fəzasında istənilən x, y elementləri arasındakı məsafəni

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

kimi təyin etmək olar. Təyin edilmiş bu məsafənin metrik fəza aksiomlarını ödədiyini asanlıqıa göstərmək olar. Doğrudan da, $x \neq y$, $x - y \neq 0$ olduqda $\rho(x, y) = \|x - y\| > 0$, əgər $x = y,\ x - y = 0$ olarsa, $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$ olar. $x - y = (-1)(y - x)$ bərabərliyindən

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$$

olduğunu alırıq. Nəhayət,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq$$

$$\leq \|x-z\|+\|z-y\|=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

üçbucaq aksiomunun doğru olduğunu alırıq. Beləliklə, hər bir normalaşmış fəzanın eyni zamanda metrik fəza olduğunu alırıq.

$\rho(x,0)=\|x-0\|=\|x\|$ bərabərliyindən alırıq ki, hər bir elementin norması elementin sıfır elementdən olan məsafəsinə bərabərdir.

Qeyd edək ki, istənilən metrik fəzanın normalaşmış fəza olmasını hökm etmək doğru deyildir. Məsələn, yuxarıda baxdığımız bütün sonsuz ədədi ardıcıllıqlardan ibarət olan S fəzası normalaşmış fəza deyildir. Bu fəzada $\rho(x,\theta)$ kəmiyyətini x elementinin norması olaraq qəbul etmək mümkün deyildir. Çünki, bu halda normanın ikinci aksiomunun ödənmədiyini görürük.

Üçbucaq aksiomundan alınan aşağıdakı mühüm bərabərsizliyi də qeyd edək:

$$\|x-y\| \geq \big|\|x\|-\|y\|\big| \tag{1}$$

Doğrudan da

$$\|x\|=\|x-y+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|.$$

Buradan

$$\|x-y\| \geq \|x\|-\|y\|$$

alırıq.

Sonuncu bərabərsizlikdə x və y-in yerini dəyişsək, alarıq:

$$\|x-y\| \geq \|y\|-\|x\|$$

Bu bərabərsizliklərdən (1) bərabərsizliyinin doğrulunu alırıq.

Normalaşmış fəzalarda da ümumi metrik fəzalarda olduğu kimi açıq və qapalı kürələri təyin edə bilərik:

$S_r(x_0)=\{x\in X:\ \|x-x_0\|<r\}$ – açıq kürə,

$\bar{S}_r(x_0)=\{x\in X:\ \|x-x_0\|\leq r\}$ – qapalı kürə,

$\sigma_r(x_0)=\{x\in X:\ \|x-x_0\|=r\}$ isə sfera adlanır.

Aydınıdır ki, $\bar{S}_r(x_0)=S_r(x_0)\cup\sigma_r(x_0)$.

12.2. Normalaşmış fəzalara misallar

1. $R=(-\infty,\infty)$ həqiqi ədədlər çoxluğunu götürək.

Əgər istənilən $x\in R$ həqiqi ədədi üçün $\|x\|=|x|$ qəbul etsək, ədədin mütləq qiymətinin xassələrindən istifadə etməklə, norma aksiomlarının ödənməsini göstərə bilərik.

2. R^n **fəzası.** $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ elementinin normasını

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$$

kimi təyin edək. Normanın 1) və 2) aksiomlarının ödənməsini asanlıqla göstərə bilərik. 3) aksiomunun doğruluğu isə məlum

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{1/2}$$

bərabərsizliyindən alınır.

Qeyd edək ki, bu fəzada elementin normasını

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

və ya

$$\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$$

kimi də təyin etmək olar. Bu normaların da 1)-3) norma aksiomlarını ödənməsini göstərmək olar. Bu normalara görə təyin edilmiş normalaşmış fəzaları uyğun olaraq R_1^n və R_0^n kimi işarə edirlər.

Analoji üsulla n ölçülü kompleks C^n fəzasında elementin normasını

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

təyin etmək olar.

3. m **-fəzası.** Bütün məhdud ədədi ardıcıllıqlar fəzasında $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ elementin normasını

$$\|x\| = \sup_{n} |x_k|$$

kimi təyin edək. Norma aksiomlarının ödənməsini asanlıqla göstərmək mümkündür. Deməli, m -normalaşmış fəzadır.

4. $C[a,b]$ **fəzası.** $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar çoxluğunda elementin normasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$$

Göstərək ki, bu qayda ilə təyin edilmiş norma 1)-3) aksiomlarını ödəyir. Doğrudan da istənilən $f(t)$ funksiyası üçün $|f(t)| \ge 0$ olduğundan $\|f\| \ge 0$.

Əgər $\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)| = 0$ olarsa, $f(t) \equiv 0$ alarıq. $f(t) = 0$ olduqda $\|f\| = 0$ olması aydındır.

Mütləq qiymətin xassəsinə əsasən istənilən $f(t)$ və $g(t)$ funksiyaları üçün istənilən $t \in [a,b]$ üçün

$$|f(t)+g(t)|\le|f(t)|+|g(t)|$$

Buradan $|f(t)+g(t)|\le\max\limits_{a\le t\le b}|f(t)|+\max\limits_{a\le t\le b}|g(t)|$.

Kəsilməz funksiya özünün maksimum qiymətini aldığından alarıq:

$$\max_{a\le t\le b}|f(t)+g(t)|\le\max_{a\le t\le b}|f(t)|+\max_{a\le t\le b}|g(t)|$$

Buradan

$$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$$

Alınmış bu normalaşmış fəza $C[a,b]$ kimi işarə edilir.

Qeyd edək ki, bu fəzada $f(t)$ funksiyasının normasını

$$\|f\|=\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}$$

kimi də təyin etmək olar. Bu normanın da 1)-3) aksiomlarının ödənməsini göstərmək olar. Alınmış normalaşmış fəza $C_2[a,b]$ kimi işarə edilir.

5. $[a,b]$ parçasında özü və n tərtibdən törəmələri kəsilməz olan funksiyalar çoxluğunu götürək. Bu çoxluqda $f(t)$ elementinin normasını

$$\|f\|=\sum_{k=0}^{n}\max_{a\le t\le b}\left|f^{(k)}(t)\right|$$

kimi təyin edək. Göstərək ki, 1)-3) aksiomları ödənir. $\left|f^{(k)}(t)\right|\ge 0$, $k=0,1,...,n$ bərabərsizliyindən $\|f\|\ge 0$ olması alınır. $\|f\|=0$ olmasından $\max\limits_{a\le t\le b}\left|f^{(k)}(t)\right|=0$ və nəticədə $f(t)\equiv 0$ olduğunu alarıq. $f(t)=0$ olduqda $\|f\|=0$ olması aydındır.

$$\max_{a\le t\le b}\left|\lambda f^{(k)}(t)\right|=|\lambda|\max_{a\le t\le b}\left|f^{(k)}(t)\right|$$

bərabərliklərini $k=0,1,...,n$ olduqda tərəf-tərəfə toplasaq, 2) aksiomunun doğru olduğunu alarıq. Nəhayət,

$$\left|(f(t)+g(t))^k\right|\le\left|f^k(t)\right|+\left|g^k(t)\right|$$

bərabərsizliyindən

$$\max_{a\le t\le b}\left|(f(t)+g(t))^k\right|\le\max_{a\le t\le b}\left|f^k(t)\right|+\max_{a\le t\le b}\left|g^k(t)\right|$$

olduğunu və nəticədə

$$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$$

olduğunu alarıq. Alınmış bu normalaşmış fəza $C^{(n)}[a,b]$ kimi işarə edilir.

6. l_2 **fəzası.** Məlum olduğu kimi bu fəza $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ şəklində elə ardıcıllıqlarından ibarətdir ki, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty$. $x\in l_2$ olduqda istənilən λ ədədi üçün $\lambda x\in l_2$ olması $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda x_k)^2=\lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ -dan alınır.

$y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2<\infty$ vektorunu da götürək.

$$(x_k+y_k)^2\le 2\left(x_k^2+y_k^2\right)$$

bərabərsizliyindən alınır ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)^2\le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2+\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)$$

Buradan $(x+y)\in l_2$ olduğunu alırıq.

$x\in l_2$ elementinin normasını

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{1/2}$$

şəklində təyin edək. 1)-2) aksiomlarının ödənməsi aydındır. 3) aksiomunun doğruluğu isə

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{1/2}$$

bərabərsizliyindən alınır. Deməli, l_2 eyni zamanda normalaşmış fəzadır.

7. $L_2(a,b)$ **fəzası.** Bu fəza $[a,b]$ parçasında ölçülən və kvadratı ilə cəmlənən bütün həqiqi qiymətli funksiyalardan ibarətdir, yəni $f(t)\in L_2(a,b)$ üçün

$$\int_a^b f^2(t)dt<\infty.$$

Bütün ekvivalent funksiyalar bərabər hesab edilir. Qeyd edək ki, $[a,b]$ parçasında ölçülən məhdud və bütün kəsilməz funksiyalar bu fəzaya daxildirlər.

Bu fəzada $f(t)$ funksiyasının norması aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\|f\|=\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}$$

Təyin edilmiş norma 1)-3) aksiomlarını ödəyir. Doğrudan da istənilən $f(t)$ funksiyası üçün $\int\limits_a^b f^2(t)dt \geq 0$ olmasından $\|f\| \geq 0$ alınır. $\|f\| = 0$ isə, bu halda $f(t) \sim 0$ alırıq. Eləcə də $f(t) \sim 0$ olduqda $\|f\| = 0$.

2) aksiomunun ödənməsi aydınıdır.

3) aksiomunun ödənməsi isə

$$\left(\int\limits_a^b (f(t)+g(t))^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int\limits_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_a^b g^2(t)dt\right)^{1/2}$$

inteqral bərabərsizliyindən alınır. Deməli, $L_2(a,b)$ xətti normalaşmış fəzadır.

8. $L_p(a,b)$ $(p \geq 1)$ **fəzası.** $[a,b]$ parçasında ölçülən və p dərəcədən cəmlənən, yəni

$$\int\limits_a^b |f(t)|^p dt < \infty$$

şərtini ödəyən bütün həqiqi qiymətli funksiyalar çoxluğunu $L_p(a,b)$ kimi işarə edirlər. Bu çoxluqda elementin norması

$$\|f\| = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

kimi təyin edilir. Bu normanın 1), 2) aksiomlarını ödəməsi Lebeq inteqralının məlum xassələrindən alınır. 3) aksiomunun doğruluğu isə inteqral üçün Minkovski bərabərsizliyi adlanan

$$\left(\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

bərabərsizliyindən nəticə olaraq alınır.

Beləliklə, $L_p(a,b)$ fəzasının xətti normalaşmış fəza olduğunu alırıq. Bu fəzalar Lebeq fəzaları adlanır.

12.3. Normalaşmış fəzalarda ardıcıllığın limiti. Banax fəzaları

Tutaq ki, X hər hansı normalaşmış fəzadır. $\{x_n\} \in X$ ardıcıllığını götürək.

Tərif 1. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olarsa ki, $n > N(\varepsilon)$ olduqda $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ ödənilsin, bu halda x_n ardıcıllığı yığılan ardıcıllıq, x_0 isə bu ardıcıllığın limiti adlanır və $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ kimi işarə olunur. Bəzən x_n ardıcıllığının yığılan olduğunu və limitinin x_0 olduğunu $\|x_n - x_0\| \to 0$, $n \to \infty$ kimi də ifadə edirlər.

Tərifdən istifadə edərək istənilən yığılan ardıcıllığın məhdud olduğunu göstərmək olar.

Tərif 2. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi varsa ki, istənilən $n > N(\varepsilon)$ nömrəsi və istənilən m natural ədədi üçün $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$ şərti ödənsin, bu halda $\{x_n\}$ ardıcıllığı fundamental ardıcıllıq adlanır.

Aşağıdakı sadə teorem doğrudur.

Teorem 1. X normalaşmış fəzasında hər bir yığılan ardıcıllıq fundamentaldır.

İsbatı. Tutaq ki, x_n yığılan ardıcıllıqdır, yəni $n \to \infty$, $x_n \to x_0$. Onda tərifə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N(\varepsilon)$ üçün $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$. $n > N(\varepsilon)$ üçün $n + m > N(\varepsilon)$ olduğunudan $\|x_{n+m} - x_0\| < \varepsilon$ yaza bilərik. Üçbucaq aksiomuna görə alarıq:

$$\|x_{n+m} - x_n\| \le \|x_{n+m} - x_0\| + \|x_n - x_0\| < 2\varepsilon .$$

Deməli, x_n fundamentaldır. Teorem isbat edildi.

Sonralar görəcəyik ki, teoremin tərsi doğru olmaya da bilər. Ona görə də aşağıdakı tərif daxil edilir.

Tərif 3. Əgər X normalaşmış fəzasında istənilən fundamental ardıcıllıq yığılan olarsa, onda X tam fəza adlanır. Tam normalaşmış fəzalara Banax fəzası deyilir.

Banax fəzasına bəzi misallar göstərək:

1. $R = (-\infty, \infty)$ – həqiqi ədədlər çoxluğuna baxaq. $\{x_n\} \subset R$ fundamental ardıcıllığını götürək. Tərifə görə, istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $n > N(\varepsilon)$ və istənilən m üçün $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$.

Məlum Koşi meyarına görə $\{x_n\}$ həqiqi ədədlər ardıcıllığının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun fundamental olmasıdır. Ona görə də $\{x_n\}$ ardıcıllığının yığılan olduğunu alırıq. Yəni, R – tam, Banax fəzasıdır.

Qeyd: Q – bütün rasional ədədlər çoxluğunu götürək. Əgər $\sqrt{2}$ ədədinə yığılan əsgiyi ilə götürülmüş $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41...$ yaxınlaşmalar ardıcıllığını götürsək, bu ardıcıllığın fundamental olduğunu görərik. Amma bu ardıcıllığın limiti olan $\sqrt{2}$ ədədi rasional ədədlər çoxluğuna daxil deyildir, irrasional ədəddir. Ona görə də rasional ədədlər çoxluğu tam fəza təşkil etmir.

2. E^m fəzasına baxaq. $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\}$ fundamnetal ardıcllığını götürək. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, istənilən $k > N(\varepsilon)$ nömrəsi və istənilən m natural ədədi üçün

$$\left\| x^{(k+m)} - x^{(k)} \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k+m)} - x_i^{(k)} \right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

Buradan istənilən $i = 1,2,...,n$ üçün

$$\left(x_i^{(k+m)} - x_i^{(k)} \right)^2 < \varepsilon^2$$

və ya

$$\left| x_i^{(k+m)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$$

alırıq. Bu onu göstərir ki, $x^{(k)}$ ardıcıllığının koordinatlarından düzəlmiş bütün $\{x_i^{(k)}\}$ $i = 1,2,...,n$ ədədlər ardıcıllıqları fundamental ardıcıllıqlardır. Koşi meyarına görə bu ardıcıllıqlar yığılan ardıcıllıqlardır.

$\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}, \ i = 1,2,...,n$ işarə edək.

$x^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\}$ vektorunu götürək.

Əgər bütün $i = 1,2,...,n$-lər üçün $\left| x_i^{(k)} - x_i^{(0)} \right| < \dfrac{\varepsilon}{n}$ olduğunu nəzərə alsaq.

$$\left\| x^{(k)} - x^{(0)} \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i^{(0)} \right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

olduğunu alarıq. Bu isə onu göstərir ki, $x^{(0)}$ vektoru $\{x^{(k)}\}$ ardıcıllığının limitidir. $\{x^{(k)}\}$ yığılan olduğundan R^n fəzasının tam olduğunu alırıq.

3. $C[a,b]$ fəzası $\| f \| = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)|$ normasına nəzərən tam fəzadır. $\{f_n(t)\} \in C[a,b]$ fundamental ardıcıllığını götürək. Tərifə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, istənilən $n > N(\varepsilon)$ nömrəsi və istənilən m natural ədədi üçün $\| f_{n+m}(t) - f_n(t) \| < \varepsilon$, yəni

$$\max_{a \le t \le b} | f_{n+m}(t) - f_n(t) | < \varepsilon .$$

Buradan $\forall t \in [a,b]$ üçün $| f_{n+m}(t) - f_n(t) | \le \varepsilon$.

Koşi meyarına görə bu şərtin ödənilməsi $\{f_n(t)\}$ funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafidir. Deməli, baxılan fundamental ardıcıllıq müntəzəm yığılandır. Məlum teoremə görə müntəzəm yığılan kəsilməz funksiyalar ardıcllığının limiti olan $f_0(t)$ funksiyası da $[a,b]$

parçasında kəsilməzdir, yəni $f_0(t) \in C[a,b]$. Alırıq ki, $C[a,b]$ tam, Banax fəzasıdır.

12.4. Normalaşmış tam olmayan fəzalara misallar

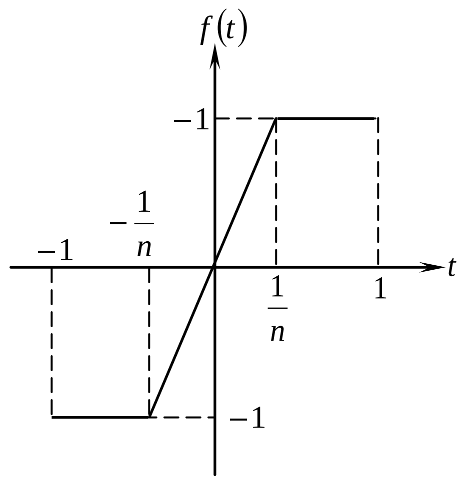
Yuxarıda qeyd etdik ki, kəsilməz funksiyalar çoxluğunda elementin normasını

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(t)dt \right)^{1/2}$$

kimi də təyin etmək olar. Bu normanın 1)-3) aksiomlarını ödəməsini qeyd etmişik. Bu normaya nəzrən alınmış normalaşmış fəzanı $C_2[a,b]$ ilə işarə edirlər.

Göstərək ki, bu fəza tam fəza deyildir. $a = -1,\ b = 1$ qəbul edək.

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t \le -\dfrac{1}{n} \\ nt, & -\dfrac{1}{n} \le t \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$



kəsilməz funksiyalar ardıcıllığını götürək. Qrafikdən göründüyü kimi istənilən n üçün $|f_n(t)| \le 1$ olduğundan $|f_{n+m}(t) - f_n(t)| \le 2$.

Onda alarıq:

$$\| f_{n+m} - f_n \|^2 = \int_{-1}^{1} |f_{n+m}(t) - f_n(t)|^2 dt =$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_{n+m}(t) - f_n(t)|^2 dt \le 4 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt \le \frac{8}{n} \to 0,\ n \to \infty$$

Buradan $\{f_n(t)\}$ ardıcıllığının fundamnetal olduğunu alırıq. İstənilən $t \in [-1,1]$ nöqtəsində $f_n(t)$ ardıcıllığının limiti vardır və

$$f_0(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1,0) \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t \in (0,1] \end{cases}$$

$|f_0(t)| \le 1$ və $|f_n(t) - f_0(t)| \le 2$ olduğundan yuxarıdakı qayda ilə alarıq:

$$\| f_n(t) - f_0(t) \|^2 \le \frac{8}{n} \to 0, \; n \to \infty$$

Alırıq ki, $\{f_n(t)\}$ardıcıllığı orta kvadratik mənada $t=0$ nöqtəsində kəsilməyə malik olan $f_0(t)$ funksiyasına yığılır. Göründüyü kimi $f_0(t) \overline{\in} C_2[a,b]$. Ümumiyyətlə, göstərmək olar ki, $\{f_n(t)\}$ ardıcıllığı orta kvadratik mənada heç bir kəsilməz funksiya yığıla bilməz.

Fərz edək ki, $\tilde{f}(t)$ istənilən kəsilməz funksiyadır. Onda yaza bilərik:

$$\left(\int_{-1}^{1} \left| \tilde{f}(t) - f_0(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \le \left(\int_{-1}^{1} \left| \tilde{f}(t) - f_n(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{-1}^{1} \left| f_n(t) - f_0(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \qquad (1)$$

Bu bərabərsizlikdə

$$\int_{-1}^{1} \left| \tilde{f}(t) - f_0(t) \right|^2 dt \to 0, \; n \to \infty$$

və $\tilde{f}(t) \ne f_0(t)$ olduğundan $\int_{-1}^{1} \left| \tilde{f}(t) - f_0(t) \right|^2 dt \ne 0$. Onda (1) bərabərsizliyindən alırıq ki, $\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \left| \tilde{f}(t) - f_n(t) \right|^2 dt \ne 0$. Yəni $\{f_n(t)\}$ ardıcıllığı $C_2[-1,1]$ fəzasının normasına nəzərən heç bir kəsilməz funksiyaya yığıla bilməz. Bu isə $C_2[-1,1]$ fəzasının tam olmadığını göstərir.

Qeyd. Əgər $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar çoxluğunda elementin normasını

$$\| f \| = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \ge 1$$

bərabərliyi ilə təyin etsək, 1)-3) norma aksiomlarının ödəndiyini yoxlamaq olar. Bu normaya nəzərən alınmış normalaşmış fəzaları $C_p[a,b]$ ilə işarə edək.

Yuxarıda baxdığımız üsulla bu fəzaların da tam olmadığını göstərmək olar.

Qeyd edək ki, hər bir xətti normalaşmış fəza metrik fəza olduğundan, metrik fəzalarda daxil edilmiş bütün anlayışlar (məsələn, kürə, məhdud çoxluq, separabellik və b.) normalaşmış fəzalarda da daxil edilə bilər. Eləcə də metrik fəzalarda isbat edilmiş bütün teoremlər xətti normalaşmış fəzalar üçün də doğrudur.

Tam metrik fəzalarda isbat edilmiş bütün teoremlər də Banax fəzaları üçün doğrudur.

Məsələn, göstərmək olar ki, xətti normalaşmış fəzalarda istənilən kürə (qapalı kürə) qabarıq çoxluqdur. Doğrudan da $x_1, x_2 \in S_r(x_0)$, $\|x_1 - x_0\| < r$, $\|x_2 - x_0\| < r$ götürək. Göstərək ki, bu nöqtələri birləşdirən $y = (1-t)x_2 + tx_2$, $0 < t < 1$ düz xətti də həmin kürə daxilində yerləşir. Alırıq:

$$\|y - x_0\| = \|(1-t)x_1 + tx_2 - x_0\| = \|(1-t)x_1 + tx_2 - (1-t)x_0 - tx_0\| \le$$

$$\le \|(1-t)(x_1 - x_0)\| + \|t(x_2 - x_0)\| =$$

$$= (1-t)\|x_1 - x_0\| + t\|x_2 - x_0\| \le (1-t)r + tr = r$$

Beləliklə, $\|y - x_0\| < r$ və $y \in S_r(x_0)$ olduğunu alırıq.

Xətti normalaşmış fəzalar ümumi xətti fəzaların xüsusi halı olduğundan xətti fəzalarda daxil edilmiş bütün anlayışlar, məsələn, elementlərin xətti asılılığı və xətti asılı olmaması, xətti çoxobrazlı, fəzanın xətti altfəzaların düz cəminə ayrılması və digər anlayışları da daxil etmək olar.

Tutaq ki, L xətti normalaşmış fəzada xətti çoxobrazlıdır. Əgər L eyni zamanda qapalı çoxluq olarsa, onda L altfəza adlanır. Əgər L xətti normalaşmış fəzada sonlu ölçülü xətti çoxobrazlı olarsa, bu halda $\overline{L} = L$. Sonsuz ölçülü xətti çoxobrazlılar üçün bu bərabərlik doğru olmaya da bilər.

Məsələn, $X = C[0,1]$ və L $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2, ..., x_n = t^n ...$ elementlərinin doğurduğu xətti çoxobrazlı olarsa, bu halda L bütün çoxhədlilər çoxluğu olar və $\overline{L} = C[0,1] \ne L$ olar.

Aşağıdakı mühüm teorem doğrudur:

Teorem (Riss). Tutaq ki, $L \subset X$ bütün X fəzası ilə üst-üstə düşməyən alt fəzadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $y \in X$, $\|y\| = 1$ elementi tapmaq olar ki, istənilən $x \in L$ üçün $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ şərti ödənilsin.

İsbatı. Tutaq ki, y_0 X-in L-ə daxil olmayan hər hansı elementdir. $d = \inf\limits_{x \in L} \|y_0 - x\|$ işarə edək. Aydındır ki, $d > 0$. Əks halda y_0 elementi L-ə daxil olan elementlərin limit nöqtəsi olar və L-ə daxil olardı. Bu isə şərtə görə mümkün deyildir.

Dəqiq aşağı sərhəddin tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə x_0 elementi vardır ki,

$$d \le \|y - x_0\| \le d + d \cdot x_0$$

$y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$ qəbul edək. $\|y\| = 1$.

$y \overline{\in} L$, əks halda $y_0 = \|y_0 - x\| y + x_0$ elementi L-ə daxil olardı. Bu isə mümkün deyil. Şərtə görə $y_0 \overline{\in} L$. İstənilən $x \in L$ götürsək, $z = x_0 + \|y_0 - x_0\| x$, $z \in L$ olar. Onda yaza bilərik:

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \left\| y_0 - \left(x_0 + \|y_0 - x_0\| x\right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - z\| > \frac{1}{d + d\varepsilon} \|y_0 - z\| \geq \frac{d}{d + \varepsilon d} =$$

$$= \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon$$

Teorem isbat olundu.

12.5. Normalaşmış fəzaların izomorfluğu

Fərz edək ki, X_1 və X_2 xətti normalaşmış fəzalardır.

Tərif. Əgər X_1 və X_2 fəzaları arasında qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı kəsilməz izomorf inikas yaratmaq mümkün olarsa, onda bu fəzalar izomorf fəzalar adlanır.

Teorem. n ölçülü bütün xətti normalaşmış fəzalar n ölçülü R^n Evklid fəzasına izomorfdur, yəni bütün n ölçülü xətti normalaşmış fəzalar bir-birinə izomorfdur.

İsbatı. Tutaq ki, $e_1, e_2, ..., e_n$ n ölçülü Evklid fəzasının bazis vektorlarıdır. Onda istənilən $x \in X$ elementini birqiymətli şəkildə

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_n e_n$$

şəklində ayırmaq olar. Hər bir $x \in X$ elementinə qarşı $\tilde{x} = (c_1, c_2, ..., c_n) \in R^n$ vektorunu qarşı qoyaq. Aydındır ki, bu qayda ilə düzəlmiş uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. Göstərək ki, bu uyğunluq qarşılıqlı kəsilməzdir. İstənilən $x \in X$ üçün yaza bilərik

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right)^{1/2} = \beta \|\tilde{x}\| \qquad (1)$$

Xüsusi halda

$$\|x - y\| \leq \beta \|\tilde{x} - \tilde{y}\|, \qquad (2)$$

Burada β ədədi x və y vektorlarından asılı deyildir.

Indi isə (2)-nin əksi olan bərabərsizliyin doğruluğunu göstərək. Bu məqsədlə R^n fəzasının $\sum_{i=1}^{n} C_i^2 = 1$ vahid radiuslu S kürəsi üzərində təyin olunmuş

$$f(\tilde{x}) = f(c_1, c_2, .., c_n) = \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|$$

funksiyasına baxaq. S üzərində bütün c_i əmsalları eyni zamanda sıfır olmadığı üçün $f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$.

$$|f(c_1, c_2, ..., c_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)| = \|x\| - \|y\| \le \|x - y\| \le \beta \|\tilde{x} - \tilde{y}\|$$

bərabərsizliyi $f(c_1, c_2, ..., c_n)$ funksiyasının kəsilməz olduğunu göstərir. Veyerştrass teoreminə görə bu funksiya S səthi üzərində minimum qiymətini alır. Aydındır ki, $\alpha > 0$. Onda istənilən $\tilde{x} \in S$ üçün $f(\tilde{x}) = \|x\| \ge \alpha$ olduğundan alırıq:

$$f(\tilde{x}) = \|x\| = \|\tilde{x}\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}} \right\| \ge \alpha \|\tilde{x}\|. \qquad (3)$$

(1) və (3) bərabərsizliklərindən X-in R^n-ə inikasının qarşılıqlı kəsilməz olduğunu alırıq.

12.6. Xətti normalaşmış fəzalarda kompakt çoxluqlar

Hər bir normalaşmış fəza metrik fəza olduğundan kompakt çoxluqlar üçün metrik fəzalarda alınmış nəticələr normalaşmış fəzalarda da doğrudur. Amma xətti normalaşmış fəzalar cəbri quruluşa, yəni xətti struktura malik olduğundan burada bəzi əlavə yeni nəticələr almaq mümkündür.

Tərifə görə X metrik fəzasında hər bir məhdud və qapalı çoxluq kompakt olarsa, onda X lokal kompakt fəza adlanır. Aşağıdakı çox mühüm teorem doğrudur.

Teorem. X normalaşmış fəzasının lokal kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt, bu fəzanın sonlu ölçülü olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, X fəzasında istənilən məhdud və qapalı çoxluq kompaktdır. $x \in X$, $\|x\| = 1$ elementini götürək. L_1 ilə x elementindən ibarət altfəzanı işarə edək. Əgər $L_1 = X$ olarsa, onda teorem isbat olunur. Əgər $L_1 \ne X$ olarsa, bu halda yuxarıda isbat edilmiş Riss teoreminə görə elə $x_2 \in X$ elementi tapmaq olar ki, $\|x_2\| = 1$ və $\|x_2 - x_1\| \ge \frac{1}{2}$.

L_2 ilə x_1 və x_2 elementlərinin əmələ gətirdiyi altfəzanı işarə edək. Yenə iki hal ola bilər. $L_2 = X$ olarsa, teorem isbat olunmuş olar. Əgər $L_2 \neq X$ olarsa, onda elə $x_3 \in X$ tapmaq olar ki, $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$, $\|x_3\| = 1$.

Prosesi bu qayda ilə davam etdirək. Bu zaman iki hal mümkündür: 1) Hər hansı n üçün alınmış $L_n = X$ və teorem isbat olunur. 2) Proses sonsuz davam edir və elə $\{x_n\}$ sonsuz ardıcıllığı alırıq ki, $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$, $m \neq n$ üçün.

İkinci hal mümkün deyildir. Çünki bu halda X fəzasında qapalı və məhdud $(\|x_n\| = 1)$, eyni zamanda kompakt olmayan çoxluğun, yəni $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $(m \neq n)$ şərtini ödəyən çoxluğun varlığını alırıq. Bu isə teoremin şərtinə ziddir.

Kafilik. Tutaq ki, $X -$ n ölçülü normalaşmış fəzadır. Onda X ilə n ölçülü R^n evklid fəzası arasında homomorfizm vardır. Bu halda qapalı və məhdud $M \subset X$ çoxluğu qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı-kəsilməz olaraq $\hat{M} \subset R^n$ qapalı və məhdud çoxluğuna inikas olunur. $\hat{M}$ çoxluğu R^n-də kompakt olduğu üçün, M çoxluğunun da X-da kompakt olduğunu alırıq. Teorem tam isbat edildi.

Teoremdən aşağıdakı mühüm nəticə alınır.

Nəticə. Vahid radiuslu kürə yalnız və yalnız o zaman kompakt olar ki, o sonlu ölçülü olsun.

Aşağıda bəzi konkret funksional fəzalarda çoxluğun kompakt olması üçün meyarlar göstərəcəyik. Bunun üçün bəzi anlayışlar daxil edək:

Tərif 1. Əgər elə C sabiti varsa ki, $M \subset C[0,1]$ çoxluğuna daxil olan istənilən $f(t)$ funksiyası üçün $|f(t)| \leq C$, $t \in [0,1]$ şərti ödənilsin, bu halda M çoxluğu müntəzəm məhdud çoxluq adlanır.

Tərif 2. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $\delta = \delta(\varepsilon)$ ədədi tapmaq olarsa ki, istənilən $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$ üçün və istənilən $f(t) \in M$ üçün $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ ödənilsin, bu halda $f(t)$ funksiyaları eyni dərəcədən kəsilməz adlanır.

Teorem (Arsel). $M \subset C[0,1]$ çoxluğunun nisbi kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt $f(t) \in M$ funksiyalar sinfinin müntəzəm məhdud və eyni dərəcədən kəsilməz olmasıdır.

Teorem (F.Riss). $K \subset L_p[0,1]$ funksiyalar çoxluğunun nisbi kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt $f(t) \in K$ funksiyalar sinfinin normaya görə müntəzəm məhdud və orta mənada eyni dərəcədən kəsilməz olmasıdır, yəni istənilən $f(t) \in K$ üçün

1) $\int\limits_0^1 |f(t)|^p dt < C^p$

2) $\int\limits_0^1 |f(t+h) - f(t)|^p dt < \varepsilon^p$, $0 < h < \delta(\varepsilon)$.

Tərif 3. Tutaq ki, X – xətti normalaşmış fəza, $M \subset X$ hər hansı çoxluqdur. $\varepsilon > 0$ ədədini götürək. Əgər istənilən $x \in M$ elementi üçün elə $\hat{x} \in M_\varepsilon$ elementi tapmaq olarsa ki, $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$ olsun, bu halda M_ε çoxluğuna M -in ε -şəbəkəsi deyilir.

F.Hausdorfa məxsus aşağıdakı mühüm teorem də vardır:

Teorem. M çoxluğunun X normalaşmış fəzasında kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon > 0$ üçün onun X fəzasında sonlu ε - şəbəkəsinin olmasıdır.

Bu teoremdən aşağıdakı mühüm nəticələr çıxır.

Nəticə 1. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ üçün M çoxluğu X -də kompakt ε - şəbəkəyə malik isə, onda M kompakt çoxluqdur.

Nəticə 2. Kompakt çoxluq məhduddur.

Nəticə 3. Hər bir kompakt çoxluq separabeldir.

12.7. Xətti normalaşmış fəzalara aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Göstərin ki, X normalaşmış fəzasında istənilən x, y elementləri üçün $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$ bərabərsizliyi doğrudur.

Həlli. Normanın 3-cü aksiomunu tətbiq etməklə alırıq:

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \le \|y\| + \|x - y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\| \qquad (1)$$

x və y -in yerini dəyişsək, $\|y\| - \|x\| \le \|y - x\|$

Buradan $-(\|x\| - \|y\|) \le \|x - y\|$ yaxud

$$-\|x - y\| \le \|x\| - \|y\| \qquad (2)$$

(1) və (2) bərabərsizliyindən $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$ alırıq.

2. $R = (-\infty, \infty)$ ədəd oxu üzərində normanı $\|x\| = |arctgx|$ kimi təyin etmək olarmı?

Həlli. Əgər normanı göstərilən qayda ilə təyin etmək mümkün olsaydı, normanın ikinci aksiomuna görə

$$|arctg\lambda x| = |\lambda| \cdot |arctgx|$$

olmalıdır. Burada $\lambda = \frac{1}{3}$, $x = \sqrt{3}$ qəbul etsək, $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}$ alarıq. Bərabərlik doğru olmadığı üçün normanı göstərilən qayda ilə təyin etmək olmaz.

3. Tutaq ki, $x_n, x, y_n, y \in X$. İsbat edin ki,

a) $x_n \to x$ olduqda x_n məhdud ardıcıllıqlar

b) $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$ isə, onda $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

v) $x_n \to x$ isə, onda $\|x_n\| \to \|x\|$.

q) $x_n \to x$ və $\|x_n - y_n\| \to 0$ isə, onda $y_n \to x$.

d) $x_n \to x$ isə, onda $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$.

e) $x_n \to x$, $y_n \to y$ isə, onda $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$.

4. R^2 fəzasında $x = (x_1, x_2)$ elementinin normasını $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ kimi təyin etmək olarmı? Norma bu qayda ilə təyin edilərsə, bu fəzada vahid kürə necə təsvir edilər?

5. Göstərin ki, R^n fəzasında norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, $0 < p < 1$, $n \geq 2$ kimi təyin edilə bilməz.

Həlli. Göstərək ki, normanın üçüncü aksiomu ödənmir. Doğrudan da, $x = \left(\frac{1}{2}, 0, ..., 0\right)$, $y = \left(0, \frac{1}{2}, ...,\right)$ vektorlarını götürək. Göründüyü kimi $x \neq y$, $\|x\|_p = \|y\|_p = \frac{1}{2}$ istənilən $0 < p < 1$ üçün və $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$. Digər tərəfdən

$$\|x + y\|_p = \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., 0\right) \right\|_p = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)^{1/p} = 2^{1/p - 1}.$$

$p \in (0,1)$ olduğundan $\frac{1}{p} - 1 > 0$ və $2^{\frac{1}{p} - 1} > 1$. Nəticədə $\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$ alırıq. Göründüyü kimi normanın üçüncü aksiomu ödənmir.

6. Verimiş çoxluqlarda göstərilən üsullarla norma təyin etmək olarmı?

a) $f(t) \in C[a,b]$ üçün $\|f\| = \max\limits_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |f(t)|$

b) $f(t) \in C^{(1)}[a,b]$ üçün $\|f\| = |f(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |f'(t)|$

v) $f(t)\in C^{(1)}[a,b]$ üçün $\|f\|=|f(b)-f(a)|+\max\limits_{t\in[a,b]}|f'(t)|$

Həlli. a) Yox. Çünki bu halda normanın birinci aksiomu ödənmir: Çünki, əgər $\|f\|=0$ olarsa, $\max\limits_{a\le t\le\frac{a+b}{2}}|f(t)|=0$, $f(t)=0$, $t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ üçün. Amma bütün $t\in[a,b]$ üçün $f(t)=0$ hökm etmək olmaz, ümumiyyətlə, $f(t)\neq 0$, $t\in[a,b]$.

b) Bəli. Birinci aksiomun ödənməsini yoxlayaq. Əgər istənilən $t\in[a,b]$ üçün $f(t)=0$ isə, onda $|f(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|f'(t)|=0$. əksinə, əgər $|f(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|f'(t)|=0$ isə, onda $|f(a)|=0$ və $f'(t)=0$. Buradan $f(a)=0$ və istənilən $t\in[a,b]$ üçün $f(t)=C$ ($C=const$). $f(a)=0$ olduğundan $C=0$ alırıq. Nəticədə $f(t)=0$, istənilən $t\in[a,b]$ üçün. Digər aksiomların da ödəndiyini asanlıqla göstərmək olar.

v) Yox. Çünki bu halda normanın birinci aksiomu ödənmir. Doğrudan da, əgər $|f(b)-f(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|f'(t)|=0$. Buradan $f(a)=f(b)$ və istənilən $t\in[a,b]$ üçün $f'(t)=0$. Buradan $t\in[a,b]$ üçün $f(t)=C$ ($C=const$). $t=a$ olduqda $C=f(a)$, nəticədə $f(t)=f(a)=f(b)$. Əgər $f(a)\neq 0$ olarsa, $f(t)\neq 0$ olar.

7. Göstərilən fəzalarda verilmiş normaların ekvivalent olub-olmadığını müəyyən edin.

a) $C[0,1]$ fəzasında $\|f\|_1=\max\limits_{0\le t\le 1}|f(t)|$ və $\|f\|_2=\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2}$.

b) $C^{(1)}[0,1]$ fəzasında $\|f\|_1=\max\limits_{0\le t\le 1}|f(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|f'(t)|$

və

$$\|f\|_2=\int_0^1|f(t)|dt+\max_{0\le t\le 1}|f'(t)|$$

Həlli. a) Qeyd edək ki, tərifə görə eyni xətti fəzada təyin edilmiş normalar o zaman ekvivalent adlanır ki, bu normalardan birinə görə yığılmadan digərinə görə də yığılma çıxsın və tərsinə. $f_n(t)=t^n$ ardıcıllığını götürək.

$$\|f_n\|_2=\left(\int_0^1 t^{2n}dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0,\ n\to\infty.$$

Amma bu ardıcıllıq $\|\cdot\|_1$ normasına görə yığılan deyildir. Çünki bu normaya görə yığılma müntəzəm yığılmadır və $f_n(t)=t^n$ ardıcıllığı nöqtəvi yığılma mənada

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ 1, & t=1\end{cases}$$

funksiyasına yığılır. Bu funksiya kəsilən funksiyadır və $C[0,1]$ fəzasına daxil deyildir. Deməli $\|f\|_1$ və $\|f\|_2$ normaları ekvivalent deyildir.

b) Bu normalar ekvivalentdirlər. Doğrudan da

$$\|f\|_2=\int_0^1|f(t)|dt+\max_{a\le t\le b}|f'(t)|\le\int_0^1\max|f(t)|dt+\max|f'(t)|=\|f\|_1$$

Bu normaların ekvivalentliyini göstərmək üçün $C^{(1)}[0,1]$ fəzasının hər iki normaya nəzərən tam olduğunu göstərmək lazımdır.

8. Tutaq ki,

$$L=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E:\sum_{k=1}^{\infty}x_k=0,\ x_k\in R\right\}.$$

Aşağıdakı hallarda L çoxluğunun E fəzasında altfəza təşkil edib-etmədiyni yoxlayın.

a) $E=l_1$, b) $E=l_p$.

Həlli. a) Məlum olduğu kimi l_1 fəzası elə $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ vektorlarından ibarətdir ki, $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$ şərti ödənilsin.

Aydındır ki, $L\subset l_1$ xətti çoxobrazlıdır. Doğrudan da $x,y\in L$ olduqda $\sum_{k=1}^{\infty}x_k=0$ və $\sum_{k=1}^{\infty}y_k=0$ şərtlərindən $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)=0$ olması alınır, bu isə $x+y\in L$ olması deməkdir. İndi isə $x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_k^{(n)},...\right)\in L$ ardıcıllığı götürək. Fərz edək ki, $x^{(n)}\to x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_k^{(0)},...\right)$. Onda istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə n_0 nömrəsi vardır ki, $n>n_0$ olduqda

$$\left\|x^{(n)}-x^{(0)}\right\|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}-x_k^{(0)}\right|<\varepsilon .$$

Buradan alarıq:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k^{(0)}\right|\le\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}-x_k^{(0)}\right)\right|+\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)\right|<\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ istənilən kiçik ədəd olduğundan $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(0)}\right)\right| = 0$ alırıq. Buradan isə $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(0)}\right) = 0$ və $x^{(0)} \in L$. Bu isə L-in l_1 fəzasında altfəza olması deməkdir.

b) Qeyd edək ki, l_p fəzası elə $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$ ardıcıllıqlarından ibarətdir ki,

$$p > 1 \text{ üçün } \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$$

olsun. L-in l_p-də xətti çoxobrazlı olması aydındır. Göstərək ki, L altfəza deyildir. Bu məqsədlə

$$x^{(n)} = \left(\underbrace{1, -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, ..., -\frac{1}{n}}_{n}, 0, ..., 0, ...\right) \in L$$

və $x^{(0)} = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ götürək.

$$\left\|x^{(n)} - x^{(0)}\right\| = \left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{n^p}\right)^{1/p} = \left(\frac{n}{n^p}\right)^{1/p} = \frac{1}{n^{1-1/p}} \to 0,\ n \to \infty$$

$x^{(n)} \to x^{(0)}$, amma $x^{(0)} = (1, 0, 0, ..., 0, ...) \overline{\in} L$ olduğu üçün L qapalı deyildir, yəni altfəza təşkil etmir.

9. $C^{\alpha}[a,b]$-ilə $[a,b]$ parçasında $\alpha \in (0,1]$ tərtibdən Holder şərtini ödəyən bütün funksiyalar çoxluğunu işarə edək:

$$H_{\alpha}(f) = \sup_{\substack{a \le t, \tau \le b \\ t \ne \tau}} \frac{|f(t) - f(\tau)|}{|t - \tau|^{\alpha}} < +\infty$$

Göstərin ki, bu çoxluqda normanı

$$\|f\|_{\alpha} = \max_{a \le t \le b}|f(t)| + H_{\alpha}(f)$$

bərabərliyi ilə təyin etmək olar.

10. Göstərin ki,

$$M = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2,\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 \le 1\right\}$$

çoxluğu l_2 fəzasında qabarıq çoxluq təşkil edir.

Həlli. $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$, $x, y \in M$ götürək.
$z = tx + (1-t)y = (tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2, ..., tx_n + (1-t)y_n, ...)$ $t \in [0,1]$ şəklində elementlər düzəldək və göstərək ki, $z \in M$.

İxtiyari m natural ədədi üçün yaza bilərik:

$$\sum_{n=1}^{n} n^2\left[tx_n(1-t)y_n\right]^2 = t^2\sum_{n=1}^{m} n^2x_n^2 + 2t(1-t)\sum_{n=1}^{m} n^2x_ny_n +$$

$$+(1-t)^2\sum_{n=1}^{m} n^2y_n^2$$

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə etsək, alarıq:

$$\sum_{n=1}^{m} n^2x_ny_n = \sum_{n=1}^{m}|nx_n\|ny_n| \le \left(\sum_{n=1}^{m} n^2x_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{m} n^2y_n^2\right)^{1/2}$$

Ona görə də

$$\sum_{n=1}^{m} n^2\left[tx_n + (1-t)y_n\right]^2 \le t^2\sum_{n=1}^{m} n^2x_n^2 + (1-t)^2\sum_{n=1}^{m} n^2y_n^2 +$$

$$+2t(1-t)\left(\sum_{n=1}^{m} n^2x_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{m} n^2y_n^2\right)^{1/2}.$$

Şərtə görə $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x_n^2 \le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2y_n^2 \le 1$ olduğundan yuxarıdakı bərabərsizlikdə $m \to \infty$ şərhində limitə keçsək, alarıq:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[tx_n + (1-t)y_n\right]^2 \le t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1$$

Bu isə $z = (tx + (1-t)y) \in M$ olması deməkdir, yəni M -qabarıq çoxluqdur.

11. $a \ge 0$, $b \ge 0$, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduqda $ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ bərabərsizliyini isbat edin.

İsbatı. Bu məqsədlə $[0,+\infty)$ intervalında

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} - t + \frac{1}{q}$$

köməkçi funksiyasını götürək və onun ekstremumunu araşdıraq. $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1$, $\varphi'(t) = 0$ olduğundan alırıq ki, $t = 1$ stasionar nöqtədir. Yoxlaya bilərik ki, $t = 1$ funksiyanın minimum nöqtəsidir. Ona görə də istənilən $t \in [0,\infty)$ üçün $\varphi(t) > \varphi(1)$. $\varphi(1) = 0$ olduğu üçün $\varphi(t) > 0$ və $\frac{1}{p}t^p - t + \frac{1}{q} > 0$ yaxud $t < \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q}$ alarıq. Burada $t = ab^{\frac{1}{1-p}}$ qəbul etsək

$$ab^{\frac{1}{1-p}} \le \frac{1}{p}a^p b^{\frac{p}{1-p}} + \frac{1}{q}$$

Sonuncu bərabərsizliyin hər tərəfini $b^{\frac{1}{1-p}-1}$ -ə bölsək,

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

alarıq. Bu bərabərsizlik Yunq bərabərsizliyi adlanır.

12. İstənilən $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ ədədlər ardıcıllıqları və $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ həqiqi ədədlər üçün $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q < \infty$ şərtləri ödənildikdə Holder bərabərsizliyi adlanan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/q}$$

bərabərsizliyin doğru olduğunu isbat edin.

İsbatı. Əgər yuxarıda isbat edilmiş Yunq bərabərsizliyində

$$a = \frac{|x_k|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{|y_k|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{1/q}}$$

qəbul etsək, alarıq:

$$\frac{|x_k||y_k|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q}$$

Alınmış bu bərabərsizliyi k indeksinə görə cəmləsək, nəticədə alarıq:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

yaxud

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

13. İstənilən $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ ədədlər ardıcıllığı üçün $p > 1$ olduqda $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$ şərtləri ödənərsə, Minkovski bərabərsizliyi adlanan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu isbat edin.

İsbatı. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şərtini ödəyən $q>1$ ədədini götürək və aşağıdakı bərabərsizliyi yazaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \le \sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k|$$

Yuxarıda isbat etdiyimiz Holder bərabərsizliyini sağ tərəfdəki cəmlərə tətbiq etsək, alarıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{\frac{p-1}{q}}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p} =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

Analoji olaraq

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{1/q}\right]$$

Əgər $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ olduğunu nəzərə alaraq, sonuncu bərabərsizliyi $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}$ -yə bölsək, alarıq:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

14. Əgər $f(t)$ və $g(t)$ $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ədədləri üçün $\int_a^b |f(t)|^p dt<\infty$, $\int_a^b |g(t)|^q dt<\infty$ şərtlərini ödəyən funksiyalar olduqda

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

bərabərsizliyini isbat edin. Bu bərabərsizlik inteqral üçün Hölder bərabərsizliyi adlanır.

İsbatı. Yuxarıda isbat edilmiş Yunq bərabərsizliyində

$$a=\frac{|f(t)|}{\left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}}, \quad b=\frac{|g(t)|}{\left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}}$$

qəbul etsək, alarıq:

$$\frac{|f(t)||g(t)|}{\left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}} \le$$

$$\le \frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{\left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}}+\frac{|g(t)|^p}{\left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}}$$

Bu bərabərsizliyi $[a,b]$ parçası üzrə inteqrallasaq

$$\frac{\int\limits_a^b |f(t)||g(t)|dt}{\left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

yaxud

$$\int\limits_a^b |f(t)||g(t)|dt \le \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

alarıq.

15. $[a,b]$ parçasında təyin edimiş, $\int\limits_a^b |f(t)|^p dt < 0$, $\int\limits_a^b |g(t)|^p dt < \infty$ $(p>1)$ şərtlərini ödəyən istənilən funksiyalar üçün Minkovski bərabərsizliyi adlanan

$$\left(\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

bərabərsizliyin doğru olduğunu isbat edin.

İsbatı. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şərtini ödəyən $q>1$ ədədini götürək və aşağıdakı bərabərsizliyini yazaq:

$$\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \le \int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)+g(t)|dt \le$$

$$+\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|dt+\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|dt$$

Sağ tərəfdəki toplananlardan hər birinə Hölder bərabərsizliyini tətbiq etsək, alarıq:

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|dt \le \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|dt \le \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

$(p-1)q=p$ olduğu üçün sonuncu bərabərsizlikləri nəzərə alsaq, nəticədə yaza bilərik:

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \le \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q} \times$$

$$\times\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

Bu bərabərsizliyin hər tərəfini $\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q}$ - ifadəsinə bölsək

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

yaxud

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

alarıq.

16. $f(t)=t^{\alpha}$ funksiyası α-nın hansı qiymətlərində $L_p(0,1)$, $1\le p<\infty$ fəzasına daxildir. Həmin fəzalarda funksiyanın normasını hesablayın.

17. $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş bütün məhdud funksiyalardan ibarət $M[a,b]$ çoxluğunun

$$\|f\|=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

normasına nəzərən normalaşmış fəza olduğunu göstərin.

18. $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ yığılan ardıcıllıqlardan ibarət C çoxluğunun $\|x\|=\sup\limits_k|x_k|$ normasına nəzərən normalaşmış fəza olduğunu göstərin.

19. Əgər $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş $f(t)$ funksiyası üçün elə C ədədi varsa ki, $[a,b]$ parçasının istənilən $a=t_0,t_1<...<t_n=b$ bölgüsü üçün $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(t_k)-f(t_{k-1})|<\varepsilon$ şərti ödənilsin, bu halda $f(t)$ funksiyasına məhdud variasiyalı funksiya deyilir.

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}} f(t)=\sup\sum_{k=1}^{n}|f(t_k)-f(t_{k-1})|$$

kəmiyyətinə $f(t)$ funksiyasının tam variasiyası deyilir. Burada dəqiq yuxarı sərhəd $[a,b]$ parçasının bütün mümkün olan sonlu bölgüləri üzrə götürülür.

Göstərin ki, $[a,b]$ parçasında bütün məhdud variasiyalı funksiyalar çoxluğu

$$\|f\|=|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{\vee}} f(t)$$

normasına nəzərən normalaşmış fəza təşkil edir.

20. C_0 ilə sıfra yığılan bütün həqiqi ədədlər ardıcıllıqları çoxluğunu işarə edək. Bu çoxluq da normanı $\|x\|=\max\limits_k|x_k|$ bərabərliyi ilə təyin etmək olarmı?

21. Elə $x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_k^{(n)},...\right)$, $x_k\in R$ ardıcıllıqları göstərin ki, göstərilən fəzalar cütünə daxil olsun və

a) m fəzasında yığılsın, amma l_1-də yığılmasın;

b) m fəzasında yığılsın, amma l_2-də yığılmasın;

v) l_2 fəzasında yığılsın, amma l_1-də yığılmasın;

q) C_0 fəzasında yığılsın, amma l_1-də yığılmasın;

d) C_0 fəzasında yığılsın, amma l_2-də yığılmasın.

22. Aşağıda göstərilən ardıcıllıqlar $C[0,1]$ fəzasında yığılandırmı?

a) $f_n(t)=t^n-t^{n+1}$ b) $f_n(t)=t^n-t^{2n}$

23. $f_n(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}-\dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ ardıcıllığı

a) $C[0,1]$ b) $C^1[0,1]$ fəzalarında yığılandırmı?

24. Göstərin ki, $p\geq 1$ bütün qiymətlərində l_p-nin hər bir elementi C_0 fəzasının elementidir, amma

$x=\left(1,\frac{1}{\ln 2},\frac{1}{\ln 3},\ldots,\frac{1}{\ln n},\ldots\right)\in C_0$ ardıcıllığı $p\geq 1$ heç bir qiymətində l_p -yə daxil deyildir.

25. $a_n\in R$ $(a_n>0)$ ardıcıllığı hansı şərtləri ödədikdə aşağıdakı çoxluqlar məhdud olar?

a) $\{x\in l_2,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots):\ |x_n|<a_n\}$ paralellepipedi

b) $\left\{x\in l_2,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots):\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{a_n^2}<1\right\}$ ellipsoidi

26. Göstərin ki, $\{x\in l_2,\ x=(x_1,x_2,\ldots):\ |x_n|<a_n\}$ paralellepipedi qapalı çoxluqdur.

27. $a_n\in R$ $(a_n>0)$ ardıcıllığı hansı şərti ödəməlidir ki, $\{x\in l_2,\ x=(x_1,x_2,\ldots):\ |x_n|<a_n\}$ paralellepipedi açıq çoxluq olsun.

28. İsbat edin ki, $\{x\in l_2,\ x=(x_1,x_2,\ldots):\ |x_n|<2^{-n+1}\}$ paralellepipedi l_2 fəzasında qapalı çoxluq təşkil edir.

29. $C[0,1]$ fəzasında aşağıdakı çoxluqlar qapalıdırmı?

a) $\int_0^1|f(t)|dt\leq 1$ şərtini ödəyən kəsilməz funksiyalar

b) $\int_0^1|f(t)|^2dt\leq 1$ şərtini ödəyən kəsilməz funksiyalar

v) $\max_{t\in[a,b]}|f(t)|+\max_{t\in[a,b]}|f'(t)|\leq 1$ şərtini ödəyən kəsilməz diferensiallanan funksiyalar.

30. $C[-1,1]$ fəzasında aşağıda göstərilən funksiyalar çoxluğundan hansıların altfəza təşkil etdiyini müəyyən edin.

a) monoton funksiyalar;
b) cüt funksiyalar;
v) çoxhədlilər;
q) dərəcəsi k -nı aşmayan çoxhədlilər
d) kəsilməz diferensiallanan funksiyalar
e) kəsilməz hissə-hissə xətti funksiyalar
j) məhdud variasiyalı kəsilməz funksiyalar
z) $f(0)=0$ şərtini ödəyən funksiyalar
i) $\int_{-1}^{1}f(t)dt=0$ şərtini ödəyən funksiyalar
k) müəyyən sabitlə Lipşits şərtini ödəyən funksiyalar

31. İsbat edin ki, C_0 fəzası C fəzasının, C fəzası isə m fəzasının alt fəzasıdır.

32. Tutaq ki, $x_n \in X$ - fundamental ardıcıllıqdır və x_{n_k} altardıcıllığı yığılandır. İsbat edin ki, x_n ardıcıllığı yığılandır.

33. Tutaq ki, $x_n \in X$ və $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ yığılan sıradır. İsbat edin ki, x_n fundamental ardıcıllıqdır.

34. Tutaq ki, $x_n, y_n \in X$ – fundamental ardıcıllıqlardır. İsbat edin ki, $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ yığılan ardıcıllıqdır.

XIII FƏSİL
HİLBERT FƏZALARI

13.1. Skalyar hasil və onun xassələri

Məlum olduğu kimi hər bir xətti fəzada müəyyən aksiomlar sistemini ödəyən elementlərin cəmi və elementin ədədə (həqiqi və ya kompleks) hasili cəbri əməlləri təyin edilmişdir. Amma bəzi hallarda verilmiş xətti fəzada bu əməllərdən fərqli olan başqa bir əməl, skalyar hasil adlanan əməl də təyin etmək mümkün olur ki, elementin normasını, elementlər arasındakı məsafəni və məsafə ilə bağlı digər anlayışları da onun vasitəsilə vermək mümkün olur. Ona görə də skalyar hasilin tərifini verək və bəzi xassələrini göstərək.

Tərif. X həqiqi xətti fəzasında istənilən $x, y \in X$ elementlər cütünə qarşı bu elementlərin skalyar hasili adlanan və (x, y) kimi işarə edilən həqiqi ədədini qarşı qoyaq, belə ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ halı yalnız $x = 0$ olduqda ödənilir,

2) $(x, y) = (y, x)$

3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$

4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

Əgər X kompleks xətti fəza olarsa, bu halda 2) şərti $(x, y) = \overline{(y, x)}$ kimi olur. Bu şərtdən nəticə olaraq $(x, \mu y) = \overline{\mu}(x, y)$ olduğunu alırıq.

1)-4) şərtləri skalyar hasilin aksiomları adlanır. Əgər verilmiş xətti fəzada 1)-4) şərtlərini ödəyən skalyar hasil təyin edilmişsə, onda ona evklid fəzası deyilir. $X-$ evklid fəzası olduqda bu fəzada elementin norması $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ kimi təyin edilir. Skalyar hasilin 1)-4) xassələrindən istifadə etməklə norma aksiomlarının ödənməsini göstərə bilərik. Doğrudan da normanın 1),2)-ci aksiomlarının ödənməsi aydındır, 3)-cü üçbucaq aksiomunun doğruluğu isə Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi adlanan

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

bərabərsizliyindən alınır.

Bu bərabərsizliyi isbat etmək üçün λ dəyişənindən asılı olan

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) =$$
$$= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda (x, y) + \|y\|^2$$

kvadrat üçhədlisinə baxaq. Göründüyü kimi, $\lambda -$nın bütün qiymətlərində $\varphi(\lambda) \geq 0$. Bu halda kvadrat üçhədlinin diskriminantı mənfi olmalıdır, yəni

$$D = (x, y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 .$$

Buradan

$$(x,y)^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2$$

yaxud

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$$

olduğunu alırıq.

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə etməklə, normanın 3)-cü aksiomunu asanlıqla alarıq:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$$

$$= \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$$

Buradan

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

alırıq.

Asanlıqla göstərmək mümkündür ki, evklid fəzasında cəm, ədədə vurma və skalyar hasil kəsilməzdir, yəni $x_n \to x$, $y_n \to y$ (normaya nəzərən) və $\lambda_n \to \lambda$ olduqda

$$x_n + y_n \to x + y$$

$$\lambda_n x_n \to \lambda x$$

$$(x_n, y_n) \to (x, y)$$

13.2. Hilbert fəzası

Tutaq ki, X hər hansı elementlərdən ibarət çoxluqdur, belə ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir.

I. X – həqiqi və ya kompleks xətti fəzadır.

II. X – çoxluğunun istənilən x, y elementlər cütü üçün bu elementlərin skalyar hasili adlanan (x,y) kəmiyyəti təyin edilmişdir və bu kəmiyyət yuxarıda göstərilən 1)-4) aksiomlarını ödəyir.

III. X – çoxluğu $\rho(x,y) = \|x-y\|$ məsafəsinə görə tam fəzadır.

Əgər X çoxluğunda I, II, III şərtləri ödənilərsə, ona unitar fəza deyilir. Aydındır ki, n ölçülü unitar fəzalar həqiqi və ya kompleks Evklid fəzalarıdır.

Fərz edək ki, X fəzasında aşağıdakı şərt də ödənilir.

IV. X – sonsuz ölçülüdür, yəni istənilən n natural ədədi üçün bu fəzada n sayda xətti asılı olmayan elementlər vardır.

Əgər verilmiş X çoxluğu, I-IV şərtlərini ödəyərsə, onda X -ə Hilbert fəzası deyilir. Adətən, Hilbert fəzalarını H ilə işarə edirlər.

Misallara baxaq:

1. l_2 **-fəzası.** İstənilən $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ elementlərinin skalyar hasilini

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k \tag{1}$$

bərabərliyi ilə təyin edək. $x,y\in l_2$ olduğu üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}y_k^2<\infty.$$

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{1/2}$$

münasibətindən (1) sırasının da yığılan olmasını alarıq. Ona görə də skalyar hasili (1) bərabərliyi vasitəsilə təyin etmək olar. Skalyar hasilin aksiomlarının ödənməsini göstərək.

1) $(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\ge 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2=0$ olarsa, $x_k=0$, $i=1,2,...$ $x=0$ alarıq.

2) $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k=\sum_{k=1}^{\infty}y_k x_k=(y,x)$

3) $(\lambda x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda x_k)y_k=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k=\lambda(x,y)$

4) $(x+y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)z_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k z_k+$

$+\sum_{k=1}^{\infty}y_k z_k=(x,z)+(y,z)$

Yuxarıda bu fəzanın $\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ məsafəsinə nəzərən tam fəza olmasını və sonsuz ölçülü olduğunu göstərmişik. Alırıq ki, l_2-Hilbert fəzasıdır.

2. $L_2[a,b]$ **fəzası.** $[a,b]$ parçasında ölçülən və kvadratı ilə cəmlənən, yəni $\int_a^b f^2(t)dt<\infty$ şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğunu götürək. $f(x),g(t)\in L_2[a,b]$ funksiyalarının skalyar hasilini

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt \tag{2}$$

bərabərliyi ilə təyin edək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə $f(t), g(t) \in L_2(a,b)$ üçün (2) inteqralının sonlu oluduğunu alırıq. Bu qayda ilə təyin edilmiş skalyar hasil 1)-4) aksiomlarını ödəyir. Eləcə də, isbat edilmişsir ki, $L_2[a,b]$ fəzası

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

məsafəsinə nəzərən tam fəzadır (bu faktın isbatını [] kitabından oxumaq olar).

13.3. Hilbert fəzasında elementlər arasındakı bucaq. Ortonormal vektorlar sistemi

$H-$ hilbert fəzasında skalyar hasilin olması bu fəzada elementlər arasında bucaq anlayışını daxil etməyə imkan verir. Doğrudan da, Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən alınır ki, istənilən sıfırdan fərqli $x, y \in H$ elementləri üçün

$$-1 \le \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1$$

doğrudur. Onda elə $0 \le \varphi \le \pi$ bucağı vardır ki,

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Əgər $(x,y) = 0$ olarsa, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Bu halda x və y ortoqonal elementlər adlanırlar. Əgər $\{x_n\} \in H$ elementləri $(x_i, x_j) = 0$, $i \ne j$ şərtini ödəyərsə, onda $\{x_n\}$ ortoqonal elementlər sistemi adlanır. Əgər $\{x_n\}$ ortoqonal elementlər sistemi isə, onda o xətti asılı olmayan sistemidir. Doğrudan da, bu halda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

bərabərliyini ardıcıl olaraq $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarına vursaq və sistemin ortoqonallığını nəzərə alsaq

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

olduğunu alarıq.

Əgər $\{x_n\}$ ortoqonal sistemi tam isə, yəni, bu sistemi öz daxilində saxlayan ən kiçik qapalı altfəza bütün H fəzası ilə üst-üstə düşərsə, onda bu sistemə **ortoqonal bazis** deyilir.

$\{x_n\}$ sisteminin tamlığına aşağıdakı şəkildə də tərif vermək olar.

Tərif 1. Əgər $\{x_n\}$ ortonormal sisteminin mümkün olan bütün xətti kombinasiyaları çoxluğu bütün H fəzasında hər yerdə sıx olarsa, onda ona tam sistem deyilir.

Sistemin tamlığı o deməkdir ki, bu sistemi yeni elementlər əlavə etməklə daha geniş ortonormal sistemə tamamlamaq olmaz. Bu halda istənilən n üçün $\|x_n\|=1$ olarsa, onda $\{x_n\}$ sistemi **ortonormal bazis** adlanır.

Aydındır ki, $\{x_n\}$ ixtiyari ortoqonal sistem isə, bu zaman $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ – ortonormal sistem olar.

Tərif 2. Əgər H fəzasında hesabi, hər yerdə sıx çoxluq varsa, onda H-a **separabel fəza** deyilir.

Məsələn,

1) $R=(-\infty,\infty,)$ həqiqi ədədlər çoxluğunda bütün rasional ədədlər çoxluğu hesabidir və hər yerdə sıxdır. Ona görə də R separabel fəzadır.

2) R^n fəzasında rasional koordinatlı $(r_1,r_2,...,r_n)$ şəklində bütün vektorlar çoxluğu hesabidir və R^n-də hər yerdə sıxdır. Deməli, R^n separabel fəzadır.

3) Rasional əmsallı bütün çoxhədlilər çoxluğu hesabidir və $C[a,b]$ kəsilməz funksiyalar çoxluğunda hər yerdə sıxdır. Bu isə $C[a,b]$ fəzasının separabel olması deməkdir.

Qeyd edək ki, bilavasitə tərifindən alınır ki, verilmiş fəzada hesabi $\{e_i\}$ bazisi varsa, onda həmin fəza separabel fəzadır.

İndi isə ortoqonal bazisə malik bəzi fəzaları göstərək:

1. R^n– n ölçülü evklid fəzasına baxaq. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ və $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ elementlərinin skalyar hasilini

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k \tag{1}$$

kimi təyin edək.

$$\begin{aligned} e_1 &=(1,0,0,...,0), \\ e_2 &=(0,1,0,...,0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &=(0,0,0,...,1). \end{aligned}$$

vektorları bu fəzanın ortonormal bazisini təşkil edir. İstənilən $x\in R^n$ vektorunu yeganə üsulla $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$ şəklində ayırmaq olar.

2. l_2 fəzasını götürək. Məlum olduğu kimi bu fəza $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ şəklində $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ şərtini ödəyən vektorlardan ibarətdir. $x,y \in l_2$ elementlərinin skalyar hasilini

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \tag{2}$$

kimi təyin edək. (2)-nin sağ tərəfindəki sıranın yığılması Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən alınır

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,...,0,...), \\ e_2 &= (0,1,0,...,0,...), \\ e_3 &= (0,0,1,...,0,...), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3}$$

vektorları bu fəzada ortonormal bazis təşkil edir. Doğrudan da, bu sistemin ortoqonal və normal olmasını bilavasitə tərifdən almaq olar. Bu sistemin tam olduğunu göstərək.

Tutaq ki, $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in l_2$ istənilən vektordur. $x^{(n)}=(x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$ qəbul edək.

Göründüyü kimi $x^{(n)}$ vektorları $e_1,e_2,...,e_n$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdır, yəni

$$x^{(n)}=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$$

və

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \to 0,\ n\to\infty$$

olduqda.

Bu isə $\{e_i\}$ sisteminin tam olduğunu göstərir.

Deməli, $\{e_i\}$ ortonormal bazisdir.

3. $C_2[a,b]$ fəzasına baxaq. $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan funksiyalar çoxluğunda skalyar hasili

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dx$$

bərabərliyi ilə təyin edək. Skalyar hasil aksiomlarının ödənməsini asanlıqla yoxlaya bilərik. Bu skalyar hasil vasitəsilə təyin edilən norma

$$\|f\|=\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2},$$

elementlər arasında məsafə isə

$$\rho(f,g)=\left(\int_a^b f(t)-g(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

kimidir. Yuxarıda göstərilmişdir ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar çoxluğu bu məsafəyə nəzərən tam olmayan fəza təşkil edir. Yəni, $C_2[a,b]$ tam olmayan fəzadır.

Bu fəzada müxtəlif ortoqonal sistemlər göstərmək mümkündür. Bunlardan ən mühümü

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{2\pi nt}{b-a},\ \sin\frac{2\pi nt}{b-a}\quad (n=1,2,...), \tag{4}$$

triqonometrik sistemidir.

Bu sistemin ortoqonallığını asanlıqla yoxlamaq olar. Əgər xüsusi halda bu funksiyalar sisteminə $[-\pi,\pi]$ parçasında baxılarsa, uyğun triqonometrik sistem

$$\frac{1}{2},\ \cos nt,\ \sin nt\quad (n=1,2,...)$$

Göstərək ki, (4) triqonometrik sistemi tamdır. Doğrudan da, Veyerştrass teoreminə görə $[a,b]$ parçasında kəsilməz və parçanın uclarında bərabər $f(a)=f(b)$ qiymətlər alan $\varphi(t)$ funksiyasını müntəzəm yığılan triqonometrik çoxhədlilər ardıcıllığının, yəni (4) sisteminin elementlərinin xətti kombinasiyalarının limiti şəklində göstərmək olar. Aydındır ki, həmin ardıcıllıq $C_2[a,b]$fəzasının normasına görə də $\varphi(t)$ funksiyasına yığılan olar. Yəni $C_2[a,b]$ fəzasının hər bir elementini bu fəzanın normasının doğurduğu məsafəyə nəzərən (4) sisteminin elementlərinin xətti kombinasiyaları vasitəsilə istənilən dəqiqliklə yaxınlaşdırmaq olar. Bu isə həmin sistemin tamlığını göstərir.

13.4. Bessel bərabərsizliyi. Qapalı ortoqonal sistemlər

Əvvəlcə fərz edək ki, $H=R^n$ n ölçülü evklid fəzasıdır. Fəzanın hər hansı $e_1,e_2,...,e_n$ ortonormal bazisini götürək. Onda istənilən $x_n\in R^n$ elementini

$$x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\ ,\ x_k(x,e_k),\ k=1,2,....,n$$

şəklində göstərə bilərik.

İndi fərz edək ki, H sonsuz ölçülü fəzadır. Bu fəzada $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...$ ortonormal vektorlar sistemini və istənilən $f\in H$ elementini götürək. f

elementinə $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1,2,...$ ədədlər ardıcıllığını qarşı qoyaq. Bu ədədlərə f elementinin $\{\varphi_k\}$ sisteminə nəzərən koordinatları və ya Furye əmsalları deyilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \tag{1}$$

sırasına f elementinin $\{\varphi_k\}$ sisteminə görə Furye sırası deyilir.

Aşağıdakı suallar ortaya çıxır: (1) sırası yığılandırmı, yəni (1) sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığının H fəzasındakı məsafəyə görə limiti varmı? (1) sırası yığılan olduğu halda onun cəmi verilmiş f elementi ilə üst-üstə düşürmü?

Bu sualları aydınlaşdırmaq üçün əvvəlcə aşağıdakı məsələyə baxaq: verilmiş n üçün α_k $(k = 1,2,...,n)$ əmsallarını elə seçin ki, f elementinin

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{2}$$

cəmindən məsafəsi ən kiçik olsun. $\{\varphi_k\}$ sisteminin ortoqonallığından istifadə edərək $\|f - S_n\|$ fərqini hesablayaq.

$$\|f - S_n\|^2 = (f - S_n, f - S_n) =$$

$$= \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k ,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2$$

Göründüyü kimi bu ifadə ən kiçik qiymətini yalnız $\alpha_k = c_k$ $(k = 1,2,...,n)$ olduqda alar. Bu halda

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \tag{3}$$

Yəni verilmiş n üçün (2) şəklində cəmlər içərisində f elementindən ən az meyl edən f-ə uyğun Furye sırasının xüsusi cəmləridir.

$\|f - S_n\|^2 \geq 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2$$

olar. Burada n istənilən natural ədəddir və bərabərsizliyin sağ tərəfi n-dən asılı deyildir. Ona görə də $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ sırası yığılandır və

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|f\|^2. \tag{4}$$

(4) bərabərsizliyi Bessel bərabərsizliyi adlanır.

Həndəsi olaraq Bessel bərabərsizliyi f vektorunun qarşılıqlı ortoqonal olan istiqamətlərdə proyeksiyalarının kvadratları cəminin vektorun uzunluğunun kvadratını aşmadığını göstərir.

Xüsusi halda (4) bərabərsizliyində bərabərlik halı olarsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{5}$$

Bu bərabərlik Parseval bərabərliyi adlanır.

Tərif. Əgər istənilən $f \in H$ elementi üçün (5) Parseval bərabərliyi ödənərsə, bu halda $\{\varphi_k\}$ ortonormal sisteminə **qapalı sistem** deyilir.

Yuxarıda aldığımız (3) bərabərliyindən alınır ki, $\{\varphi_k\}$ sisteminin qapalılığı və istənilən $f \in H$ elementinin $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ Furye sırasının xüsusi cəmlərinin f elementinə yığılması eynigüclüdür.

Aşağıdakı mühüm teorem doğrudur.

Teorem 1. Separabel H fəzasında ortonormal sistemin qapalı olması üçün zəruri və kafi şərt bu sistemin tam olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, $\{\varphi_n\}$ qapalı sistemdir. Onda istənilən $f \in H$ elementi üçün onun Furye sırasının xüsusi cəmləri ardıcıllığı f elementinə yığılır. Bu o deməkdir ki, $\{\varphi_n\}$ sisteminin xətti kombinasiyaları H-da hər yerdə sıxdır, yəni sistem tamdır.

Kafilik. Tutaq ki, $\{\varphi_n\}$ tam sistemdir. Onda istənilən $f \in H$ elementini $\{\varphi_n\}$ elementlərinin $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ xətti kombinasiyaıarı vasitəsilə istənilən dəqiqliklə yaxınlaşdırmaq olar. Yuxarıda gördüyümüz kimi $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ xüsusi cəmlərinin f elementindən meyli digər xətti kombinasiyalarından daha kiçik olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ cəminin f-ə yığıldığını alırıq. Bu halda Parseval bərabərliyi doğrudur. Teorem isbat olundu.

Yuxarıda alınmış Bessel bərabərsizliyindən çıxır ki, ortonormal sistemə görə istənilən f elementinə uyğun Furye sırasının $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ əmsallarının kvadratalarından düzəlmiş

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{6}$$

sırası həmişə yığılan sıradır. Bu onu göstərir ki, (6) sırasının yığılan olması $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ ədədlərinin hər hansı $f \in H$ elementinin Furye əmsalları olması üçün zəruri şərtdir. İsbat etmək olar ki, H tam fəza olduğu halda (6) sırasının yığılan olması $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ ədədlərinin hər hansı $f \in H$ elementinin Furye əmsalları olması üçün həm də kafi şərtdir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. (Riss-Fişer). Tutaq ki, $\{\varphi_n\}$ Hilbert fəzasında istənilən ortonormal sistem, $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ isə

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

şərtini ödəyən ədədlərdir.

Onda elə $f \in H$ elementi vardır ki, $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1,2,...$ və

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2 .$$

İsbatı. $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ qəbul edək. Onda alarıq:

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + ... + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 \to 0, \ n \to \infty$$

Deməli, $\{f_n\}$ fundamental ardıcıllıqdır. H tam fəza olduğu üçün $\{f_n\}$ ardıcıllığı hər hansı $f \in H$ elementinə yığılır.

Aşağıdakı bərabərliyi götürək:

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i) \tag{7}$$

$n \ge i$ olduğu halda

$$(f_n, \varphi_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k , \varphi_i \right) = c_i$$

Digər tərəfdən

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \le \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(f - f_n, \varphi_i) = 0$$

alırıq.

(7) bərabərliyinin sol tərəfi n-dən asılı deyildir. Ona görə də $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək

$$(f, \varphi_i) = c_i$$

alarıq. Yəni c_i ədədləri $f \in H$ elementinin Furye əmsallarıdır.

$n \to \infty$ olduqda $\|f - f_n\| \to 0$ şərtindən isə

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) \tag{8}$$

olmasını asanlıqla almaq olar.

Doğrudan da

$$\|f - f_n\|^2 = (f - f_n, f - f_n) = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right) =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

münasibətindən (8) bərabərliyi alınır. Teorem isbat edildi.

Aşağıdakı mühüm teoremi də qeyd edək.

Teorem 3. Tam separabel H fəzasında $\{\varphi_n\}$ ortonormal sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt, H fəzasında $\{\varphi_n\}$ sisteminin bütün elementlərinə ortoqonal olan sıfırdan fərqli elementin olmamasıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $\{\varphi_n\}$ sistemi tamdır. Onda sistem eyni zamanda qapalı sistemdir. Əgər hər hansı $f \in H$ elementi $\{\varphi_n\}$ sisteminin bütün elementlərinə ortoqonal olarsa, onun bütün Furye əmsalları sıfra bərabər olar. Bu halda Parseval bərabərliyinə görə alarıq:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

buradan $f = 0$.

İndi tutaq ki, $\{\varphi_n\}$ sistemi tam deyildir. Onda H fəzasında elə $g \neq 0$ elementi vardır ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|g\|^2, \text{ burada } c_k = (g, \varphi_k)$$

Bu halda Riss-Fişer teoreminə görə elə $f \in H$ elementi vardır ki, $c_k = (f, \varphi_k)$ və $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

$(f-g,\varphi_k)=(f,\varphi_k)-(g,\varphi_k)=0$ olduğu üçün $f-g$ elementi $\{\varphi_i\}$ sisteminin bütün elementlərinə ortoqonaldır.

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\|g\|^2$$

bərabərsizliyindən $f-g\neq 0$ olduğunu alırıq.

Yəni sistem tam olmadığı halda bütün φ_i elementlərinə ortoqonal olan element vardır. Teorem isbat edildi.

13.5. Hilbert fəzalarının izomorfluğu

Tutaq ki, R və R^* Evklid fəzalarıdır. Tərifə görə iki Evklid fəzası o zaman izomorf adlanır ki, bu fəzalar arasında elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkün olsun ki,

$$x\leftrightarrow x^*,\ y\leftrightarrow y^*,\ \ x,y\in R;\ \ x^*,y^*\in R^*$$

olduqda

$$x+y\leftrightarrow x^*+y^*$$

$$\lambda x\leftrightarrow \lambda x^*$$

və

$$(x,y)=\left(x^*,y^*\right).$$

Göründüyü kimi, Evklid fəzalarının izomorfluğu elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur ki, bu zaman fəzalarda təyin edilmiş həm xətti əməllər, həm də sklayar hasil saxlanılır.

Məlum olduğu kimi bütün n-ölçülü evklid fəzaları bir-birinə izomorfdur. Eyni zamanda bütün n-ölçülü evklid fəzaları R^n fəzasına izomorfdur.

Qeyd edək ki, bu fakt sonsuz ölçülü fəzalar üçün doğru deyildir. Sonsuz ölçülü fəzalar bir-birinə izomorf olmaya da bilər. Məsələn, l_2 və $C_2[a,b]$ fəzaları izomorf ola bilməzlər, çünki l_2 tam, $C_2[a,b]$ isə tam olmayan fəzalardır.

Buna baxmayaraq aşağıdakı mühüm teorem doğrudur.

Teorem. İstənilən iki separabel Hilbert fəzaları bir-birinə izomorfdurlar.

İsbatı. Göstərək ki, istənilən separabel H Hilbert fəzası l_2 fəzasına izomorfdur. Bu nəqsədlə H fəzasında istənilən tam ortonormal $\{\varphi_n\}$ sistemini götürək və hər bir $f\in H$ elementinə qarşı onun $\{\varphi_n\}$ sisteminə görə $c_1,c_2,...,c_n,...$ Furye əmsallarını qarşı qoyaq. Parseval bərabərliyinə görə

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ olduğundan $c = (c_1, c_2, ..., c_n, ...) \in l_2$. Əksinə, Riss-Fişer teoreminə görə $(c_1, c_2, ..., c_n, ...) \in l_2$ elementinə qarşı elə $f \in H$ vardır ki, $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ ədədləri bu elementin Furye əmsallarıdır. Bu qayda ilə H və l_2 fəzaları arasında düzəlmiş uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur.

Əgər

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$$
$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, ..., d_n, ...)$$

olarsa, onda

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, ..., c_n + d_n, ...)$$

və

$$\lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1, \lambda c_2, ..., \lambda c_n, ...)$$

Nəhayət, Parseval bərabərliyindən istifadə edərək

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \tag{1}$$

olduğunu göstərə bilərik. Doğrudan da

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \|f\|^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \|g\|^2 \tag{2}$$

olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) =$$
$$= \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

Bu bərabərlikdən (2) şərtlərini nəzərə alsaq, (1) bərabərliyini alarıq. Beləliklə, H və l_2 arasındakı uyğunluğun izomorfizm olduğunu alırıq.

13.6. Hilbert fəzasında altfəza, ortoqonal tamamlayıcı və düz cəm anlayışları

I. Tutaq ki, H hər hansı Hilbert fəzasıdır. Əgər $L \subset H$ çoxluğunun istənilən $x, y \in L$ elementləri və istənilən α, β həqiqi ədədləri üçün $\alpha x + \beta y \in L$ olarsa, bu halda L çoxluğu H fəzasında xətti çoxobrazlı adlanır. Qapalı xətti çoxobrazlı **altfəza** adlanır. Hilbert fəzasında altfəzalara bəzi misallar göstərək.

1. Tutaq ki, $h \in H$ hər hansı elementdir. H fəzasının h elementinə ortoqonal olan bütün $f \in H$ elementləri çoxluğu altfəza təşkil edir.

$$L = \{f : f \in H, (f, h) = 0\}.$$

2. $H = l_2$ olsun. Məlum olduğu kimi bu fəza $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ şərtini ödəyən ardıcıllıqlardan təşkil edilmişdir. $x_1 = x_2$ şərtini ödəyən bütün elementlər çoxluğu altfəza təşkil edir.

$$L = \{x : x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...),\ x_1 = x_2\}$$

3. $H = l_2$ götürək. l_2 fəzasının $x_n = 0$, $n = 2,4,6,...$ şərtini ödəyən bütün elementləri çoxluğu altfəza təşkil edir.

$$L = \{x : x \in l_2,\ x_n = 0,\ n = 2,4,6,...\}$$

4. $H = L_2[0,1]$. $L = \left\{ f(t);\ f(t) \in L_2[0,1], \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$

çoxluğu altfəza təşkil edir.

5. $H = l_2$. Qeyd olunmuş n natural ədədi üçün

$$L = \left\{ x : x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...),\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$$

çoxluğu altfəza təşkil edir.

Göstərilən misallarda L çoxluğunun altfəza təşkil etməsini bilavasitə tərifdən istifadə etməklə yoxlamaq olar.

Qeyd edək ki, hər bir hilbert fəzasında istənilən altfəza ya sonlu ölçülü evklid fəzasıdır, ya da bu altfəza özü də hilbert fəzasıdır. Hilbert fəzalarında altfəzalar istənilən normalaşmış fəzaların altfəzalarında olmayan bir çox xassələrə malikdirlər. Bütün bu xassələr Hilbert fəzasında skalyar hasilin və elementlərin ortoqonallığı anlayışlarının olması ilə əlaqədardır.

II. Tutaq ki, $L \subset H$ hər hansı altfəzadır. $L^{\perp}$ ilə H Hilbert fəzasının elə $g \in H$ elementləri çoxluğunu işarə edək ki, bu elementlər bütün $f \in L$ elementlərinə ortoqonal olsun, yəni

$$L^{\perp} = \{g : g \in H, (g, f) = 0,\ f \in L\}.$$

Göstərək ki, $L^{\perp}$ – altfəza təşkil edir.

İstənilən $g_1, g_2 \in L^{\perp}$ üçün $(g, f) = (g_2, f) = 0$, $f \in L$ olduğundan $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = 0$ olması alınır. Buradan $L^{\perp}$-ın xətti çoxobrazlı olmasınnı alırıq.

Göstərək ki, $L^{\perp}$ – qapalıdır. $g_n \in L^{\perp}$ götürək, fərz edək ki, $\lim_{n \to \infty} g_n = g$. Onda istənilən $f \in L$ üçün

$$(g, f)=\lim_{n\to\infty}(g_n, f)=0, \ g\in L^{\perp}.$$

Alırıq ki, $L^{\perp}$ – altfəzadır. $L^{\perp}$ altfəzası L altfəzasının ortoqonal tamamlayıcısı adlanır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Əgər L H Hilbert fəzasının xətti qapalı altfəzası isə, onda istənilən $f\in H$ elementini yeganə üsulla $f=h+h'$, $h\in L$, $h'\in L^{\perp}$ şəklində göstərmək olar.

İsbatı. L altfəzasında hər hansı $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistemini götürək və

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n\ , \ c_n=(f,\varphi_n)$$

qəbul edək.

Bessel bərabərsizliyinə görə $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2$ sırası yığılan olduğundan belə h elementi vardır və $h\in L$. $h'=f-h$ elementini götürək. İstənilən n üçün

$$(h',\varphi_n)=(f-h,\varphi_n)=(f,\varphi_n)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n,\varphi_n\right)=c_n-c_n=0.$$

L altfəzasına daxil olan istənilən ξ elementini

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$$

şəklində ayırmaq mümkün olduğu üçün buradan

$$(h',\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(h',\varphi_n)=0.$$

Onda $h'\in L^{\perp}$ alırıq. Bu halda $f=h+h'$, $h\in L$, $h'\in L^{\perp}$ olar. Bu ayrılışın yeganəliyini göstərək. Fərz edək ki, başqa bir $f=h_1+h_1'$, $h_1\in L$, $h_1'\in L^{\perp}$ ayrılışı da vardır. İstənilən n üçün

$$(h,\varphi_n)=(f,\varphi_n)=c_n$$

olduğundan $h_1=h$, $h_1'=h'$ alırıq. Yəni ayrılış yeganədir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən çox mühüm aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. L altfəzasının ortoqonal tamamlayıcısının ortoqonal tamamlayıcısı L altfəzası ilə üst-üstə düşür.

Bu nəticə onu göstərir ki, H fəzasının qarşılıqlı ortoqonal tamamlayıcı altfəzalarından danışmaq olar. Əgər L və $L^{\perp}$ iki qarşılıqlı ortoqonal tamamlayıcı altfəzalar və $\{\varphi_n\}$, $\{\varphi_n'\}$ uyğun olaraq bu altfəzalarda tam ortonormal sistemlər isə, onda bu sistemlərin birləşməsindən alınan sistem bütün H fəzasında tam ortoqonal sistem olar. Ona görə də aşağıdakı nəticə də doğrudur.

Nəticə 2. Hər bir ortonormal sistem bütün H fəzasında tam olan sistemə kimi tamamlana (genişlənə) bilər.

III. Yuxarıda göstərdik ki, hər bir $f \in H$ elementini $f = h + h'$, $h \in L$, $h' \in L^{\perp}$ şəklində göstərmək olar. Bu halda deyirlər ki, H fəzası qarşılıqlı ortoqonal L və $L^{\perp}$ altfəzalarının düz cəminə ayrılmışdır və bunu $H = L \oplus L^{\perp}$ kimi işarə edirlər.

Aydındır ki, düz cəm anlayışını sonlu və ya hesabi sayda altfəzalar üçün də ümumiləşdirmək olar:

Tərif. Əgər H fəzasının $L_1, L_2, ..., L_n, ...$ altfəzaları cüt-cüt ortoqonal isə, yəni $i \neq j$ olduqda L_i altfəzasının istənilən vektoru L_j-nın istənilən vektoruna ortoqonal isə və istənilən $f \in H$ elementini

$$f = h_1 + h_2 + ... + h_n + ..., \ h_i \in L_i \tag{1}$$

şəklində göstərmək olarsa, onda deyirlər ki, H fəzası $L_1, L_2, ..., L_n, ...$ altfəzaların düz cəminə ayrılmışdır və bunu

$$H = L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_n \oplus ...$$

kimi işarə edirlər.

Əgər L_i altfəzalarının sayı sonsuz olarsa, bu halda $\sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|^2$ sırası yığılandır və

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|h_i\|^2 .$$

Qeyd edək ki, $f \in H$ elementinin (1) ayrılışı yeganədir.

13.7. Evklid fəzası olmayan normalaşmış fəzalar haqqında

Yuxarıda qeyd etdik ki, hər bir Evklid (Hilbert) fəzasında elementin normasını skalyar hasil vasitəsilə təyin etmək olar və bu zaman həmin fəza normalaşmış fəza quruluşuna malik olar. İndi isə bu məsələnin tərsi olan məsələyə baxaq. Hər hansı normalaşmış fəzada norma hansı şərtləri ödəməlidir ki, bu fəza Evklid fəzasına çevrilsin, başqa sözlə bu fəzada norma hər hansı skalyar hasil vasitəsilə təyin olunsun.

Ümumiyyətlə, Evklid fəzalarını bütün normalaşmış fəzalar sinfində necə xarakterizə etmək olar. Bu suala aşağıdakı teorem cavab verir.

Teorem. X normalaşmış fəzasının Evklid fəzası olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $x, y \in X$ üçün

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{1}$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

$x+y$ və $x-y$ tərəfləri x və y olan paraleloqramın diaqonallarını göstərdiyindən (1) bərabərliyi Evklid fəzalarında paraleloqramın məlum xassəsini ifadə edir: paraleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi onun bütün tərəflərinin kvadratları cəminə bərabərdir.

Bu teoremdən alınır ki, əgər hər hansı normalaşmış fəzada (1) bərabərliyi ödənməzsə, onda bu fəza Evklid fəzası ola bilməz.

Misallara baxaq:

1. n-ölçülü R_p^n fəzasını götürək. Bu fəzada elementin norması

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

kimi təyin edilir. $p \geq 1$ olduqda normanın bütün aksiomları ödənilir. Yəni bu fəzalar normalaşmış fəzalardır. Amma bu fəzalar yalnız $p = 2$ olduqda evklid fəzası olar. Doğrudan da, $x = (1,1,0,...,0)$ və $y = (1,-1,0,...,0)$ elementlərini götürək.

$$x + y = (2,0,0,...,0)$$

$$x - y = (0,2,0,...,0)$$

Buradan

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}, \quad \|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2$$

Göründüyü kimi, (1) paraleloqram bərabərliyi yalnız $p = 2$ olduqda ödənir. $p \neq 2$ hallarında isə ödənmir. Deməli, $p \neq 2$ olduqda R_p^n fəzaları evklid fəzası deyildirlər.

2. $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fəzasına baxaq. $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$ $\|f\| = \|g\| = 1$

$$\|f+g\| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2}$$

$$\|f-g\| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1$$

Buradan alırıq ki, $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$. Ona görə də $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fəzasında norma heç bir skalyar hasil vasitəsilə verilə bilməz. Ümumiyyətlə, $C[a,b]$ fəzası Evklid fəzası deyildir.

13.8. Hilbert fəzalarına aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Ədəd oxu üzərində skalyar hasili aşağıdakı qayda ilə təyin etmək olarmı?

a) $(x,y)=xy$ b) $(x,y)=xy^3$ v) $(x,y)=5xy$ d) $(x,y)=x+y$

2. Tutaq ki, V müstəvi üzərində vektorlar çoxluğudur. $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ vektorlarının skalyar hasilini aşağıdakı qayda ilə təyin etmək olarmı?

a) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1$; b) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1-a_2b_2$; v) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+2a_2b_2$

q) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+2a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1$;

d) $(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$

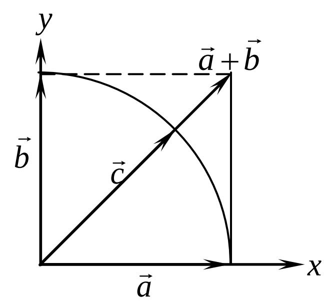
3. İsbat edin ki, skalyar hasilin 4) aksiomu digər aksiomlardan asılı deyildir. Yəni, göstərin ki, verilmiş E xətti fəzasında elə skalyar hasil təyin etmək olar ki, 1)-3) aksiomları ödənər, amma 4) aksiomu ödənməz.

İsbatı. E fəzası olaraq müstəvi üzərindəki vektorlar çoxluğunu götürək və skalyar hasili $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos^3\alpha$ bərabərliyi ilə təyin edək. Burada α $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaqdır. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\geq 0$, $(\vec{a},\vec{a})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=0$ və $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ olması aydındır.

Göstərək ki, $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$ doğrudur. $\lambda=0$ olduqda bu bərabərlik ödənir. $\lambda>0$ oldudqda $\lambda\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq α-ya bərabər olduğundan yenə də 3) xassəsi doğrudur.

Tutaq ki, $\lambda<0$. Bu halda $\lambda\vec{a}$ və $\vec{b}$ arasındakı bucaq $\pi-\alpha$ olar. Ona görə də

$$(\lambda\vec{a},\vec{b})=|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos^3(\pi-\alpha)=-|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos^3\alpha=$$
$$=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos^3\alpha=\lambda(\vec{a},\vec{b}).$$



Alırıq ki, 3) aksiomu λ-nın bütün qiymətlərində ödənir. Deməli, 1), 2), 3) aksiomları ödənilir. Göstərək ki, elə $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları vardır ki, 4) aksiomu ödənmir.

Şəkildə göstərilən $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vahid vektorlarını götürək. Bu halda alarıq:

$$(\vec{a}+\vec{b},\,\vec{c})=\sqrt{2},$$
$$(\vec{a},\vec{c})=\cos^3\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ (\vec{b},\vec{c})=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Göründüyü kimi

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right).$$

4. Göstərin ki, skalyar hasilin ikinci aksiomu $((x,y)=(y,x))$ digər aksiomlardan asılı deyildir.

Göstəriş. Həqiqi ədədlər çoxluğunda $(x,y)=xy^3$ skalyar hasili təyin etməli.

5. Göstərin ki, skalyar hasilin birinci aksiomu ($(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$) digər aksiomlardan asılı deyildir.

Göstəriş. Müstəvi üzərində vektorlar çoxluğunda $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1$ skalyar hasili təyin etməli.

6. $C[0,1]$ normalaşmış fəzasının Evklid fəzası olmadığını göstərin.

Həlli. $C[0,1]$-in Evklid fəzası olması üçün paraleloqram bərabərliyinin ödənilməsi zəruri şərtdir. $f(x)=x+1$ və $g(x)=x^2$ funksiyalarını götürək. $f(x), g(x)\in C[0,1]$ olması aydındır.

$$\|f\|=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=2,\quad \|g\|=\max_{0\leq x\leq 1}|g(x)|=1.$$

$$f(x)+g(x)=x^2+x+1,\ g(x)=x^2-x-1,$$

$$\|f+g\|=\max_{0\leq x\leq 1}\left|x^2+x+1\right|=3$$

$$\|f-g\|=\max_{0\leq x\leq 1}\left|x^2-x-1\right|=\frac{5}{4}$$

Paraleloqram xassəsinə görə

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$$

olmalıdır, amma

$$9+\frac{25}{16}\neq 2\cdot 4+2\cdot 1$$

olduğundan paraleloqram xassəsi ödənilmir. Deməli, $C[0,1]$ evklid fəzası deyildir.

7. $L_2[0,\pi]$ fəzasında $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$ funksiyaları arasındakı bucağı tapın.

Həlli. $\cos\varphi=\dfrac{(f,g)}{\|f\|\|g\|}$ olduğuna görə əvvəlcə (f,g), $\|f\|$ və $\|g\|$-ni tapaq.

$$(f,g)=\int_0^\pi x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi \cos x dx=\pi+\sin x\Big|_0^\pi=\pi$$

$$\|f\|^2=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2},\ \|f\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|g\|^2=\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3},\ \|g\|=\sqrt{\frac{\pi^3}{3}},$$

$$\cos\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{\pi},\ \varphi=\arccos\frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

8. Göstərin ki, skalyar hasil təyin edilmiş istənilən E fəzasında Apollon eyniliyi adlanan

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

bərabərlyi doğrudur.

Həlli. $z-x=u$, $z-y=\upsilon$ işarə edək. $u,\upsilon\in E$ üçün paraleloqram xassəsini yazaq.

$$\|u+\upsilon\|^2+\|u-\upsilon\|^2=2\left(\|u\|^2+\|\upsilon\|^2\right)$$

Əgər $u-\upsilon=y-x$, $u+\upsilon=2z-(x+y)$ olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\left[\|2z-(x+y)\|^2+\|x-y\|^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2+\|x-y\|^2\right]=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

9. İsbat edin ki, x və y elementlərinin ortoqonal olması üçün zəruri və kafi şərt, istənilən λ və μ ədədləri üçün $\|\lambda x\|^2+\|\mu y\|^2=\|\lambda x+\mu y\|^2$ bərabərliyinin ödənilməsidir.

10. Tutaq ki, X – həqiqi normalaşmış fəzadır və istənilən $x,y\in X$ elementləri üçün paraleloqram bərabərliyi ödənilir:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Göstərin ki, bu halda

$$(x,y)=\frac{1}{2}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right\}$$

bərabərliyi X fəzasında skalyar hasil təyin edir və $(x,x)=\|x\|^2$ doğrudur.

11. Tutaq ki, X – kompleks xətti normalaşmış fəzadır və istənilən $x,y\in X$ üçün paraleloqram bərabərliyi ödənir:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left\{\|x\|^2+\|y\|^2\right\}$$

Isbat edin ki,

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right\}-\frac{1}{4}\left\{\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\right\}$$

bərabərliyi X fəzasında skalyar hasil təyin edir və bu zaman $(x,x)=\|x\|^2$ doğrudur, yəni fəzanın norması skalyar hasillə uzlaşır.

12. $[a,b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiyalardan ibarət $\widetilde{H}_1[a,b]$ xətti fəzasında skalyar hasili

$$(f,g)=\int_a^b [f(t)g(t)+f'(t)g'(t)]dt$$

kimi təyin edək. $\widetilde{H}_1[a,b]$ Hilbert fəzasıdırmı?

13. $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ $(x_k\in R)$, $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ şərtini ödəyən ardıcıllıqlardan ibarət xətti fəzada

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k y_k\,,\ \lambda_k\in R,\ 0<\lambda_k<1$$

şəklində skalyar hasil təyin edək. Alınmış evklid fəzası Hilbert fəzasıdırmı?

Həlli. Bu halda H Hilbert fəzası olmaya da bilər, çünki H tam olmayan fəzadır. Doğrudan da, tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ yığılan sıradır. Onda istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə N nömrəsi vardır ki, $\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k<\varepsilon$. $x_n=\left(\underbrace{1,1,...,1}_{n},0,0,...\right)$ ardıcıllığını götürək. $m,n>N$ oduqda $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$, yəni $\{x_n\}$ fundamental ardıcıllıqdır, amma x_n yığılan ardıcıllıq deyildir. Deməli, H tam deyildir, yəni Hilbert fəzası deyildir.

16. Tutaq ki, e_n $(n\in N)$ H Hilbert fəzasında ortonormal sistem, λ_n – isə həqiqi və ya kompleks ədədlər ardıcıllığıdır. İsbat edin ki, $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k$ sırası yalnız və yalnız o zaman yığılar ki, $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2<\infty$ olsun.

17. Tutaq ki, $x_1,x_2,...,x_n,...$ və $y_1,y_2,...,y_n,...$ H Hilbert fəzasına daxil olan və

$$(x_i,y_i)=\begin{cases}1, & i=j \text{ olduqda}\\ 0, & i\neq j \text{ olduqda}\end{cases}$$

şərtini ödəyən elementlər sistemidir. (Bu şərti ödəyən sistemlər biortoqonal sistemlər adlanır).

İsbat edin ki, bu sistemlərdən hər biri xətti asılı olmayan sistemdir.

18. Tutaq ki, x_n və y_n H Hilbert fəzasında qapalı $\overline{S}_1(0)$ kürəsinə daxil olan və $n \to \infty$ olduqda $(x_n, y_n) \to 1$ şərtini ödəyən ardıcıllıqlardır. Göstərin ki, $n \to \infty$ olduqda $\|x_n - y_n\| \to 0$ doğrudur.

19. $[0, \infty)$ intervalında kəsilməz və $\int\limits_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t} dt < \infty$ şərtini ödəyən funksiyalardan ibarət xətti fəzada skalyar hasili

$$(f, g) = \int\limits_0^\infty f(t) g(t) e^{-t} dt$$

bərabərliyi ilə təyin edək.

a) skalyar hasilin bütün aksiomlarının ödənildiyini göstərin.

b) B) $1, t, t^2, ...$ xətti asılı olmayan funksiyalar sisteminin ortoqonallaşmasından alınan sistemin birinci üç çoxhədlisini tapın.

20. l_2 fəzasında $M = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, ...) : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$ çoxluğunun l_2-də hər yerdə sıx xətti çoxobrazlı olduğunu göstərin.

21. $L_2[0, \pi]$ fəzasında $f(x) = \sin x$ və $g(x) = x$ elementləri arasında bucağı tapın.

22. $L_2[-1, 1]$ fəzasında $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x$ elementlərinin əmələ gətirdiyi üçbucağın bucaqlarını tapın.

23. İsbat edin ki, $L_2[0, 1]$ fəzasında

$$M = \left\{ f(x) \in L_2[0, 1] : \int\limits_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

çoxluğu altfəza təşkil edir.

24. İsbat edin ki, $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ $(n = 1, 2, ...)$ ardıcıllığı istənilən $x \geq 0$ üçün $f(x) = 0$ funksiyasına nöqtəvi yığılır, amma orta kvadratik mənada yığılmır.

25. $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ elementlərini $L_2[0, 1]$ fəzasında ortoqonallaşdırın.

26. Tutaq ki, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,...)$, $\alpha_n>0$, $n\in N$ qeyd olunmuş ədədlər ardıcıllığıdır. $l_{2,\alpha}$ ilə $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|x_n|^2<\infty$ şərtini ödəyən bütün $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ardıcıllıqlar çoxluğunu işarə edək. Göstərin ki,

1) $l_{2,\alpha}$ çoxluğu $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n y_n$ ($y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$) skalyar hasilinə görə separabel hilbert fəzası təşkil edir.

2) $\alpha_n=n$, $\alpha_n=n^2$ və $\alpha_n=e^{-n}$ olduğu hallarda $l_{2,\alpha}$ fəzasında ortonormal bazis qurun.

Həlli. 1) $\alpha_n|x_n y_n|\le\frac{\alpha_n}{2}\left(|x_n|^2+|y_n|^2\right)$ bərabərsizliyinə görə $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n y_n$ sırası mütləq yığılandır.

Skalyar hasilin aksiomlarının ödənməsini asanlıqla yoxlamaq olar. Göstərək ki, $l_{2,\alpha}$ tam fəzadır. $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)},...\right)$ fundamental ardıcıllığını götürək. Onda tərifə görə istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə N_0 nömrəsi vardır ki, $m>N_0$, $s>N_0$ üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left|x_n^{(m)}-x_n^{(s)}\right|^2<\varepsilon^2 .$$

Onda istənilən $r\in N$ natural ədədi üçün

$$\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n^{(m)}-x_n^{(s)}\right|^2<\varepsilon^2 . \qquad (*)$$

Burada istənilən $n\in N$ üçün

$$\left|x_n^{(m)}-x_n^{(s)}\right|<\varepsilon$$

olduğundan $\lim_{k\to\infty}x_n^{(k)}=x_n$ limitinin olduğunu alırıq. (*) bərabərsizliyində $s\to\infty$ şərtində limitə keçsək

$$\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n^{(m)}-x_n^{(s)}\right|^2\le\varepsilon^2 \quad (m\ge N_0)$$

alarıq. Sonuncu bərabərsizlik r-in istənilən qiymətlərində doğru olduğundan

$$\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n^{(m)}-x_n\right|^2\le\varepsilon^2$$

yaza bilərik. Onda $\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n^{(m)}\right|^2$ və $\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n^{(m)}-x_n\right|^2$ sıralarının yığılan olmasından və $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$ bərabərsizliyindən $\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n\right|^2$ sırasının yığılan olmasını alarıq. Bu onu göstərir ki, $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in l_{2,\alpha}$. $\varepsilon>0$ istənilən müsbət kiçik ədəd olduğundan (**) bərabərsizliyindən

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|_{l_{2,\alpha}}^2=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{r}\alpha_n\left|x_n^{(k)}-x_n\right|^2=0$$

olduğunu alırıq. Deməli, $l_{2,\alpha}$ – tam fəzadır. $l_{2,\alpha}$ fəzasının separabel olmasını aşağıdakı mühakimədən almaq olar. Əgər sonlu sayda koordinatları sıfırdan fərqli olan vektorlar çoxluğunu götürsək, belə ki, bu koordinatlar rasional ədədlərdir, onda həmin çoxluq $l_{2,\alpha}$ -da hər yerdə sıx, hesabi çoxluq olar.

2) Tutaq ki, $\alpha_n=n$, $n\in N$. Göstərək ki, $e_n=\left(0,0,...,0,\frac{1}{\sqrt{n}},0,...\right)$ sistemi $l_{2,\alpha}$ fəzasında ortonormal bazis təşkil edir. Daxil edilmiş skalyar hasilə nəzərən e_n sisteminin ortonormal olduğunu bilavasitə yoxlamaq olar. Göstərək ki, $\{e_n\}$ sistemi tamdır, yəni $x\in l_{2,\alpha}$ elementini $x=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne_n$, $c_n=(x,e_n)=\sqrt{n}x_n$, $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ şəklində ayırmaq olar.

Doğrudan da $\sum_{n=1}^{k}c_ne_n=(x_1,x_2,...,x_k,0,...)$ olduğundan

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{k}c_ne_n\right\|=\left\|(0,0,...0,x_{k+1},x_{k+2},...)\right\|=$$

$$=\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}n\left|x_n\right|^2\right)^{1/2}\to 0,\ k\to\infty,$$

(yığılan sıranın qalıq sırası olduğuna görə).

Beləliklə,

$$x=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}c_ne_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne_n,$$

burada $c_n=\sqrt{n}x_n$ – x elementinin Furye əmsallarıdır. Bununla da $\{e_n\}$ sisteminin tam ortonormal sistem olması alınır.

Analoji olaraq isbat etmək olar ki, $\alpha_n = n^2$ olduqda $e_n = \left(\underbrace{0,...,0}_{n-1},\frac{1}{n},0,...\right)$ vektorlar sistemi, $\alpha_n = e^{-n}$ olduğu halda isə $e_n = \left(\underbrace{0,...,0}_{n-1},e^{\frac{n}{2}},0,...\right)$ sistemi $l_{2,\alpha}$ fəzasında ortonormal bazis təşkil edir.

27. Tutaq ki, $L-$ H Hilbert fəzasında hər hansı xətti çoxobrazlıdır. İsbat edin ki, $\overline{L} = H$ olması üçün zəruri və kafi şərt $L^{\perp} = \{0\}$ olmasıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $L^{\perp} = \{0\}$, yəni istənilən $y \in L$ üçün $(x, y) = 0$ isə, onda $x = 0$ şərti ödənilir. Bu halda göstərək ki, L H fəzasında hər yerdə sıxdır. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, L çoxluğu H-da hər yerdə sıx deyil, yəni $\overline{L} \neq H$. Onda elə $x_0 \in H$ vardır ki, $x_0 \overline{\in} \overline{L}$. L altfəza olduğu üçün və $x_0 \overline{\in} \overline{L}$ olduğundan $x_0 = y_0 + z_0$, $y_0 \in \overline{L}$, $z_0 \in L^{\perp}$ ortoqonal ayrılışı vardır. Belə ki, $x_0 \overline{\in} \overline{L}$ olduğu üçün $z_0 \neq 0$.

Digər tərəfdən istənilən üçün $(z_0, y) = 0$ olmalıdır. Xüsusi halda $y \in L$ olduqda da $(z_0, y) = 0$ ödənməlidir. Bu halda şərtə görə $z_0 = 0$ olmalıdır. Alınmış ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Deməli, $\overline{L} = H$ olmalıdır. Əksinə, indi fərz edək ki, $\overline{L} = H$. Tutaq ki, elə $z_0 \in H$ vardır ki, $z_0 \perp L$. $\overline{L} = H$ olduğundan elə $\{y_n\} \subset L$ ardıcıllığı vardır ki, $y_n \to z_0$, $n \to \infty$. Skalyar hasilin kəsilməz olmasına əsasən alırıq ki, $0 = (y_n, z_0) \to (z_0, z_0)$. Buradan $(z_0, z_0) = 0$, $z_0 = 0$ alırıq.

28. İsbat edin ki, $x_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, ...\right)$ şəklində bütün vektorların L qapalı xətti çoxobrazlısı l_2 fəzasında hər yerdə sıxdır.

İsbatı. Bunun üçün $L^{\perp} = \{0\}$ olduğunu göstərmək kifayətdir (4.27 məsələsinə görə).

Tutaq ki, $x = (x_0, x_1, x_2, ...) \in l_2$ vektoru bütün L çoxobrazlısına ortoqonaldır, yəni

$$0 = (x, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (z_n)^k, \; z_n = \frac{1}{2^n}, \; n = 1,2,...$$

$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dairəsində $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k$ funksiyasına baxaq. $\left|c_k z^k\right| \leq \frac{1}{2}\left(|c_k|^2 + |z|^{2k}\right)$ bərabərsizliyindən baxılan sıranın K dairəsi daxilində müntəzəm yığılan olmasını alırıq. Ona görə də $f(z)$ funksiyası K dairəsi daxilində analitik funksiyadır. Baxılan funksiya $M=\left\{z_n : z_n=\frac{1}{2^n}, n=1,2,...\right\}$ çoxluğunda $f(z_n)=0$, $n=1,2,...$ şərtini ödəyir. M çoxluğunun $z^*=0$ limit nöqtəsi vardır və $z^*\in K$. Onda analitik funksiyaların yeganəlik teoreminə görə bütün K dairəsində $f(z)\equiv 0$ olmasını alırıq. Buradan isə bütün əmsalların $C_n=0$ olduğunu, yəni $x=0$ olduğunu alırıq. Bu isə $L^{\perp}=\{0\}$ deməkdir.

29. e^x funksiyası üçün elə ikidərəcəli $p(x)$ çoxhədlisi tapın ki, $\|e^x-p(x)\|$ norması $L_2[-1,1]$ fəzasında minimal olsun.

Həlli. Məlum olduğu kimi verilmiş n üçün x elementindən ən az meyl edən çoxhədli onun Furye sırasının n-ci xüsusi cəmidir. Ona görə də axtarılan ikidərəcəli $p(x)$ çoxhədlisi e^x funksiyasına uyğun Furye sırasının ikinci tərtib xüsusi cəmidir, yəni

$$p(x)=c_0e_0(x)+c_1e_1(x)+c_2e_2(x),$$

burada $e_0(x)$, $e_1(x)$, $e_2(x)-$ $L_2[-1,1]$ fəzasında ortonormal sistemin birinci üç elementidir, $C_k=\left(e^x, e_k(x)\right)$, $k=0,1,2$ isə e^x funksiyasının Furye əmsallarıdır.

$e_0(x), e_1(x), e_2(x)$ elementlərini tapmaq üçün xətti asılı olmayan $1, x, x^2$ elementlərinə ortoqonallaşdırma prosesini tətbiq edək.

$$\|1\|_{L_2[-1,1]}=\left(\int_{-1}^{1}1dx\right)^{1/2}=\sqrt{2}$$

olduğunu nəzərə alsaq, $e_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ taparıq. Daha sonra $e_1(x)=\frac{h_1(x)}{\|h_1(x)\|}$, burada $h_1(x)=x-(x,e_0)e_0$.

$$(x,e_0)=\left(x,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}xdx=0$$

olduğu üçün $h_1(x)=x$ alırıq.

$$\|h_1\|^2_{L_2[-1,1]}=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$$

olduğunu nəzərə alsaq, $e_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x$ alarıq.

İndi isə $e_2(x)$ elementini tapaq:

$$e_2(x)=\frac{h_2(x)}{\|h_2(x)\|}$$

belə ki,

$$h_2(x)=x^2-(x^2,e_0)e_0-(x^2,e_1)e_1.$$

Asanlıqla taparıq ki, $(x^2,e_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{\sqrt{2}}{3}$

və

$$(x^2,e_1)=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}x^3dx=0.$$

Nəticədə $h_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$ alırıq.

$$\|h_2(x)\|^2=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\frac{8}{45}$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$e_2(x)=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

taparıq.

Axtarılan çoxhədlini qurmaq üçün e^x funksiyasının bu ortonormal elementlərə nəzərən C_0,C_1,C_2 Furye əmsallarını hesablamaq lazımdır.

$$C_0=(e^x,e_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}e^xdx=\frac{e^2-1}{e\sqrt{2}};$$

$$C_1=(e^x,e_1)=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}xe^xdx=\frac{\sqrt{6}}{e};$$

$$c_2=(e^x,e_2)=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)e^xdx=\frac{\sqrt{5}(e^2-7)}{e\sqrt{2}}$$

Onda $p(x)$ çoxhədlisi aşağıdakı kimi olar:

$$p(x)=c_0e_0(x)+c_1e_1(x)+c_2e_2(x)=\frac{e^2-1}{e\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{e}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x+$$

$$+\frac{\sqrt{5}(e^2-7)}{e\sqrt{2}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}\frac{11-e^2}{e}+\frac{3}{e}x+\frac{15}{4}\frac{e^2-7}{e}x^2.$$

30. Göstərin ki, $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ sistemi $L_2[0,1]$ fəzasında tam sistemdir, amma $L_2[0,1]$-in bazisi deyildir.

Həlli. Əvvəlcə $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ sisteminin $L_2[0,1]$ fəzasında tamlığını göstərək. Göründüyü kimi $\{x^k\}$ sisteminin L xətti çoxobrazlısı $[0,1]$ parçasında verilmiş bütün cəbri çoxhədlilərdən ibarət P çoxluğu ilə üst-üstə düşür. Onda məlum Veyerştrass teoreminə əsasən $\overline{L}=\overline{P}=C[0,1]$ olduğunu, yəni $\{x^k\}$ sisteminin $C[0,1]$ fəzasında tam olduğunu alırıq. $C[0,1]$ kəsilməz funksiyalar çoxluğu $L_2[0,1]$-də hər yerdə sıx olduğundan $\{x^k\}$ sisteminin $L_2[0,1]$-də tam olduğunu alırıq.

İndi isə $\{x^k\}$ sisteminin $L_2[0,1]$-də bazis təşkil etmədiyini göstərək. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, istənilən $f(x)\in L_2[0,1]$ funksiyasını $\{x^k\}$ sisteminə görə $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sırasına ayırmaq olar, belə ki, baxılan sıra $L_2[0,1]$ məsafəsinə görə $f(x)$-ə yığılır.

Yığılan ayrılışın hər tərəfini

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & t\le s\\ 0, & t>s, \quad s\in[0,1]\end{cases}$$

funksiyasına vuraq və $[0,s]$ parçasında inteqrallayaq. Onda alarıq:

$$\int_0^s f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\int_0^s x^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}s^{k+1}$$

$s\in[0,1]$ ixtiyari ədəd olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}s^{k+1}$ sırası bütün $[0,1]$ parçasında yığılandır. Ona görə də bu qüvvət sırasının cəmi olan $g(s)$ funksiyası $[0,1)$ intervalında sonsuz diferensiallanan funksiyadır. Bu halda $f(x)=g'(x)$ olduğu üçün $f(x)$ funksiyası da sonsuz diferensiallanan funksiya olar, yəni $f(x)\in C^{\infty}[0,1]$. Amma $C^{\infty}[0,1]\subset L_2[0,1]$ olduğundan $L_2[0,1]$-də $C^{\infty}[0,1]$ daxil olmayan funksiyalar da vardır və onların $\{x^k\}$ sistemi üzrə ayrılışı mümkün deyildir. Deməli, $\{x^k\}$ sistemi $L_2[0,1]$-də bazis deyildir.

XIV FƏSİL
XƏTTİ OPERATORLAR

14.1. Operatorun ümumi tərifi və bəzi xassələri

Tutaq ki, X və Y ixtiyari təbiətə malik çoxluqlardır. $D \subseteq X$ altçoxluğunu götürək.

Tərif 1. Əgər istənilən $x \in D$ elementinə qarşı müəyyən qayda ilə $y \in Y$ elementi qarşı qoyularsa, bu halda deyirlər ki, $y = F(x)$ operatoru verilmişdir. Bu halda D çoxluğu F operatorunun təyin oblastı adlanır və $D(F)$ kimi işarə edilir.

$$R(F) = \{y : y \in Y, y = F(x), x \in D\}$$

çoxluğuna F operatorunun qiymətlər çoxluğu deyilir.

F operatorunu sxematik olaraq

$$F : D(A) \to R(F) \text{ yaxud } F : X \to Y$$

kimi göstərmək mümkündür. Xüsusi hallarda $D(F) = X$ və ya $R(F) = Y$ ola bilər.

$y = F(x)$ olduqda y-ə x elementinin obrazı, x-ə isə y elementinin proobrazı deyilir. Bu halda $R(F) = F(D)$, yəni operatorun qiymətlər çoxluğu onun təyin oblastının obrazıdır.

Tutaq ki, $F : X \to Y$ və $\Phi : X \to Y$ operatorları verilmişdir. Əgər $D(F) = D(\Phi) = D$ və istənilən $x \in D$ üçün $F(x) = \Phi(x)$ olarsa, bu operatorlar bərabər adlanırlar.

Əgər $D(F) \subset D(\Phi)$ və istənilən $x \in D(F)$ üçün $F(x) = \Phi(x)$ olarsa, bu halda Φ operatoru F-in genişlənməsi adlanır (eyni zamanda F operatoru Φ-in daralması adlanır).

Təyin edilmiş F operatorunun birqiymətli olduğunu fərz edirik, yəni hər bir x elementinin yeganə y obrazına malik olduğunu fərz edirik. Əgər istənilən $y \in R(F)$ elementi yeganə $x \in D(F)$ elementinin obrazıdırsa, yəni hər bir $y \in R(F)$ obrazının yeganə proobrazı varsa, bu halda $y = F(x)$ operatoru qarşılıqlı birqiymətli operator adlanır. Bu zaman istənilən $y \in R(F)$ elementinə qarşı $x \in D(F)$ elementini qarşı qoyan $x = F^{-1}(y)$ tərs operatorunu təyin etmək olar. Aydındır ki, bu halda

$$D(F^{-1}) = R(F),\ R(F^{-1}) = D(F).$$

İndi fərz edək ki, X və Y normalaşmış fəzalarıdır. $F : X \to Y$ operatoruna baxaq. Fərz edək ki, x_0 nöqtəsi özü istisna olmaq şərti ilə onun $S(x_0)$ ətrafı $D(F)$ təyin oblastına daxildir. (x_0 nöqtəsinin δ ətrafı dedikdə $\|x - x_0\| < \delta$ şərtini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğu başa düşülür).

Tərif 2. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi varsa ki, istənilən $x \in S(x_0)$, $\|x - x_0\| < \delta$ şərtini ödəyən nöqtələr üçün $\|F(x) - y_0\| < \varepsilon$ olsun, bu halda $y_0 \in Y$ nöqtəsi F operatorunun x_0 nöqtəsində limiti adlanır və $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = y_0$ kimi işarə edilir.

Fərz edək $F : X \to Y$ operatoru x_0 nöqtəsi daxil olmaqla onun $\bar{S}(x_0)$ ətrafında təyin edilmişdir.

Tərif 3. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olarsa ki, $\|x - x_0\| < \delta$ şərtini ödəyən bütün nöqtələrdə $\|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$ olsun, bu halda F operatoru x_0 nöqtəsində kəsilməz operator adlanır və $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ kimi işarə edilir.

Göründüyü kimi normalaşmış fəzalarda təyin edilmiş operatorun nöqtədə kəsilməzliyi birdəyişənli və çoxdəyişənli həqiqi qiymətli funksiyaların, eləcə də kompleks dəyişənli funksiyaların nöqtədə kəsilməzliyi anlayışlarının ümumiləşməsindən ibarətdir.

Tərif 4. Tutaq ki, $F : D(A) \to R(A)$, $D(A) \subseteq X$, $R(A) \subseteq Y$ operatoru verilmişdir. Əgər F operatoru $D(F)$-ə daxil olan hər bir məhdud çoxluğu Y-in məhdud çoxluğuna çevirirsə, onda F -ə məhdud operator deyilir. Bu halda $A \subset D(F)$ məhdud çoxluğu üçün $F(A) \subset R(A)$ obrazı da məhdud çoxluqdur.

14.2. Xətti operatorun tərifi. Misallar

Tutaq ki, X və Y həqiqi xətti fəzalardır.

Tərif 2. Əgər $A : X \to Y$ operatorunun $D(A)$ təyin oblastı xətti çoxobrazlı olarsa və aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda A operatoru xətti operator adlanır:

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \quad x_1, x_2 \in D(A)$
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax, \quad x \in D(A), \alpha \in R$

Bu halda $y = Ax$ kimi işarə edilir. Əgər A xətti operatorunun təyin oblastı $D(A) = X$ isə bu halda operator bütün fəzada təyin edilmiş xətti operator adlanır. Əgər $\overline{D(A)} = X$ olarsa, bu halda deyirlər ki, A xətti operatoru X fəzasında hər yerdə sıx çoxluqda təyin edilmişdir.

Misallara baxaq.

1. $X = Y = R -$ həqiqi ədədlər çoxluğu olsun. $y = ax$ ($a -$ həqiqi ədəddir) funksiyası bütün R-də təyin edilmiş xətti operatordur.

2. $X = Y = C-$ kompleks ədədlər çoxluğudur. $w = az$ ($a-$ qeyd edilmiş kompleks ədəddir) funksiyası bütün C-də təyin edilmiş xətti operatordur.

3. X xətti fəzasında istənilən $x \in X$ üçün $Ix = x$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş operator vahid (eynilik) operator deyilir. I –xətti operatordur.

4. $X = Y = C[a,b]$. $Dy = y'$ operatoruna baxaq. Bu operator birinci tərtib diferensial operator adlanır. Bu operator bütün $C[a,b]$ fəzasında təyin edilməmişdir. $C[a,b]$-də hər yerdə sıx olan kəsilməz törəmələrə malik funksiyalardan ibarət $C^1[a,b]$ fəzasında təyin edilmişdir. Bu operatorun xətti olmasını bilavasitə yoxlamaq olar.

Aşağıdakı sadə teorem doğrudur.

Teorem. Hər bir xətti operatorun qiymətlər çoxluğu xətti çoxobrazlıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $y_1, y_2 \in R(A)$ və α_1, α_2- həqiqi ədədlərdir. $x_1, x_2 \in D(A)$ götürək, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. A xətti operator olduğu üçün

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Bu onu göstərir ki, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D(A)$ elementi $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ elementinin proobrazıdır, yəni $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in R(A)$. Bu isə $R(A)$-nın xətti çoxobrazlı olması deməkdir.

14.3. Xətti operatorun kəsilməzliyi

Fərz edək ki, X və Y normalaşmış fəzalar, $A: X \to Y$ xətti operatrodur, belə ki, $D(A) = X$.

Tərif. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olarsa ki, $\|x - x_0\| < \delta$ olduqda $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ olsun, bu halda A xətti operatoru x_0 nöqtəsində kəsilməz adlanır və $\lim\limits_{x \to x_0} Ax = Ax_0$ kimi işarə edilir. Bu faktı qısa şəkildə $x \to x_0$, $Ax \to Ax_0$ kimi işarə edirlər.

Teorem. Bütün X banax fəzasında təyin edilmiş, qiymətləri Y banax fəzasına daxil olan A xətti operatoru $0 \in X$ nöqtəsində kəsilməz isə, onda istənilən $x_0 \in X$ nöqtəsində də kəsilməzdir.

İsbatı. Teoremin isbatı $Ax - Ax_0 = A(x - x_0)$ bərabərliyindən alınır. $x - x_0 = z$ əvəz etsək, $x \to x_0$ şərtində $z \to 0$ olar. Sıfır nöqtəsində kəsilməzliyə görə $z \to 0$ olduqda $Ax - Ax_0 = Az \to 0$ alırıq, yəni $Ax \to Ax_0$.

Misal 1. Yuxarıda $C[a,b]$ fəzasından $C[a,b]$-yə təsir edən $Dy = y'$ operatorunun xətti operator olduğunu qeyd etdik. Bu operator bütün $C[a,b]$-də deyil, bu fəzada hər yerdə sıx olan $C^1[a,b]$ fəzasında təyin edilmişdir.

Göstərək ki, bu operator kəsilməz deyildir. Doğruda da, $x_n(t)=\frac{\cos nt}{n}\in C[a,b]$ götürək. Bu fəzada $n\to\infty$ $\frac{\cos nt}{n}\to 0$, amma $\frac{dx_n(t)}{dt}=\sin nt$ ardıcıllığı $C[a,b]$-də yığılan deyildir. Ona görə də D operatoru kəsilməz deyildir.

Misal 2. Göstərək ki, n-ölçülü Evklid fəzasında təyin edilmiş $A-$ xətti operatoru istənilən $x\in E$ nöqtəsində kəsilməzdir.

n ölçülü fəzada $e_1,e_2,...,e_n$ bazisini götürək. Onda istənilən $\{x^{(k)}\}\subset E$ ardıcıllığı üçün

$$x^{(k)}=\xi_1^{(k)}e_1+\xi_2^{(k)}e_2+...+\xi_n^{(k)}e_n$$

kimi göstərə bilərik. Əgər $x^{(k)}\to x$, $n\to\infty$ isə, bu halda istənilən $i=1,2,...,n$ üçün $\xi_i^{(k)}\to\xi_i$, $k\to\infty$.

A xətti operator olduğu üçün $k\to\infty$ olduqda

$$Ax^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)}Ae_i\to\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,Ae_i=Ax$$

alırıq. Bu isə A operatorunun x nöqtəsində kəsilməzliyi deməkdir.

Misal 3. $X=C[0,1]$. Bu fəzada

$$Af=\int_0^t f(\tau)d\tau$$

bərabərliyi ilə təyin edilmiş operator bütün fəzada təyin edilmiş xətti kəsilməz operatordur.

Misal 4. $X=C[0,1]$. Fərz edək ki, $K(t,s)$ funksiyası $0\le t\le 1$, $0\le s\le 1$ kvadratında kəsilməz funksiyadır. İstənilən $f(t)\in C[0,1]$ üçün

$$g(t)=Kf=\int_0^1 K(t,x)f(s)ds,$$

operatoru təyin edək. Bu operator $C[0,1]$ fəzasını özünə inikas etdirir. K operatoru xətti kəsilməz operatordur. Doğrudan da,

a) $$K(f_1+f_2)=\int_0^1 K(t,s)[f_1(s)+f_2(s)]ds=$$

$$=\int_0^1 K(t,s)f_1(s)ds+\int_0^1 K(t,s)f_2(s)ds=Kf_1+Kf_2$$

b) $$K(\alpha f)=\int_0^1 K(t,s)[\alpha f(s)]ds=\alpha\int_0^1 K(t,s)f(s)ds=\alpha Kf$$

v) Tutaq ki, $f_n(t)$ ardıcıllığı $f(t) \in C[0,1]$ funksiyasına müntəzəm yığılan ardıcllıqdır.

Müntəzəm yığılan funksional ardıcıllıqlar üçün inteqral altında limitə keçmə doğru olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 K(t,s) f_n(s) ds = \int_0^1 K(t,s) f(s) ds$$

yəni $\lim_{n\to\infty} Kf_n = Kf$. Bu isə K -nın kəsilməz operator olması deməkdir.

14.4. Xətti məhdud operatorlar

Fərz edək ki, X, Y Banax fəzalarıdır. $A: X \to Y$ operatoruna baxaq. Əgər istənilən $x \in X$ üçün $Ax = 0$ olarsa. A operatoruna sıfır operator deyilir və $A = 0$ kimi işarə edilir.

Tutaq ki, A operatoru X Banax fəzasında hər yerdə təyin olunmuşdur və qiymətləri də X banax fəzasında yerləşir. Əgər $A \neq 0$ olarsa, aydındır ki, onun $R(A)$ qiymətlər çoxluğu qeyri-məhdud çoxluq olar. Ona görə də A operatoru bütün X fəzasında məhdud operator ola bilməz. Tərifə görə A operatoru o zaman məhdud operator adlanır ki, o məhdud çoxluğu məhdud çoxluğa keçirsin. Tutaq ki, $\bar{S}_1(0) = \{\|x\| \le 1, \ x \in X\}$ X fəzasında yerləşən qapalı kürədir.

Tərif. Təyin oblastı $D(A) = X$, qiymətlər çoxluğu $R(A) \subset X$ olan xətti A operatoru $S_1(0)$ qapalı vahid kürədə məhdud isə, yəni $\{\|Ax\|, \|x\| \le 1\}$ çoxluğu məhdud isə, onda A operatoruna məhdud operator deyilir.

Tərifə görə A məhdud operator isə, onda elə $c > 0$ sabiti vardır ki, $\|x\| \le 1$ şərtini ödəyən istənilən x üçün

$$\|Ax\| \le c \tag{1}$$

Teorem 1. A operatorunun məhdud olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $x \in X$ üçün

$$\|Ax\| \le c\|x\| \tag{2}$$

olmasıdır, burada c ədədi (1) bərabərsizliyinə daxil olan sabitdir.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, A operatoru məhduddur. $x = 0$ olduqda (2) bərabərsizliyinin ödənməsi aydındır.

Tutaq ki, $x \neq 0$. $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ qəbul edək. $\|x'\| = 1$ olduğundan (1) bərabərsizliyinə görə $\|Ax'\| \leq c$, yaxud $\left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C$. A xətti operator olduğu üçün

$$A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} Ax.$$

Onda $\dfrac{1}{\|x\|}\|Ax\| \leq c$, yaxud $\|Ax\| \leq c\|x\|$ alırıq.

Kafilik. Əgər (2) bərabərsizliyi doğru olarsa, onda $\overline{S}_1(0)$ kürəsində, yəni $\|x\| \leq 1$ olduqda $\|Ax\| \leq C$ alıqrıq. Bu isə A-nın məhdud olması deməkdir. Teorem isbat edildi.

A operatorunun məhdudluğunun tərifində A operatorunun vahid kürədə məhdudluğu tələb edilir. Bu şərtdən A operatorunun istənilən məhdud çoxluqda məhdud olduğunu almaq mümkündür.

Teorem 2. Tutaq ki, $M \subseteq X$ məhdud çoxluqdur. Bu halda $\{\|Ax\|, x \in M\}$ çoxluğu da məhduddur.

İsbatı. M məhdud çoxluq olduğundan elə $\overline{S}_R(0)$ kürəsi vardır ki, $M \subseteq \overline{S}_R(0)$. Bu halda istənilən $x \in M$ üçün $\|x\| \leq R$. A məhdud operator olduğu üçün (2) bərabərsizliyinə görə

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \leq cR.$$

alırıq. Bu isə A operatorunun $\overline{S}_R(0)$ kürəsində, xüsusi halda isə, onun hissəsi olan M çoxluğunda məhdud olduğunu göstərir.

Nəticə. Əgər $A-$ xətti məhdud operator isə, onda A operatoru istənilən $S_R(x_0)$ kürəsində də məhduddur, burada $x_0 \in X$ istənilən element, $R > 0$ isə ixtiyari ədəddir.

14.5. Xətti kəsilməz və xətti məhdud operator anlayışlarının ekvivalentliyi

Yuxarıda biz normalaşmış fəzalarda xətti operatorların kəsilməzliyi və məhdudluğu anlayışları ilə tanış olduq və onların bəzi mühüm xassələrini göstərdik.

İndi isə aşağıdakı çox mühüm teoremi isbat edək.

Teorem. Tutaq ki, $A: X \to Y$ – xətti operator, X, Y banax fəzaları və $D(A) = X$. A operatorunun kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt, bu operatorun məhdud olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, A kəsilməz operatordur. Fərz edək ki, teorem doğru deyildir, yəni A qeyri-məhduddur. Onda $A(\overline{S}_1(0))$ çoxluğu qeyri-məhduddur. Buradan alınır ki, istənilən n natural ədədi üçün elə $x_n \in X$, $\|x_n\| \le 1$ vardır ki, $\|Ax_n\| \ge n$. $x_n' = \dfrac{x_n}{n}$ götürək.

$$\|x_n'\| = \frac{\|x_n\|}{n} \le \frac{1}{n} \to 0, \; n \to \infty$$

A kəsilməz operator olduğundan $n \to \infty$ olduqda $Ax_n' \to 0$.

Digər tərəfdən, $\|Ax_n'\| = \dfrac{1}{n}\|Ax_n\| \ge 1$. Alınmış bu ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Yəni, A məhdud operatordur.

Kafilik. Tutaq ki, A məhduddur. Bu halda istənilən x üçün

$$\|Ax\| \le c\|x\|.$$

Buradan $x_n \to 0$ olduqda $Ax_n \to 0$ olmasını, yəni A-nın 0 nöqtəsində kəsilməzliyini və deməli bütün X fəzasında kəsilməzliyini alırıq. Teorem tam isbat olundu.

14.6. Xətti operatorlar fəzası. Xətti operatorun norması

I. Tutaq ki, X və Y istənilən xətti fəzalar, A və B isə X xətti fəzasından Y-ə təsir edən xətti operatorlardır. X fəzasından Y-ə təsir edən operatorların cəmi və ədədə hasilini təyin edək.

İstənilən $x \in X$ elementinə

$$y = (Ax + Bx) \in Y$$

elementini qarşı qoyan operator A və B operatorlarının cəmi adlanır və $C = A + B$ kimi işarə edilir.

A və B xətti operatorlar olduqda onların cəmi olan C operatoru da xəttidir. Doğrudan da istənilən α_1 və α_2 ədədləri və istənilən $x_1, x_2 \in X$ üçün

$$\begin{aligned} C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= (A + B)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \\ &= A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \\ &= \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \alpha_1 Bx_1 + \alpha_2 Bx_2 = \\ &= \alpha_1 (A + B)x_1 + \alpha_2 (A + B)x_2 = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2 \end{aligned}$$

A operatorunun α həqiqi ədədinə hasilini

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax)$$

kimi təyin edək. Bu bərabərlikdən A xətti olduqda αA-nın da xətti olduğunu alırıq.

İndi fərz edək ki, X və Y normalı fəzalardır. Əgər elə M ədədi varsa ki, istənilən $x \in X$ üçün $\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$ olsun, bu halda A operatoru məhdud operator adlanır.

Bu tərifdən alınır ki, $A: X \to Y$ məhdud operator isə, bu zaman $E \subset X$ məhdud çoxluğunun $A(E)$ obrazı Y fəzasında məhdud çoxluq olar. Eyni zamanda A və B operatorları məhdud olduqda $A+B$ və αA operatorları da məhdud operatorlar olar.

X fəzasından Y-ə təsir edən xətti məhdud operatorlar çoxluğu $L(X,Y)$ kimi işarə edilir. Göstərək ki, $L(X,Y)$ çoxluğu xətti fəzadır. Bu çoxluqda aşağıdakı xətti fəza aksiomları ödənilir.

1. İstənilən $x \in X$ üçün $Ax + Bx = Bx + Ax$ olduğundan $(A+B)x = (B+A)x$, yəni $A+B = B+A$
2. İstənilən $x \in X$, $A,B,C \in L(X,Y)$ üçün
$$Ax + (Bx + Cx) = (Ax + Bx) + Cx$$
olduğundan $A + (B+C) = (A+B) + C$
3. İstənilən $x \in X$ üçün, $O_{x=\theta}$ şərtini ödəyən "sıfır" operatoru vardır.
4. İstənilən A operatoru üçün elə $(-A)$ operatoru vardır ki, $A + (-A) = 0$, $-A = (-1)A$.
5. İstənilən $x \in X$ üçün $Ix = x$ şərtini ödəyən "vahid" operator vardır.
6. İstənilən α, β ədədləri üçün $(\alpha\beta)Ax = \alpha(\beta Ax)$ olduğundan
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$
7. İstənilən α ədədli və A, B operatorları üçün
$$\alpha(A+B)x = \alpha[Ax + Bx] = \alpha A(x) + \alpha B(x) = \\ = [\alpha A + \alpha B]x$$
olduğundan $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
8. İstənilən α, β ədədləri və A operatoru üçün
$$(\alpha + \beta)Ax = \alpha A(x) + \beta A(x) = [\alpha A + \beta A]x$$
olduğundan $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

1-8 aksiomlarının ödənməsi $L(X,Y)$ çoxluğunun xətti fəza təşkil etdiyini göstərir. İndi isə göstərək ki, $L(X,Y)$ çoxluğu normalaşmış fəzadır.

Tərif. $\|Ax\| \le M\|x\|$ bərabərsizliyini ödəyən M ədədlərindən ən kiçiyinə A operatorunun norması deyilir və $\|A\|$ kimi işarə edilir.

Tərifə görə $\|A\|$ normması aşağıdakı iki şərti ödəyir:

1) $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

2) İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $x_\varepsilon \in X$ elementi vardır ki, $\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$.

İsbat etmək olar ki, xətti məhdud A operatorunun normasını aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə təyin etmək olar:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|$$

və ya

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Bu bərabərliklərdən istifadə edərək $\|A\|$ normasının aşağıdakı şərtləri ödəməsini göstərmək olar.

1. $\|A\| \ge 0$, bərabərlik halı yalnız $A = 0$ sıfır operator olduqda mümkündür
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

Misal. $C[a,b]$ fəzasında $y = Ax$ operatorunu $y(t) = tx(t)$ bərabərliyi ilə təyin edək. $x(t) \in C[a,b]$ elementinin norması

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

kimi təyin edildiyindən

$$\|y\| = \max_{a \le t \le b} |tx(t)| \le b \max_{a \le t \le b} |x(t)| = b\|x\|$$

Bu bərabərsizlikdən $\|Ax\| = \|y\| \le b\|x\|$, ona görə də $\|A\| \le b$ alarıq. $a \le t \le b$ olduqda b ədədi sonuncu bərabərsizliyi ödəyən ən kiçik ədəddir. Ona görə də $\|A\| = b$ olar.

$$\max_{a \le t \le b} |y_n(t) - y(t)| \le b \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)|$$

bərabərsizliyindən A operatorunun kəsilməzliyini alırıq.

14.7. Xətti operatorlara aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. R_p^n ilə n-ölçülü $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ həqiqi vektorlar çoxluğunu işarə edək, belə ki, x elementinin norması

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty$$

kimi təyin edilir. Xüsusi halda, $p=1$ olduqda R_1^n, $p=2$ olduqda R_2^n, $p=\infty$ olduqda isə R_∞^n fəzalarını alırıq. R_∞^n fəzasında norma $\|x\|=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k|$ kimi təyin edilir.

n ölçülü fəzanın özünə inikası

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ i=1,2,...,n, \qquad (1)$$

(1) tənliklər sistemi vasitəsilə verilir $A:R_\infty^n\to R_\infty^n$ olduğu halda

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

olduğunu göstərin.

Həlli. 1) Əgər $A:R_\infty^n\to R_\infty^n$ isə, bu halda

$$\|y\|=\|Ax\|=\max_{1\le i\le n}|y_i|=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\|x\|,$$

buradan

$$\|A\|_\infty\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\alpha\ .$$

Elə i_0 nömrəsi götürək ki, $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i_0 j}|=\alpha$ olsun.

$x_0=(signa_{i_0 1},signa_{i_0 2},....,signa_{i_0 n})$ vektorunu götürək. Aydındır ki, $\|x_0\|\le 1$. Onda

$$\|A\|_\infty=\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\ge\|Ax_0\|=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}signa_{i_0 j}\right|\ge$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \, signa_{i_0 j} = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right| = \alpha$$

$A : R_1^n \to R_1^n$. Asanlıqla almaq olar ki,

$$\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| = \alpha_1$$

Elə j_0 nömrəsi tapaq ki, $\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij_0} \right| = \alpha_1$ olsun.

$x_0 = (0,...,0,1,0,...,0)$ vektorunu götürək. (1 ədədi j_0 nömrəli yerdə durur). Onda yaza bilərik:

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij_0} \right| = \alpha_1$$

Buradan $\|A\|_1 = \alpha_1$ alarıq.

2. Tutaq ki, $K(t,s)$ funksiyası $[a,b] \times [a,b]$ kvadratında kəsilməz funksiyadır və $0 < \alpha < 1$. Göstərin ki,

$$Af(t) = \int_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} f(s) ds$$

operatoru $A : C[a,b] \to C[a,b]$ məhdud operatordur.

Həlli. Əvvəlcə göstərək ki, $J(t) = \int_a^b \frac{ds}{|t-s|^\alpha}$ kəsilməz funksiyadır. Bu məqsədlə onu aşağıdakı şəkildə göstərək.

$$J(t) = \int_a^t \frac{ds}{|t-s|^\alpha} + \int_t^b \frac{ds}{|t-s|^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left[(t-a)^{1-\alpha} + (b-t)^{1-\alpha} \right].$$

Buradan görünür ki, $J(t)$ kəsilməz funksiyadır. $[a,b]$ parçasında bu funksiya maksimum qiymətini $t = \frac{a+b}{2}$ nöqtəsində alır.

$$\max_{a \leq t \leq b} J(t) = \frac{2^\alpha (b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Onda yaza bilərik:

$$\|Af\| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} f(s) ds \right| \leq \max \int_a^b \frac{|K(t,s)|}{|t-s|^\alpha} |f(s)| ds \leq$$

$$\leq M \max J(t) \|f\|, \; M = \max_{a \leq t \leq b} |K(t,s)|$$

Buradan A operatorunun məhdud olduğunu və

$$\|A\| \le \frac{2^{\alpha}(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} M$$

olduğunu alırıq.

3. İstənilən $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ elementi üçün $A:R^n \to l_2$,

$$Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{1},...,\frac{x_n}{1},\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2},...,\frac{x_n}{2},...,\frac{x_1}{k},\frac{x_2}{k},...,\frac{x_n}{k},...\right)$$

kimi təyin edilmiş A operatorunun normasını tapın.

Həlli.

$$\|Ax\|_{l_2}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\|x\|_{R^n}$$

bərabərliyindən $\|A\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$ olduğunu alırıq.

4. Tutaq ki, $\alpha\ge 0$ qeyd olunmuş ədəddir. Əvvəlcə göstərin ki, $[0,+\infty)$ intervalında kəsilməz və $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} e^{\alpha x}|f(x)|<+\infty$ şərtini ödəyən bütün funksiyalar çoxluğu C_α

$$\|f\|_\alpha=\sup_{x\in[0,+\infty)} e^{\alpha x}|f(x)|$$

normasına nəzərən Banax fəzasıdır.

Göstərin ki,

$$Af=\int_0^x e^{-\beta(x-s)}f(s)ds$$

bərabərliyi ilə təyin edilmiş A operatoru $\beta>\alpha>\gamma\ge 0$ olduqda C_α fəzasından C_γ fəzasına təsir edən xətti məhdud operatordur. A operatorunun normasını tapın.

Həlli. A operatorunun xətti olduğunu bilavasitə tərifə görə asanlıqla yoxlamaq olar.

İstənilən $f(t)\in C_\alpha$ üçün yaza bilərik:

$$\|Af\|_\gamma=\sup_{x\in[0,+\infty)}\left(e^{\gamma x}\left|\int_0^x e^{-\beta(x-s)}f(s)ds\right|\right)=$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} \left(e^{(\gamma-\beta)x} \left| \int_0^x e^{(\beta-\alpha)s} e^{\alpha s} f(s) ds \right| \right) \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,+\infty)} \left(e^{(\gamma-\beta)x} \int_0^x e^{(\beta-\alpha)s} ds \right) \| f \|_\alpha =$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} \left(\frac{e^{(\gamma-\beta)x} - e^{(\gamma-\beta)x}}{\beta-\alpha} \right) \| f \|_\alpha .$$

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{(\gamma-\alpha)x} - e^{(\gamma-\beta)x}\right)$ funksiyasını götürək və onun ekstermumunu araşdıraq. Göründüyü kimi $\varphi(0)=0$ və $\beta>\alpha>\gamma$ olduqda $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. Yoxlamaq olar ki, $x_0 = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\ln\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ nöqtəsi funksiyanın maksimum nöqtəsidir və

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}} - \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}} \left[1 - \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{-1} \right] =$$

$$= \frac{(\alpha-\gamma)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\alpha}}}{(\beta-\gamma)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}} = \left(\frac{(\alpha-\gamma)^{\alpha-\gamma}}{(\beta-\gamma)^{\beta-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} = L_{\alpha,\beta,\gamma}$$

Aydındır ki, $\|A\| \leq L_{\alpha,\beta,\gamma}$. $f_0(x) = e^{-\alpha x}$ funksiyasını götürək. Asanlıqla taparıq ki, $\| f_0 \|_\alpha = 1$. Onda

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\alpha \leq 1} \|Ax\|_\gamma \geq \|Af_0\|_\gamma =$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} \left(e^{\gamma x} \left| \int_0^x e^{-\beta(x-\alpha)} e^{-\alpha s} ds \right| \right) = \sup_{x\in[0,+\infty)} \varphi(x) = L_{\alpha,\beta,\gamma} .$$

Bu onu göstərir ki, $\|A\| = L_{\alpha,\beta,\gamma}$ və $A \in L(C_\alpha, C_\gamma)$. Əgər $\gamma = \alpha$ olarsa, bu halda $A \in L(C_\alpha, C_\gamma)$ və $\|A\| = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$ olduğunu göstərə bilərik.

5. Tutaq ki, $E = C[0,+\infty)[0,+\infty)$ intervalında kəsilməz və $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |f(x)| < \infty$ şərtini ödəyən funksiyalar fəzasıdır. $A: E \to E$, $(Af)(x) = xf(x),\ x \in [0,+\infty)$ operatorunun məhdud olub olmadığını göstərin.

Həlli. A-nın xətti operator olduğunu asanlıqla göstərmək olar. Bu operatorun təyin oblastı $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |xf(x)| < \infty$ şətrini ödəyən $f(x)$ funksiyalarından ibarətdir. E çoxluğuna daxil olan $f(x)$ funksiyası yalnız o zaman $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |xf(x)| < \infty$ şərtini ödəyər ki, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |(x+1)f(x)| < \infty$ olsun. Buradan alırıq ki, A operatorunun təyin oblastı $D(A)$ çoxluğu $|f(x)| \le \dfrac{C}{x+1}$ şərtini ödəyən funksiyalarından ibarətdir. ($D(A)$-ya daxil olan hər bir funksiyaya bir C sabiti uyğundur). Aydındır ki, $D(A) \ne E$ (məsələn, $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \in E$, amma $f(x) \overline{\in} D(A)$).

Göstərək ki, A qeyri-məhduddur. $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$, $n \in N$ ardıcıllığını götürək. $|f_n(x)| = \dfrac{x}{n+x} \le \dfrac{n}{1+x}$ olduğu üçün $f_n(x) \in D(A)$. Eyni zamanda $\|f_n\| = 1$ və

$$\|Af_n\| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{nx}{n+x} = n .$$

Buradan

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f\in D(A)}} \|Af\| \ge \|Af_n\| = n,\ n \in N$$

olduğunu nəzərə alsaq, $\|A\| = +\infty$ alarıq.

6. $A: l_2 \to l_2$ operatoru $x = (x_1, x_2, ...,) \in l_2$ elementinə qarşı $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$, $\lambda_n \in R$ elementini qarşı qoyur. $\{\lambda_n\}$ ədədlər ardıcıllığı hansı şərtləri ödödikdə A operatorunun $D(A)$ təyin oblastı bütün l_2 fəzası ilə üst-üstə düşər. $\{\lambda_n\}$ ardıcıllığı hansı şərtləri ödədikdə A məhdud operatordur və onun norması nəyə bərabərdir?

Həlli. $A: l_2 \to l_2$ olduğundan istənilən $x \in l_2$ üçün $\|Ax\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 < \infty$ olmalıdır.

Burada aşağıdakı iki hal mümkündür:

a) $\{\lambda_n\}$ ardıcıllığı məhduddur, yəni $\sup\limits_n |\lambda_n| < C < +\infty$. Onda istənilən $x \in l_2$ üçün

$$\|Ax\|^2 = c^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = c^2 \|x\|^2$$

Buradan $\|A\| \le c$ olduğunu, yəni A-nın məhdud olduğunu alırıq. Bu halda $D(A) = l_2$, çünki istənilən $x \in l_2$ üçün $Ax \in l_2$.

b) $\{\lambda_n\}$ ardıcıllığı qeyri-məhduddur: $\sup\limits_n |\lambda_n| = +\infty$. Bu halda A operatorunun təyin oblastı olan $D(A)$ çoxluğu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 < \infty$ şərtini ödəyən $x \in l_2$ vektorlarından ibarətdir, yəni $D(A) \ne l_2$.

Məsələn, $\lambda_n = n$ olarsa, bu halda qeyri-hesabi sayda

$$M_\alpha = \left\{ x : x = \left(1, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \frac{1}{3^{1+\alpha}}, \dots, \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \dots \right), 0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \right\} \subset l_2$$

çoxluğu $D(A)$ təyin oblastına daxil deyildir.

Göstərək ki, bu halda A operatoru qeyri-məhduddur. Bu məqsədlə

$$e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \dots \right) \in D(A)$$

götürək. Göründüyü kimi $\|Ae_n\| = |\lambda_n| < \infty$. İstənilən $n \in N$ və $\|e_n\| = 1$ üçün

$$\sup_n \|Ae_n\| = \sup_n |\lambda_n| < +\infty$$

Deməli,

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\| = +\infty,$$

yəni A qeyri-məhduddur.

İndi isə göstərək ki, əgər A məhdud operator isə, yəni $\|A\| \le C = \sup|\lambda_n| < +\infty$, $D(A) = l_2$ olduğu halda $\|A\| = C$. Bunun üçün $\|A\| \ge C$ olduğunu göstərmək lazımdır, çünki əks bərabərsizliyi yuxarıda göstərmişik

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ae_n\|}{\|e_n\|} = \|Ae_n\| = |\lambda_n|$$

$\|A\| \ge |\lambda_n|$ istənilən $n \in N$ üçün, onda

$$\|A\| \ge \sup_n |\lambda_n| = c$$

yəni $\|A\| \ge C$ və $\|A\| = C = \sup|\lambda_n|$ olduğunu alırıq.

7. Elə E xətti fəzası və bu xətti fəzada təsir edən A və B operatorları göstərin ki, $\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$ olsun.

Həlli. $E = C[0,1]$ fəzasını götürək və bu fəzada A və B operatorlarını aşağıdakı qaydada təyin edək:

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)dt, \; (Bf)(x) = xf(x).$$

A və B xətti operatorlardır.

A operatorunun normasını təyin edək:

$$\|Af\| = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t)dt \right| \le \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \max_{0\le x\le 1} \int_0^x dt = \|f\|$$

Buradan $\|A\| \le 1$. $f_0(t) \equiv 1$ götürək. Buradan

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \ge \|Af_0\| = 1$$

yəni $\|A\| = 1$ alarıq.

Eyni qayda ilə $\|B\| = 1$ olduğunu da göstərə bilərik. Doğrudan da

$$\|Bf\| = \max_{0\le x\le 1} |xf(x)| \le \max_{0\le x\le 1} |x| \max_{0\le x\le 1} |f(x)| \le \|f\|,$$

alırıq ki, $\|B\| \le 1$. $f_0(x) \equiv 1$ funksiyasını götürək. Bu halda

$$\|B\| \ge \|Bf_0\| = \max_{0\le x\le 1} |xf_0(x)| = \max_{0\le x\le 1} |x| = 1$$

Nəticədə $\|B\| = 1$ alırıq.

İndi isə AB operatorunun normasını tapaq:

$$(AB)(f(x)) = A[Bf] = A[xf(x)] = \int_0^x tf(t)dt$$

$$\|(AB)f\| = \max_{0\le x\le 1} \left| \int_0^x tf(t)dt \right| \le \max_{0\le x\le 1} |f(x)| \max_{0\le x\le 1} \left| \int_0^x tdt \right| = \frac{1}{2}\|f\|$$

Buradan $\|AB\| \le \frac{1}{2}$. Əgər $f_0(x) \equiv 1$ qabul etsək,

$\|(AB)f_0\| = \frac{1}{2}$ və $\|AB\| = \frac{1}{2}$ alarıq.

Nəticədə

$$\|AB\| = \frac{1}{2} < 1 = \|A\| \cdot \|B\|$$

olduğunu alırıq.

8. Göstərin ki,

$$A:(x,y)\to(u,\upsilon)$$
$$\left.\begin{aligned} u &= ax+ay \\ \upsilon &= -bx-by \end{aligned}\right\}$$
bərabərliyi ilə təyin edilən operator $A:R_2^2\to R_2^2$ xətti operatordur. A operatorunun normasını tapın.

9. $C[1,2]$ fəzasını özünə inikas etdirən $Af=x^2f(1)$ operatorunun xətti olduğunu göstərin və normasını tapın.

10. $C[0,1]$ fəzasını özünə inikas etdirən
$$Af=\int_0^1 xtf(t)dt$$
operatorunun xətti olduğunu göstərin və normasını tapın.

11. $C[0,3]$ fəzasında təsir edən $Af=\int_0^x f(t)dt$ operatorun xətti olduğunu göstərin və normasını tapın.

12. l_2 fəzasında təsir edən və $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$ elementinə qarşı $x=(x_2,x_3,...)\in l_2$ elementini qarşı qoyan A operatorun xətti olduğunu göstərin və normasını tapın.

13. Fərz edək ki, $K(x,y)$ funksiyası
$$D=\{(x,y)|\ a\le x\le b,\ a\le y\le b\}$$
kvadratında kəsilməz funksiyadır
$$Af=\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$
operatorunun $C[a,b]$ fəzasında xətti kəsilməz operator olduğunu göstərin.

14. Fərz edək ki, $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}^2$ yığılan ikiqat sıradır.

Göstərin ki, l_2 fəzasının $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ elementini $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ elementinə aşağıdakı bərabərliklərlə çevirən A operatoru xətti kəsilməz operatordur
$$y_m=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}x_n,\ m=1,2,...$$

15. Göstərilən fəzalarda təsir edən operatorların xətti məhdud operatorlar olduöunu göstərin və normasını tapın.

a) $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad Af=\int_0^x f(t)dt$;

b) $A: C[-1,1] \to C[0,1], \quad Af = f(t);$

v) $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad Af = x^2 f(0);$

q) $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad Af = f(x^2);$

d) $A: C^{(1)}[a,b] \to C[a,b], \quad Af = f(x);$

e) $A: C^{(1)}[a,b] \to C[a,b], \quad Af = \dfrac{df}{dx};$

j) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Af = x\int_0^1 f(t)dt;$

z) $A_\lambda : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad A_\lambda f = \begin{cases} f(x), & x \le \lambda,\ \lambda \in (0,1) \\ 0, & x > \lambda,\ \lambda \in (0,1) \end{cases};$

16. $\alpha > 0$ hansı qiymətlərində $Af = f(x^\alpha)$ kimi təyin edilmiş A operatoru $C[0,1]$ fəzasında xətti və kəsilməz olar? A operatorunun normasını tapın.

17. $\alpha > 0$ hansı qiymətlərində $Af = f(x^\alpha)$ operatoru $L_2[0,1]$ fəzasında xətti və kəsilməz olar? A operatorunun normasını tapın.

18. $p(x), q(x) \in L_2[a,b]$. Göstərin ki,

$$Af = \int_a^b p(x)q(t)f(t)dt$$

operatoru $L_2[0,1]$ fəzasında xətti və kəsilməz opertordur. A operatorunun normasını tapın.

19. Hansı $a(x)$ funksiyaları üçün $Af = a(x)f(x)$ operatoru $C[0,1]$ fəzasında kəsiməz operatordur. A operatorunun normasını tapın.

20. Göstərin ki, $Af = xf(x)$ və $Bf = \int_0^x f(t)dt$, $t \in [0,1]$ operatorları $L_2[0,1]$ fəzasında xətti və kəsilməz opertorlardır, amma bu operatorlar kommutativ deyildir. Yəni $AB \ne BA$

XV FƏSİL
TƏRS OPERATORLAR

15.1. Tərs operator, onun xassələri və varlığı şərtləri

Fərz edək ki, X və Y ixtiyari təbiətli elementlərdən ibarət fəzalardır. Yuxarıda biz $A: X \to Y$ operatorunu (inikasını) təyin etdik. Fərz edək ki, $D(A)$ bu operatorun təyin oblastı, $R(A)$ isə qiymətlər çoxluğudur. Tərifə görə A operatoru hər bir $x \in D(A)$ elementinə qarşı müəyyən $y \in R(A)$ elementini qarşı qoyur. Bu zaman hər bir $x \in D(A)$ elementinə yeganə $y \in R(A)$ qarşı qoyulduğu fərz edilir.

Əgər bu inikas zamanı hər bir $y \in R(A)$ elementi yeganə $x \in D(A)$ elementinə qarşı qoyularsa, onda deyirlər ki, A operatoru X fəzasını Y fəzasına qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirir. Qarşılıqlı birqiymətli inikas zamanı hər bir $y \in Y$ elementi bir $x \in X$ elementinə qarşı qoyulduğundan y-ə qarşı x elementini qarşı qoyan operator təyin etmək olar. Bu operatora, yəni $y \in Y$-ə qarşı $x \in X$ elementini qarşı qoyan operatora A operatorunun tərsi olan operator deyilir və A^{-1} kimi işarə edilir. Onda $x = A^{-1}y$ olar.

Yuxarıda deyilənlərdən alırıq ki,

$$D\left(A^{-1}\right) = R(A), \ R\left(A^{-1}\right) = D(A).$$

Eyni zamanda $A\left(A^{-1}y\right) = y$ və $A^{-1}(Ax) = x$ olduğunu alırıq.

Əgər inikas zamanı ixtiyari $x_1, x_2 \in X$ üçün $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ isə və $x_1 \neq x_2$ olduqda $y_1 \neq y_2$ olarsa, bu halda A operatoruna (inikasına) inyektiv inikas deyilir. Əgər Y çoxluğunun ixtiyari elementi A operatoru ilə aparılan inikas zamanı hər hansı $x \in X$ elementinin obrazıdırsa, onda A operatoruna suryektiv inikas deyilir.

Əgər A operatoru həm inyektiv, həm də suryektiv isə, onda A-ya biyektiv inkas deyilir. Aydındır ki, hər bir biyektiv inikas X və Y fəzaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır.

Bəzən tərs operatorun tərifini aşağıdakı kimi də daxil edirlər.

Tərif 1. Əgər istənilən $y \in R(A)$ elementi üçün $Ax = y$ tənliyinin yeganə həlli olarsa, onda deyirlər ki, A operatorunun tərs operatoru vardır.

Qeyd edək ki, bu tərif tərs operatorun yuxarıda verdiyimiz tərifi ilə eynigüclüdür. Doğrudan da A operatorunun tərsi varsa, onda ixtiyari $y \in R(A)$ elementinə yeganə $x \in D(A)$ elementini qarşı qoymaq olar. Bu uyğunluğu yaradan operatora A operatorunun tərsi deyilir və A^{-1} ilə işarə edirlər.

Aşağıdakı təklif doğrudur: Əgər A operatoru xəttidirsə və onun A^{-1} tərs operatoru varsa, onda A^{-1} operatoru da xəttidir.

Tərs operatorun tərifinə görə $D(A^{-1}) = R(A)$ olduğundan $D(A^{-1})$ xətti çoxobrazlıdır. $y_1, y_2 \in R(A)$ olduqda elə $x_1, x_2 \in D(A)$ elementləri vardır ki, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. A xətti operator olduğu üçün istənilən $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ həqiqi ədədləri üçün

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Tərs operatorun tərifinə görə

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2). \tag{1}$$

Digər tərəfdən $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$ olduğundan alarıq:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \tag{2}$$

(1) və (2) bərabərliklərindən

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 \alpha_2 A^{-1} y_2$$

alırıq. Bu A^{-1} operatorunun xətti operator olduğunu göstərir.

Tərif 2. $N(A) = \{x : Ax = 0\}$ çoxluğuna A operatorunun nüvəsi deyilir.

Göründüyü kimi operatorun nüvəsi onun sıfırlarından ibarət çoxluqdur və boş çoxluq deyildir, çünki $0 \in N(A)$.

Teorem 1. $A : D(A) \to R(A)$ operatorunun qarşılıqlı birqiymətli olması üçün zəruri və kafi şərt operatorun $N(A)$ nüvəsinin yalnız "0" elementdən ibarət olmasıdır.

İsbatı. Kafiliyi göstərək. Fərz edək ki, $N(A) = \{0\}$. Göstərək ki, A qarşılıqlı birqiymətli inikasdır. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, A qarşılıqlı birqiymətli deyildir. Onda elə $y \in R(A)$ elementi vardır ki, onun iki müxtəlif x_1 və x_2 proobrazları vardır: $y = Ax_1$, $y = Ax_2$. Buradan

$$y - y = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = 0$$

alırıq. Bu bərabərlikdən $x_1 - x_2 \in N(A)$ və $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ alırıq. Alınmış ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Deməli inikas qarşılıqlı birqiymətlidir.

İndi isə zəruriliyi göstərək. Fərz edək ki, inikas qarşılıqlı birqiymətlidir, amma $N(A) \neq \{0\}$.

İxtiyari $y \in R(A)$ elementi götürək. A operatoru qarşılıqlı birqiymətli olduğundan $Ax = y$ tənliyinin yeganə x' həlli vardır. Onda $z \in N(A)$, $z \neq 0$ elementi götürsək, $Az = 0$ olduğundan $x'' = x' + z$ elementi üçün də

$$Ax'' = Ax' + Az = y + 0 = y$$

olduğunu alarıq. Bu o deməkdir ki, $x' + z$ elementi də $Ax = y$ tənliyinin həllidir. Onda alırıq ki, y elementi A inikası zamanı iki müxtəlif x' və x'' elementlərinin obrazıdır. Bu isə A inikasının qarşılıqlı birqiymətli olması şərtinə ziddir. Deməli fərziyyəmiz doğru deyildir. Yəni, $N(A) = \{0\}$ olmalıdır.

Fərz edək ki, X və Y normalaşmış fəzalardır və $A: X \to Y$.

Teorem 2. $A: D(A) \to R(A)$ operatorunun A^{-1} tərsinin varlığı və məhdudluğu üçün

$$\|Ax\| \ge m\|x\| \tag{3}$$

bərabərsizliyinin ödənməsi həm zəruri, həm də kafidir.

İsbatı. Kafilik. (3) bərabərsizliyindən isitifadə edərək alırıq ki, $A: X \to Y$ qarşılıqlı birqiymətli inikasdır. Doğrudan da $y = Ax_1$ və $y = Ax_2$ olarsa,

$$0 = \|Ax_1 - Ax_2\| \ge m\|x_1 - x_2\|$$

bərabərsizliyindən $x_1 = x_2$ alarıq. Ona görə də A^{-1} tərs operatoru vardır və A xətti olduqda A^{-1}-də xəttidir.

Göstərək ki, A^{-1} məhdud operatordur. Istənilən $x \in D(A)$ və $y \in R(A)$ üçün $y = Ax$, $x = A^{-1}y$ olarsa, (3) bərabərsizliyinə görə

$$\|x\| = \|A^{-1}y\| \le \frac{1}{m}\|Ax\| = \frac{1}{m}\|y\|.$$

Buradan alırıq ki, A^{-1} məhdud operatordur və $\|A^{-1}\| \le \dfrac{1}{m}$.

Zərurilik. Fərz edək ki, A^{-1} tərs operatoru vardır və $D(A^{-1})$-də məhduddur. Onda elə $c > 0$ ədədi vardır ki, ixtiyari $y \in R(A)$ üçün

$$\|A^{-1}y\| \le c\|y\| \tag{4}$$

$y = Ax$, $x = A^{-1}y$ olduğundan (4) bərabərsizliyindən

$$\|Ax\| \ge \frac{1}{c}\|x\|$$

alarıq. Yəni (3) bərabərsizliyi ödənilir.

Tərif 3. $A: X \to Y$ xətti operatorunun qiymətləri çoxluğu $R(A) = Y$ və A^{-1} operatoru məhdud olarsa, onda A operatoruna kəsilməz tərsi olan operator deyilir.

Teorem 2-dən alırıq ki, X-dən Y-ə təsir edən A operatorunun kəsilməz tərsinin varlığı üçün istənilən $x \in D(A)$ üçün (3) bərabərsizliyinin ödənməsi və $R(A) = Y$ olması zəruri və kafidir.

Teorem 3. Fərz edək ki, $A: X \to X$ xətti məhdud operator, I isə vahid operatordur. Əgər $\|A\| \le q < 1$ olarsa, onda $I - A$ operatorunun kəsilməz tərsi vardır və $\|(I - A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-q}$ doğrudur.

İsbatı. Tutaq ki, $\|A\| \le q < 1$. Onda

$$\|(I-A)x\| = \|Ix - Ax\| = \|x - Ax\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq$$
$$\geq \|x\| - \|A\| \cdot \|x\| \geq \|x\| - q\|x\| = (1-q)\|x\| \qquad (5)$$

(5) bərabərsizliyindən alırıq ki, $I - A$ operatoru teorem 2-nin şərtlərini ödəyir. Ona görə də onun $(I-A)^{-1}$ tərsi vardır. Bu xətti, məhdud operatordur və

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-q}.$$

İndi isə $I - A$ operatorunun qiymətlər çoxluğunun bütün X fəzası ilə üst-üstə düşdüyünü göstərək: $R(I-A) = X$. İxitiyari $y \in X$ elementi götürək və $Bx = Ax + y$ bərabərliyi ilə B operatoru təyin edək.

Ixtiyari $x_1, x_2 \in X$ elementləri üçün alarıq:

$$\|Bx_1 - Bx_2\| = \|Ax_1 + y - Ax_2 - y\| = \|Ax_1 - Ax_2\| \leq$$
$$\leq \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq q\|x_1 - x_2\|$$

$q < 1$ olduğu üçün B operatoru X fəzasında sıxan operatordur. Ona görə də elə $x \in X$ elementi vardır ki, $Bx = x$, yəni $Ax + y = x$, yaxud $(I-A)x = y$ olar. Buradan alırıq ki, istənilən $y \in X$ elementi $I - A$ operatorunun qiymətlər çoxluğuna daxildir. Ona görə də $I - A$ operatorunun kəsilməz tərsi vardır.

Aşağıdakı teorem də doğrudur.

Teorem 4. (Banax). Xətti kəsilməz A operatoru X banax fəzasını bütün Y banax fəzasına qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirirsə, onda Y fəzasını X fəzasına inikas etdirən xətti kəsilməz A^{-1} tərs operatoru vardır.

15.2. Tərs operatorlara aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Əgər $A: l_2 \to l_2$ operatoru aşağıdakı kimi təyin edilərsə, onun kəsilməz tərsi olarmı?

a) $Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, \ldots)$;

b) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots)$;

v) $Ax = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - 2x_1, x_4, x_5, \ldots)$.

burada $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$.

Həlli. a) Göründüyü kimi A operatorunun təyin oblastı bütün l_2 fəzası ilə üst-üstə düşür və $\|A\| = 1$-dir, deməli $A \in L(l_2, l_2)$. Göstərək ki, A kəsilməz tərsi olan operatordur. l_2 banax fəzası olduğu üçün A-nın kəsilməz tərsinin olması üçün istənilən $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_2$ üçün $Ax = y$ tənliyinin birqiymətli həll oluna bilməsini göstərmək kifayətdir. Baxılan halda $Ax=y$ tənliyi aşağıdakı kimi olar

$$(x_3,x_1,x_2,x_4,x_5,\dots)=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,\dots) \qquad (\alpha)$$

Buradan

$$x_1=y_2,\ x_2=y_3,\ x_3=y_1,\ x_k=y_k,\ k\ge 4$$

Deməli

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\dots)=(y_2,y_3,y_1,y_4,y_5,\dots)$$

Yəni, (α) tənliyinin həlli vardır və

$$x=A^{-1}y=(y_2,y_3,y_1,y_4,\dots)$$

şəklindədir. Bu həll yeganədir.

$$A^{-1}\in L(l_2,l_2),\ \ \|A^{-1}\|=1.$$

b) Bu halda da A operatorunun təyin oblastı l_2 fəzası ilə üst-üstə düşür. İstənilən $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_2$ elementi üçün

$$\|Ax\|^2=(x_1+2x_2)^2+(x_1-x_2)^2+x_3^2+x_4^2+\dots=$$
$$=2x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2+x_3^2+x_4^2+\dots\le 3x_1^2+6x_2^2+x_3^2+x_4^2+\dots\le$$
$$\le 6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots)=6\|x\|^2$$

Buradan $\|A\|=\sqrt{6}$ alarıq, yəni $A\in L(l_2,l_2)$. Göstərək ki, istənilən $y=(y_1,y_2,\dots)\in l_2$ üçün $Ax=y$ tənliyinin yeganə həlli vardır

$$(x_1+2x_2,x_1-x_2,x_3,x_4,\dots)=(y_1,y_2,y_3,y_4,\dots) \qquad (\beta)$$

(β) tənliyindən alırıq ki, $x_1+2x_2=y_1$, $x_1-x_2=y_2$, $x_k=y_k$, $k\ge 3$, buradan $x_1=\dfrac{y_1+2y_2}{3}$, $x_2=\dfrac{y_1-y_2}{3}$, $x_k=y_k$, $k\le 3$ taparıq. Onda tənliyin həlli

$$x=\left(\frac{y_1+2y_2}{3},\frac{y_1-y_2}{3},y_3,y_4,\dots\right)=A^{-1}y$$

kimi olar.

$x=A^{-1}y$ həlli birqiymətli təyin edilir və $A^{-1}\in L(l_2,l_2)$.

v) A operatoru bütün l_2 fəzasında təyin edilmişdir və l_2 fəzasında məhduddur. Asanlıqla göstərmək mümkündür ki, A operatorunun nüvəsi $\ker A=\{x\in l_2, Ax=0\}$ elə $x\in l_2$ vektorlarından ibarətdir ki, onun birinci üç koordinatları $x_1=x_2$, $x_3=-x_2$ münasibəti ilə bağlıdır və digər bütün koordinatları sıfırlardan ibarət olan vektordur. Buradan alırıq $\ker A\ne\{0\}$. Ona görə də A operatoru l_2 fəzasını $R(A)$-ya qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirmir və onun məhdud tərsi yoxdur. Əgər A-nın məhdud tərsi olsaydı, onda istənilən $x\in l_2$ üçün elə m ədədi olardı ki,

$$\|Ax\| \geq m\|x\|.$$

Bu bərabərsizlikdən isə A-nın l_2 və $R(A)$ arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratması alınırdı. Əgər $x \in \ker A$ olarsa, $Ax = 0$ və $\|x\| = 0$, $x = 0$ alarıq. Bu onu göstərir ki, $\ker A = \{0\}$. Amma yuxarıda gördük ki, $\ker A \neq \{0\}$. Alınmış ziddiyyət onu göstərir ki, A-nın məhdud tərsi ola bilməz.

2. Tutaq ki, A operatoru $C[0,1]$ fəzasında

$$Af = \int_0^x f(t)dt, \ x \in [0,1]$$

bərabərliyi ilə təyin edilir. Göstəyin ki, A operatorunun məhdud tərsi yoxdur.

Həlli. Göründüyü kimi A operatorunun təyin oblastı bütün $C[0,1]$ fəzası ilə üst-üstə düşür, A operatoru məhdud operatordur və $\|A\| = 1$.

$\int_0^x f(t)dt = 0$, $x \in [0,1]$ bərabərliyindən $f(t) = 0$ alınır. Yəni, $\ker A = \{0\}$.

A operatorunun qiymətlər çoxluğu $R(A)$ $C[0,1]$ fəzasında kəsilməz diferensiallanan $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, $g(0) = 0$ şəklində funksiyalardan ibarət xətti çoxobrazlıdır. $\ker A = \{0\}$ olduğundan A operatoru $C[0,1]$ fəzasını $R(A)$-ya qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirir. Ona görə də $R(A)$-da təyin edilmiş və $R(A)$-nı $C[0,1]$-ə birqiymətli inikas etdirən A^{-1} tərs operatoru vardır. Asanlıqla görmək olar ki,

$$A^{-1}f = \frac{df}{dx}, \ x \in [0,1], \ f(x) \in R(A)$$

Doğrudan da, $f(x) \in R(A)$ isə, onda

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x),$$

çünki $f(0) = 0$ və $\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

İndi isə göstərək ki, A^{-1} məhdud deyildir. Bu məqsədlə $f_n(x) = \sin nx$ $(n \in N)$ ardıcıllığını götürək. Göründüyü kimi istənilən $n \in N$ üçün $f_n(x) \in D(A^{-1}) = R(A)$ və $\|f_n(x)\| \leq 1$. $\|A^{-1}f_n\| = n$ olduğundan

$$\sup_{\substack{f\in D(A^{-1})\\ \|f\|\le 1}} \left\|A^{-1}f_n\right\| = +\infty .$$

Buradan A^{-1} operatorunun qeyri-məhdud olması alınır.

Qeyd. Bu misal göstərir ki, bütün fəzada təyin edilmiş məhdud operatorun bütün fəza ilə üst-üstə düşməyən hər hansı xətti çoxobrazlıda təyin edilmiş qeyri-məhdud tərs operatoru ola bilər .

3. $C[0,1]$ fəzasından $C[0,1]$-ə təsir edən və

$$Af = f(x) - \int_0^1 xtf(t)dt$$

bərabərliyi ilə təyin edilən A operatorunun tərsini tapın.

Həlli. $f(x)\in C[0,1]$ olduğundan $\int_0^1 tf(t)dt$ inteqralı vardır və sonlu ədəddir.

$\alpha = \int_0^1 tf(t)dt$ işarə edək. Bu halda $Af = f(x) - \alpha x$.

$Af = g$ götürək. Buradan $f(x) - \alpha x = g(x)$, yaxud $f(x) = g(x) + \alpha x$. Hər tərəfi x-ə vursaq

$$xf(x) = xg(x) + \alpha x^2$$

olar. Bu bərabərliyi $[0,1]$ parçasında inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx + \alpha\int_0^1 x^2dx$$

Buradan

$$\alpha = \int_0^1 xg(x)dx + \alpha\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \int_0^1 xg(x)dx + \frac{\alpha}{3}$$

$$\frac{2\alpha}{3} = \int_0^1 xg(x)dx,\ \alpha = \frac{3}{2}\int_0^1 xg(x)dx .$$

α-nın bu qiymətini nəzərə alsaq

$$f(x) = g(x) + \frac{3}{2}x\int_0^1 sg(s)ds,$$

yaxud

$$\left(A^{-1}g\right)(x) = g(x) + \frac{2}{3}\int_0^1 xsg(s)ds$$

alarıq.

4. Tutaq ki, $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatoru

$$(Af)(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 k(x,s) f(s) ds\ ,\ x \in [0,1],\ \lambda \in R|\{0\}$$

bərabərliyi ilə təyin edilmiş operatordur. Burada $K(x,s) = \psi(x)\varphi(s)$, $\psi(x)$, $\varphi(s)$ funksiyaları $[0,1]$ parçasında kəsilməz, eyniliklə sıfır olmayan və $\int_0^1 \psi(x)\varphi(x)dx \neq \frac{1}{\lambda}$ şərtini ödəyən funksiyalardır.

Göstərin ki, A kəsilməz tərsi olan operatordur. A^{-1} operatorunu tapın.

Həlli. Göründüyü kimi A operatoru bütün fəzada təyin edilmişdir və asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\|A\| \leq 1 + |\lambda| \cdot \|\psi\| \cdot \|\varphi\|$$

yəni $A \in L[C[0,1], G[0,1]]$. $C[0,1]$ banax fəzası olduğundan A-nın kəsilməz tərsinin olduğunu göstərmək üçün məlum Banax teoreminə görə istənilən $g(x) \in C[0,1]$ üçün

$$(Af)(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 \psi(x)\varphi(s) f(s) ds = g(x) \qquad (\alpha)$$

tənliyinin yeganə həllinin olduğunu göstərmək lazımdır. (α) bərabərliyindən görünür ki, əgər $f(x)$ bu tənliyin həlli isə, onda

$$f(x) = g(x) + c\lambda\psi(x),$$

burada

$$C = \int_0^1 \varphi(s) f(s) ds. \qquad (\beta)$$

(β) bərabərliyinin hər tərəfini $\varphi(x)$-ə vurub $[0,1]$ parçasında inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = \lambda c c_0 + \int_0^1 \varphi(x) g(x) dx \qquad (\gamma)$$

Burada $c_0 = \int_0^1 \psi(x)\varphi(x)dx \quad \left(c_0 \neq \frac{1}{\lambda}\right)$. $\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = c$ olduğundan (γ) bərabərliyinə görə $c = \lambda c c_0 + \int_0^1 \varphi(x) g(x) dx$, yaxud

$$c = \frac{1}{1 - \lambda c_0} \int_0^1 \varphi(x) g(x) dx$$

taparıq. Nəticədə

$$f(x)=\frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 K(x,s)g(s)ds+g(x)\equiv\left(A^{-1}g\right)(x) \qquad (\delta)$$

olduğunu alarıq. Sonuncu bərabərlikdən (α) tənliyinin yeganə həllinin olduğunu alırıq. (δ) bərabərliyinin (α) tənliyinin həlli olduğunu bilavasitə yoxlamaq olar.

5. Tutaq ki, $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operatoru

$$(Af)(x)=f(x)-\lambda\int_0^x K(x,s)f(s)ds,\ x\in[0,1],\ \lambda\in R|\{0\}$$

bərabərliyi ilə təyin edilmiş operatordur. Burada $K(x,s)=\varphi(x)\varphi(s)$, $\psi(x)$ və $\varphi(x)$ $[0,1]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır və eyniliklə sıfır deyillər. Göstərin ki, A kəsilməz tərsi olan operatordur və A^{-1} operatorunu tapın.

Həlli. Aydındır ki, $A\in L(C[0,1],C[0,1])$. Əvvəlki misalda olduğu kimi

$$(Af)(x)=f(x)-\lambda\int_0^x\psi(x)\varphi(s)f(s)ds=g(x)$$

$g(x)\in C[0,1]$ tənliyinə baxaq və onun yeganə həllinin olduğunu göstərək.

$\int_0^x\varphi(s)f(s)ds=z(x)$ işarə edək. Onda

$$f(x)=\lambda\psi(x)z(x)+g(x)$$

alarıq. Aydındır ki, $z(x)\in C^{(1)}[0,1]$ və $z'(x)=\varphi(x)f(x)$. Onda

$$z'(x)=\varphi(x)[\lambda\psi(x)z(x)+g(x)]=\lambda a_0(x)z(x)+\varphi(x)g(x)$$

alarıq. Burada $a_0(x)=\varphi(x)\psi(x)$.

Beləliklə, $z(x)$ funksiyasına nəzərən aşağıdakı xətti qeyri-bircins diferensial tənliyi alırıq:

$$z'(x)-\lambda a_0(x)z(x)=\varphi(x)g(x)$$

Əgər bu tənliyi sabitin variasiyası üsulu ilə həll etsək, nəticədə alarıq:

$$z(x)=e^{\lambda\int_0^x a_0(s)ds}\left[c+\int_0^x\varphi(s)g(s)e^{-\lambda\int_0^s a_0(t)dt}ds\right].$$

$z(0)=0$ olduğundan $c=0$ alırıq. Nəticədə

$$f(x)=\lambda\psi(x)e^{\lambda\int_0^x a_0(s)ds}\int_0^x\varphi(s)g(s)e^{-\lambda\int_0^s a_0(t)dt}ds+$$

$$+g(x)\equiv\left(A^{-1}g\right)(x) \qquad (*)$$

alırıq. Sonuncu bərabərlik baxılan tənliyin yeganə həllini təyin edir. Bu isə A-nın kəsilməz tərsinin olduğunu göstərir. A^{-1} tərs operatoru (*) formulu ilə təyin edilir.

6. Tutaq ki, $L \subset C[0,1]-$ $[0,1]$ parçasında üçüncü tərtib kəsilməz diferensiallanan və $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ şərtini ödəyən xətti çoxobrazlıdır. Göstərin ki, təyin oblastı $D(A)=L$ olan və $(Ax)(t)=x'''(t)+x''(t)$ formulu ilə təyin edilmiş A operatoru kəsilməz tərsi olan operatordur.

Həlli. İstənilən $y(t)\in C[0,1]$ funksiyası götürək və $Ax=y$ tənliyinə, yəni

$$x'''(t)+x''(t)=y(t) \tag{1}$$

$$x(0)=x'(0)=x''(0)=0 \tag{2}$$

(1)-(2) Koşi məsələsinə baxaq.

Əvvəlcə (1) tənliyinə uyğun bircins

$$x'''(t)+x''(t)=0 \tag{3}$$

tənliyin fundamental həllər sistemini tapaq.

$x''(t)=u(t)$ əvəz etsək, birinci tərtib

$$u'(t)+u(t)=0$$

tənliyini alarıq. Bu tənliyin ümumi həlli $u(t)=c_1e^{-t}$ şəklindədir, c_1-ixtiyari sabitdir. Onda (3) tənliyinin ümumi həlli $x(t)=c_1e^{-t}+c_2t+c_3$ şəklində olar, c_1,c_2,c_3- ixtiyari sabitlərdir. $x_1(t)=e^{-t}$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=1$ funksiyaları (3) tənliyinin fundamental həllər sistemidir.

(1) tənliyinin ümumi həllini sabitin variasiyası üsuluna görə

$$x(t)=c_1(t)e^{-t}+c_2(t)t+c_3(t) \tag{4}$$

şəklində axtaraq. Burada $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ funksiyaları

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)t+c_3'(t)=0, \\ -c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)=0 \\ c_1'(t)e^{-t}=y(t) \end{cases} \tag{5}$$

tənliklər sistemindən təyin edilirlər. (5) tənliklərindən $c_1'(t)=e^ty(t)$, $c_2'(t)=y(t)$, $c_3'(t)=-(t+1)y(t)$ taparıq. Buradan

$$c_1(t)=\int_0^t e^{\tau}y(\tau)d\tau+c_1^*, c_2(t)=\int_0^t y(\tau)d\tau+c_2^*, \tag{6}$$

$c_3(t) = -\int\limits_0^t (\tau+1)y(\tau)d\tau + c_3^*$. Burada c_1^*, c_2^*, c_3^* – ixtiyari sabitlərdir, $t \in [0,1]$. (6) bərabərliklərini (4)-də yerinə yazsaq, alarıq:

$$x(t) = c_1^* e^{-t} + c_2^* t + c_3^* + \int\limits_0^t \left(e^{\tau-t} + t - \tau - 1\right) y(\tau)d\tau \qquad (7)$$

(2) başlanğıc şərtlərini nəzərə almaqla (7) ümumi həllindən axtarılan xüsusi həlli tapaq. (7) bərabərliyindən alarıq:

$$x'(t) = -c_1^* e^{-t} + c_2^* + \int\limits_0^t \left(-e^{-\tau-t} + 1\right) y(\tau)d\tau + \left(e^{t-t} + t - t - 1\right) y(t) =$$

$$= -c_1^* e^{-t} + c_2^* + \int\limits_0^t \left(-e^{\tau-t} + 1\right) y(\tau)d\tau\ ,$$

$$x''(t) = -c_1^* e^{-t} + c_2^* + \int\limits_0^t e^{\tau-t} y(\tau)d\tau + \left(1 - e^{t-t}\right) y(t) =$$

$$= -c_1^* e^{-t} + \int\limits_0^t e^{\tau-t} y(\tau)d\tau$$

(2) başlanğıc şərtlərindən istifadə etsək

$$\begin{cases} c_1^* + c_3^* = 0 \\ -c_1^* + c_2^* = 0 \\ c_1^* = 0 \end{cases}$$

Buradan $c_1^* = c_2^* = c_3^* = 0$ alarıq. Onda (1)-(2) məsələsinin axtarılan həlli

$$x(t) = \int\limits_0^t \left(e^{\tau-t} + t - \tau - 1\right) y(\tau)d\tau \qquad (8)$$

olar. Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi teoreminə görə (8) həllinin yeganəliyini alırıq.

(8) düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$\|x\|_{C[0,1]} \le \frac{3+2e}{2} \|y\|_{C[0,1]}$$

Buradan

$$\|Ax\|_{C[0,1]} \ge \frac{2}{3+2e} \|x\|_{C[0,1]}. \qquad (9)$$

Banax teoreminə görə (9) bərabərsizliyindən A-nın kəsilməz tərsinin olduğunu alarıq. A^{-1} tərs operatoru

$$\left(A^{-1}y\right)(t)=\int_0^t\left(e^{\tau-t}+t-\tau-1\right)y(\tau)d\tau\ ,\ y(t)\in C[0,1]$$

kimi verilir və $\left\|A^{-1}\right\|\leq\dfrac{3+2e}{2}$.

7. Tutaq ki, A və B E xətti fəzasında verilmiş xətti operatorlardır. Aşağıdakı təkliflərin doğru olduğunu göstərin.

a) Əgər A və B operatorlarının tərsi varsa, onda AB-nin də tərsi vardır və $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

b) Əgər A və BA operatorların tərsi varsa, onda B^{-1} tərsi də vardır.

8. $L=\left\{x(t)\in C^{(1)}[0,1];\ x(0)=0\right\},\ L\subset C^{(1)}[0,1]$

altfəzasında $A:L\to C[0,1]$ operatorunu

$$(Ax)(t)=x'(t)+a(t)x(t),\ a(t)\in C[0,1],\ t\in[0,1)$$

bərabərliyi ilə təyin edək. Göstərin ki, A kəsilməz tərsi olan operatordur.

9. E ilə $[0,1]$ parçasında ikinci tərtib kəsilməz törəmələri olan və $x(0)=x(1)=0$ şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğunu işarə edək.

$$A:E\to C[0,1],\ (Ax)t=x''(t)-x(t),\ t\in[0,1]$$

operatorunun tərsi olan operatoru tapın.

10. Aşağıda göstərilən qayda ilə təyin edilmiş $A:l_2\to l_2$ operatorunun tərs operatoru varmı?

a) $Ax=(0,x_1,x_2,...)$, b) $Ax=(x_2,x_3,...)$, v) $Ax=(x_1+x_2,x_2,x_3,...)$ $x\in l_2$.

11. E ilə $[0,1]$ parçasında diferensiallanan və $x(0)=0$ şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğunu işarə edək.

$$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|.$$

Aşağıda göstərilən qayda ilə təyin edilən $A:E\to C[0,1]$ operatorunun kəsilməz tərsinin varlığını isbat edin.

a) $(Ax)(t)=x'(t)+4x(t)$;

b) $(Ax)(t)=x'(t)-2tx(t)$;

v) $(Ax)(t)=x'(t)-3t^2x(t)$;

q) $(Ax)(t)=(t+1)x'(t)-x(t)$;

d) $(Ax)(t)=\left(t^2+1\right)x'(t)-2tx(t)$.

Burada $t\in[0,1]$. A^{-1} operatorunu tapın.

XVI FƏSİL
OPERATORLAR ARDICILLIĞININ YIĞILMASI

16.1. Operatorlar ardıcıllığının müntəzəm və güclü mənada yığılması

Fərz edək ki, X və Y normalaşmış fəzalardır. $A_n,\ A \in L(X,Y)$ götürək.

Tərif 1. Əgər

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\|_{L(X,Y)} = 0$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, $\{A_n\}$ operatorlar ardıcllığı A operatoruna normaya nəzərən yığılır.

Teorem 1. $\{A_n\} \in L(X,Y)$ operatorlar ardıcıllığının $A \in L(X,Y)$ operatoruna normaya nəzərən yığılması üçün zəruri və kafi şərt, $\{A_n x\}$ ardıcıllığının

$$S[0,1] = \{x : x \in X,\ \|x\| \le 1\}$$

qapalı kürəsində Ax-ə müntəzəm yığılan olmasıdır. Yəni, $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $n > N(\varepsilon)$ və istənilən $x \in S[0,1]$ üçün $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$ olmasıdır.

İsbatı. Şərtin zəruriliyi aşağıdakı bərabərsizlikdən alınır. Operatorun normasının tərifinə görə $\|x\| \le 1$ olduqda

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\| \cdot \|x\| \le \|A_n - A\|$$

doğrudur. $\{A_n\}$ ardıcıllığı A-ya normaya nəzərən yığıldığı üçün $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi vardır ki, $n > N(\varepsilon)$ olduqda $\|A_n - A\| < \varepsilon$ ödənir. Bunu nəzərə alsaq $\|x\| \le 1$ olduqda

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| < \varepsilon$$

alarıq. Bu $\{A_n x\}$ ardıcıllığının $S[0,1]$ kürəsində Ax-ə müntəzəm yığılması deməkdir.

Kafilik. Fərz edək ki, $\{A_n x\}$ ardıcıllığı $S[0,1]$ kürəsində Ax-ə müntəzəm yığılır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə N_ε nömrəsi vardır ki, $n > N_\varepsilon$ olduqda istənilən $x \in S[0,1]$ üçün

$$\|A_n x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Buradan

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|A_n x - Ax\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

alırıq. Yəni A_n ardıcıllığı A-ya normaya görə yığılır.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə çıxır.

Nəticə. Əgər A_n ardıcıllığı A–ya normaya nəzərən yığılırsa, onda istənilən M məhdud çoxluğunda $\{A_n x\}$ ardıcıllığı Ax-ə müntəzəm yığılır.

İsbatı. M çoxluğu məhdud olduğundan elə $S[0,R]$ qapalı kürəsi vardır ki, $M \subset S[0,R]$. Normaya nəzərən $A_n \to A$ olduğundan istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə N_ε nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N_\varepsilon$ olduqda

$$\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{R}$$

Onda $\forall x \in M$ üçün $\|x\| \le R$ olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\|\|x\| \le \frac{\varepsilon}{R} R = \varepsilon$$

Sonuncu $\{A_n x\}$ ardıcıllığının M çoxluğunda Ax-ə müntəzəm yığılan olduğunu göstərir.

Bu teoremə əsaslanaraq çox zaman normaya nəzərən yığılmaya müntəzəm yığılma da deyilir.

Yuxarıda biz X və Y fəzalarının normalaşmış fəzalar olduğu halda $L(X,Y)$ çoxluğunun da xətti normalaşmış fəza olduğunu göstərmişik. Aşağıdakı teorem də doğrudur.

Teorem 2. Əgər X istənilən normalaşmış fəza, Y isə Banax fəzası olarsa, onda $L(X,Y)$ Banax fəzasıdır.

İsbatı. Fərz edək ki, $\{A_n\} \in L(X,Y)$ fundamental ardıcıllığı verilmişdir. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə N_ε nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N_\varepsilon$ və istənilən p natural ədədi üçün

$$\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İxtiyari $x \in X$ elementi götürək və $\{A_n x\}$ ardıcıllığına baxaq:

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| = \|(A_{n+p} - A_n)x\| \le \|A_{n+p} - A_n\|\|x\|$$

bərabərsizliyindən görünür ki, $\{A_n x\}$ ardıcıllığı da Y fəzasında fundamentaldır. Y tam fəza olduğundan elə $y \in Y$ elementi vardır ki,

$$\|A_n x - y\| \to 0, \text{ yəni } \lim_{n\to\infty} A_n x = y.$$

Bu qayda ilə istənilən $x \in X$ elementinə müəyyən $y \in Y$ elementi qarşı qoyan A operatoru təyin etmək olar:

$$y = Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x .$$

A_n operatorları xətti olduğundan yaza bilərik:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =$$

$$= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = \lambda_1 A x_1 + \lambda A x_2$$

Deməli, A xətti operatordur.

Göstərək ki, A məhdud operatordur.

$$\left\| \|A_{n+p}\| - \|A_n\| \right\| \le \|A_{n+p} - A_n\|$$

bərabərsizliyindən alırıq ki, $\{\|A_n\|\}$ ədədi ardıcıllığı fundamentaldır, yəni yığılandır. Ona görə də bu ardıcıllıq məhduddur. Onda elə c ədədi vardır ki, istənilən n üçün $\|A_n\| \le c$.

Buradan $\|A_n x\| \le c\|x\|$ alarıq.

Bu bərabərsizlikdə $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək, $\|Ax\| \le c\|x\|$ olar. Bu isə A operatorunun məhdud olması deməkdir. Deməli, A xətti məhdud operatordur, yəni $A \in L(X,Y)$. Teorem isbat edildi.

Qeyd edək ki, $L(X,Y)$ xətti məhdud operatorlar fəzasında operatorlar ardıcıllığının müntəzəm yığılması anlayışı ilə bərabər digər növ yığılmalar da daxil etmək olar.

Tutaq ki, $A_n, A \in L(X,Y)$ verilmişdir.

Tərif 2. Əgər istənilən $x \in X$ elementi üçün

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$$

olarsa, onda deyirlər ki, A_n ardıcıllığı A-ya güclü mənada yığılır.

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| \cdot \|x\|$$

bərabərsizliyindən alınır ki, əgər $\{A_n\}$ ardıcıllığı A-ya müntəzəm mənada (normaya görə) yığılırsa, onda o eyni zamanda güclü mənada da yığılır.

Bu faktın tərsi doğru deyildir. A_n ardıcıllığının A- ya güclü mənada yığılmasından onun müntəzəm, yəni normaya nəzərən yığılması alınmaya da bilər.

Misal. $X = l_2$ olsun. $x = (x_1, x_2, ..., x_n ...) \in l_2$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, elementini götürək. Aşağıdakı qayda ilə A_n operatorları təyin edək. A_n operatoru hər bir x elementinə elə $y = (y_1, y_2, ..., y_n ...)$ elementi qarşı qoysun ki, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$,..., $y_n = x_n$, $y_{n+1} = 0$, $y_{n+2} = 0$,... olsun.

Yəni

$A_1:\ x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\to y=(x_1,0,...0,...)$
$A_2:\ x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\to y=(x_1,x_2,0,...0,...)$
....
$A_n:\ x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\to y=(x_1,x_2,...,x_n 0,...0,...)$
qarşı qoysun. Onda $A=I$ vahid operatoru üçün

$$\|A_nx-Ix\|^2=\|A_nx-x\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k^2\to 0\,,\ n\to\infty$$

olar (yığılan sıranın qalıq sırası olduğuna görə).
Ona görə də $\|A_nx-Ix\|\to 0$ və $\{A_n\}$ ardıcıllığı I -yə güclü mənada yığılır.

Göstərək ki, $\{A_n\}$ ardıcıllığı I -yə normaya nəzərən yığılmır.

Doğrudan da, l_2 fəzasında $\|x\|=1$ şərtini ödəyən vektorlar içərisində $A_nx=0$ şərtini ödəyən vektorlar üçün $\|(A_n-I)x\|=1$ olduğundan

$$\|A_n-I\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|(A_n-I)x\|\ge 1$$

alarıq. Bu isə A_n-in I -yə normaya nəzərən yığılan olmadığını göstərir.

16.2. Müntəzəm məhdudluq prinsipi

Teorem 3. Əgər $\{A_n\}$ xətti kəsilməz operatorlar ardıcıllığı X Banax fəzasının hər bir x nöqtəsində məhduddursa, yəni istənilən $x\in X$ nöqtəsi üçün elə M_x ədədi varsa ki, $\|A_nx\|\le M_x$ şərti ödənilsin, onda $\{\|A_n\|\}$ ədədi ardıcıllığı məhduddur.

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, $\{A_nx\}$ ardıcıllığı $S[x_0,r]\subset X$ qapalı kürəsində müntəzəm məhduddur, yəni elə M ədədi vardır ki,

$$\sup_n\|A_nx\|\le M\,.$$

Bu halda $\{\|A_n\|\}$ ardıcıllığının məhdud olduğunu göstərək. Bu məqsədlə istənilən $x_0\in X$, $x_0\ne 0$ elementi götürək.

$$\left\|x_0+\frac{x}{\|x\|}r-x_0\right\|=r$$

olduğundan $x_0+\dfrac{x}{\|x\|}r$ elementi də $S[x_0,r]$ kürəsinə daxildir. Onda

$$\sup_n\left\|A_n\left(x_0+\frac{x}{\|x\|}r\right)\right\|\le M$$

olar. A_n operatorları xətti olduğundan yaza bilərik

$$\left\| A_n\left(x_0 + \frac{x}{\|x\|} r \right) \right\| = \left\| A_n x_0 + \frac{r}{\|x\|} A_n x \right\| \geq$$

$$\geq \|A_n x\| \frac{r}{\|x\|} - \|A_n x_0\| \geq \frac{r}{\|x\|} \|A_n x\| - M$$

Buradan

$$M \geq \frac{r}{\|x\|} \|A_n x\| - M$$

yaxud

$$\|A_n x\| \leq \frac{2M}{r} \|x\|$$

alarıq. Sonuncu bərabərsizlikdən $\|A_n\| \leq \dfrac{2M}{r}$ alarıq. Bu isə $S[x_0, r]$ kürəsində $\{A_n x\}$ müntəzəm məhdud olduqca, $\{\|A_n\|\}$ ədədi ardıcıllığının məhdud olduğunu göstərir.

İndi isə teoremi ümumi halda isbat edək.

Əksini fərz edək. Fərz edək ki, teoremin hökmü doğru deyildir. Bu halda $\{\|A_n x\|\}$ ardıcıllığı heç bir qapalı kürədə müntəzəm məhdud deyildir. Əgər $\{\|A_n x\|\}$ müntəzəm məhdud olsaydı, onda $\{\|A_n\|\}$ ədədi ardıllığı da məhdud olardı. $\overline{S}_0 \subset X$ qapalı kürəsini qeyd edək. Bu kürədə $\{\|A_n x\|\}$ qeyri-məhduddur. Onda elə $x_1 \in S_0$ nöqtəsi və elə n_1 nömrəsi tapmaq olar ki, $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. A_{n_1} operatorunun kəsilməzliyinə görə elə $S_1 = Sr_1(x_1)$ açıq kürəsi vardır ki, $x \in \overline{S}_1$-də $\|A_{n_1} x\| > 1$ödənir. S_1 kürəsində $\{\|A_n x\|\}$ qeyri-məhdud olduğundan elə $x_2 \in S_1$ nöqtəsi və $n_2 > n_1$ nömrəsi tapmaq olar ki, $\|A_{n_2} x_2\| > 2$. Mühakiməni bu qayda ilə davam etdirməklə, elə $\{x_k\}$ və $\{\overline{S}_k\}$ alarıq ki, $x_k \in S_k$ və $\overline{S}_0 \supset \overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \supset ... \supset \overline{S}_n \supset$ olsun. Eyni zamanda $x \in S_k$ olduqda $\|A_{n_k} x\| \geq k$.

Bir-birinə daxil olan kürələr haqqında teoremə görə bunların hamısına daxil olan yeganə $\overline{x} \in \overline{S}_k$ $k = 1,2,...$nöqtəsi vardır. Onda $\|A_{n_k} \overline{x}\| > k$, yəni $\{A_n \overline{x}\}$ qeyri-məhduddur. Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Deməli, elə qapalı kürə vardır ki, orada $\{\|A_n x\|\}$ məhduddur. Ona görə də $\{\|A_n\|\}$ ədədi ardıcıllığı məhduddur. Teorem isbat olundu.

16.3. Banax-Şteynhauz teoremi

Teorem 4 (Banax-Şteynhauz). $A_n \in L(X,Y)$ operatorlar ardıcıllığının $A \in L(X,Y)$ operatoruna güclü mənada (yəni istənilən $x \in X$ nöqtəsində) yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt
1) $\{\|A_n\|\}$ ədədi ardıcıllığının məhdud olması
2) A_n ardıcıllığının X-də hər yerdə sıx olan $X' \subset X$ altçoxluğunda A-ya güclü mənada yığılan olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. İstənilən $x \in X$ üçün $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$ olduğu üçün $\|A_n x\| \to \|Ax\|$, $n \to \infty$. Ona görə də $\{\|A_n x\|\}$ məhduddur. Onda müntəzəm məhdudluq prinsipindən alırıq ki, $\{\|A_n\|\}$ ardıcıllığı məhduddur. Eyni zamanda X' altçoxluğu olaraq $X' = X$ götürmək olar. Deməli, zərurilik doğrudur.

Kafilik. Fərz edək ki, $x \in X$, amma $x \overline{\in} X'$. Istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və elə $x' \in X'$ tapaq ki, $\|x - x'\| < \varepsilon$ olsun. $M = \sup\limits_{n=0,1,2,...} \|A_n\|$, $A_0 = A$.

Göstərək ki, A_n ardıcıllığı güclü mənada A-ya yığılır. Onda yaza bilərik:

$$\|A_n x - Ax\| = \|A_n(x - x') + (A_n x' - Ax') + A(x' - x)\| \le$$
$$\le \|A_n\|\|x - x'\| + \|A_n x' - Ax'\| + \|A\|\|x' - x\| \le 2M\varepsilon + \|A_n x' - Ax'\|$$

X' altçoxluğuda A_n ardıcıllığı A-ya güclü yığıldığından $\{A_n x'\} \to Ax$. Onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə N nömrəsi vardır ki, $n > N$ olduqda $\|A_n x' - Ax'\| < \varepsilon$ olar. Onda bütün $n > N$ üçün

$$\|A_n x - Ax\| < (2M + 1)\varepsilon$$

alarıq. Bu isə ardıcıllığın bütün X-də güclü yığıldığını göstərir. Teorem isbat olundu.

16.4. Xətti operatorun kəsilməzliyə görə davamı

Fərz edək ki, X və Y xətti normalaşmış fəzalardır. $A: X \to Y$ xətti operatordur. A operatorunun $D(A)$ təyin oblastının X fəzasında sıx olduğunu fərz edək: $\overline{D(A)} = X$. Belə xətti operatorlar üçün də məhdudluq və norma anlayışlarını daxil etmək olar.

Əgər $\|A\| = \sup\limits_{x \in D(A), \|x\| < 1} < +\infty$ olarsa, onda A operatoruna $D(A)$ çoxluğunda məhdud operator deyilir. $\|A\|$ kəmiyyətinə A operatorunun norması deyilir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem (xətti operatorun kəsilməzliyə görə davamı haqqında). Fərz edək ki, X – xətti normalaşmış, Y isə banax fəzasıdır, A operatoru təyin oblastı $D(A)\subset X$, $\overline{D(A)}=X$, qiymətlər çoxluğu $R(A)\subset Y$ olan xətti operatordur və $D(A)$ çoxluğunda məhduddur. Onda bütün X-də təyin edilmiş elə xətti məhdud $\overline{A}$ operatoru vardır ki,

1) istənilən $x\in D(A)$ üçün $\overline{A}x = Ax$

2) $\|\overline{A}\| = \|A\|$

şərtləri ödənilir.

İsbatı. $\overline{A}$ operatorunu aşağıdakı üsulla təyin edək: Əgər $x\in D(A)$ olarsa, $\overline{A}x = Ax$.

Tutaq ki, $x\in X$, amma $x \,\overline{\in}\, D(A)$. $D(A)$-nın X-da sıxlığına görə elə $\{x_n\}\subset D(A)$ tapmaq olar ki, $x_n \to x$. Bu halda $\overline{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ qəbul edək. Göstərək ki, baxılan limit vardır və x-ə yığılan ardıcıllıqların seçilməsindən asılı deyildir. Doğrudan da

$$\|Ax_n - Ax_m\| \le \|A\|\cdot\|x_n - x_m\|$$

bərabərsizliyindən alınır ki, $\{Ax_n\}$ fundamental ardıcıllıqdır. Y tam fəza olduğundan $\{Ax_n\}$ yığılandır. Deməli $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ vardır. İndi isə $x'_n \to x$, $n\to\infty$ $\{x'_n\}\subset D(A)$ şərtini ödəyən başqa bir ardıcıllıq götürək. $a = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} Ax'_n$ qəbul edək. Onda yaza bilərik:

$$\|a-b\| \le \|a - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax'_n\| + \|Ax'_n - b\| \to 0,\ n\to\infty$$

Çünki

$$\|Ax_n - Ax'_n\| \le \|A\|\|x_n - x'_n\| \to 0,\ n\to\infty$$

Deməli, $a=b$ alırıq.

Daha sonra $\|Ax_n\| \le \|A\|\cdot\|x_n\|$ bərabərsizliyində $n\to\infty$ şərtində limitə keçsək, $\|\overline{A}x\| \le \|A\|\cdot\|x\|$ alarıq. Buradan $\|\overline{A}\| \le \|A\|$ olar. Digər tərəfdən

$$\|\overline{A}\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|\overline{A}x\| \ge \sup_{\substack{x\in D(A)\\ \|x\|\le 1}} \|\overline{A}x\| = \|A\|$$

olduğu üçün $\|\overline{A}\| = \|A\|$ alırıq.

$\overline{A}$ operatorunun xəttiliyi A-nın və limitin xəttilik xassələrindən alınır. Doğrudan da istənilən $x', x'' \in X$ üçün yaza bilərik:

$$\overline{A}(\alpha x' + \beta x'') = \lim_{n\to\infty} A(\alpha x'_n + \beta x''_n) = \lim_{n\to\infty} A\alpha x'_n + \lim_{n\to\infty} A\beta x''_n =$$

$$=\alpha \lim_{n\to\infty} Ax_n' + \beta \lim_{n\to\infty} Ax_n'' = \alpha\overline{A}x' + \beta\overline{A}x''.$$

Bu isə A-nın xətti olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, A operatorunun yuxarıdakı qayda ilə qurulmuş davamı A operatorunun kəsilməzliyə görə davamı adlanır.

16.5. Operatorlar ardıcıllığının yığılmasına aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. $\{A_n\} \subset L(E,E)$ operatorlar ardıcıllığının müntəzəm və ya nöqtəvi yığılmasını tədqiq edin.

a) $E = l_2$, $A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots, \frac{x_k}{n}, \dots\right)$, $x = (x_k) \in l_2$;

b) $E = l_2$, $A_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, $x = (x_k) \in l_2$;

v) $E = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = t^n(1-t)x(t)$, $t \in [0,1]$;

q) $E = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = t^n x(t)$, $t \in [0,1]$;

d) $E = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = n\int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)d\tau$, $t \in [0,1]$.

Həlli. a) $\{A_n\}$ operatorlar ardıcıllığı sıfır operatora müntəzəm yığılır. Çünki, istənilən $x \in l_2$ üçün

$$\|A_n x\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 = \frac{1}{n^2}\|x\|^2$$

Buradan $\|A_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$.

b) $\{A_n\}$ ardıcıllığı I vahid operatoruna nöqtəvi yığılır, amma müntəzəm yığılmır. Doğrudan da istənilən $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ üçün

$$\|A_n x - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2 \to 0,\ n \to \infty$$

(yığılan sıranın qalığı olduğu üçün). Bu onu göstərir ki, $A_n \to I$ nöqtəvi yığılır.

İndi istənilən $n \in N$ üçün $x = e_{n+1} = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{n},1,0\dots\right) \in l_2$

götürək. $\|e_{n+1}\| = 1$. Bu halda

$$\|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1$$

Ona görə də

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A_n x - x\| \ge \|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = 1 \not\to 0 .$$

Yəni A_n ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda I vahid operatoruna müntəzəm (normaya görə) yığılmır.

v) $\{A_n\}$ operatoru sıfır operatoruna müntəzəm yığılır. Doğrudan da istənilən $x(t) \in C[0,1]$ üçün

$$\|A_n x\| = \max_{t \in [0,1]} \left\| t^n (1-t) x(t) \right\| \le \max_{t \in [0,1]} \left| t^n - t^{n+1} \right| \|x\| =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \|x\| .$$

Ona görə də

$$\|A_n\| \le \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

q) Göstərək ki, $\{A_n\}$ ardıcıllığı yığılan deyildir. Çünki $x(1) \ne 0$ şərtini ödəyən istənilən $x(t) \in C[0,1]$ funksiyası üçün $\{t^n x(t)\}$ ardıcıllığı nöqtəvi mənada

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ x(1), & t = 1 \end{cases}$$

funksiyasına yığılır. Göründüyü kimi $\psi(t)$ kəsilən funksiyadır və $C[0,1]$ fəzasına daxil deyildir. Ona görə də $\{A_n\}$ ardıcıllığı nöqtəvi mənada (eyni zamanda müntəzəm mənada) yığılan deyildir.

d) Göstərək ki, $\{A_n\}$ ardıcıllığı I vahid operatoruna nöqtəvi mənada yığılır, amma müntəzəm yığılmır. Doğrudan da, əgər $F(t) - x(t)$ funksiyasının ibtidai funksiyası isə, onda

$$n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau) d\tau = \frac{F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)}{\frac{1}{n}} \to F'(t) = x(t)$$

münasibətindən A_n ardıcıllığının I vahid operatoruna nöqtəvi yığılmasını alırıq.

İndi isə $x_n(t) = t^{n-1} \quad (n \ge z)$ funksiyasını götürək.

$$\|x_n\| = \max_{t \in [0,1]} \left| t^{n-1} \right| = 1 .$$

Onda alarıq:

$$\|Ax_n - x_n\| = \max_{t\in[0,1]}\left| n\int_t^{t+\frac{1}{n}} \tau^{n-1}d\tau - t^n \right| = \max_{t\in[0,1]}\left| \tau^n \Big|_{\tau=t}^{\tau=t+\frac{1}{n}} - t^{n-1} \right| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]}\left| \left(t+\frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1} \right| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]}\left| t^n + t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n} - t^n - t^{n-1} \right| \geq$$

$$\geq \frac{n(n-1)}{2n^2}\max_{t\in[0,1]} t^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \geq \frac{1}{4} \quad (n \geq 2).$$

Nəticədə,

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|A_n x - x\| \geq \|A_n x_n - x_n\| \geq \frac{1}{4} \not\to 0,\ n\to\infty$$

yəni, A_n ardıcıllığı I vahid operatoruna müntəzəm yığılmır.

2. Tutaq ki, E banax fəzası, A isə bu fəzada təsir edən xətti məhdud operatordur. Fərz edək ki,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$$

$(\lambda_k \in R)$– bütün həqiqi oxda yığılan qüvvət sırasıdır.

İsbat edin ki,

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$$

ardıcıllığı $n\to\infty$ şərtində $\varphi(A)\in L(E)$ limitinə malikdir. $\{\lambda_k\}$ ədədi ardıcıllığı hansı şərtləri ödədikdə $\|\varphi(A)\| \leq \varphi(\|A\|)$ olar?

Həlli. Qeyd edək ki, $L(E)$ fəzasında operatorların hasili əməlinin olması istənilən $n\in N$ üçün A^n operatorunu təyin etməyə imkan verir, belə ki, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. $\varphi(A)$ operatorunu

$$\varphi(A)x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x,\ x\in E \qquad (\alpha)$$

kimi təyin edək. $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ sırası E fəzasında o zaman yığılan adlanır ki, onun xüsusi cəmlər ardıcıllığı yığılan olsun. Banax fəzasında müntəzəm yığılan istənilən sıra yığılandır. Əgər

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k=c<\infty$$

olarsa, $\varphi(A)$ funksiyasını (α) bərabərliyi ilə təyin etmək olar. Bu halda alarıq:

$$\|\varphi(A)x\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\|A\|^k\|x\|=c\|x\|,\ x\in E.$$

Buradan $\|\varphi(A)\|\le c$ alırıq. $\varphi(A)$-nın xətti olmasını isə asanlıqla yoxlamaq olar. Ona görə də $\varphi(A)\in L(E)$. Indi isə göstərək ki, $n\to\infty$ olduqda $S_n(A)\to\varphi(A)$. Istənilən $x\in E$ üçün yaza bilərik:

$$\|(\varphi(A)-S_n(A))x\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\|A\|^k\|x\|$$

Buradan

$$\|\varphi(A)-S_n(A)\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\|A\|^k\to 0,\ n\to\infty$$

alırıq. Əgər $\lambda_k\ge 0$, $k\in N$ olarsa, bu halda

$$\|\varphi(A)\|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\|A\|^k=\varphi(\|A\|).$$

3. Tutaq ki, E banax fəzasıdır. $\{A_n\}\subset L(E)$, $\{B_n\}\subset L(E)$, $n\in N$ və normaya nəzərən
$A_n\to A$, $B_n\to B$, $A,B\in L(E)$. Göstərin ki, $A_nB_n\to A\cdot B$.

4. Tutaq ki, E_1 və E_2 banax fəzalarıdır. $A_n\in L(E_1,E_2)$ və normaya nəzərən $A_n\to A$, $A\in L(E_1,E_2)$. Göstərin ki, əgər $x_n\to x$ $(x_n,x\in E_1,\ n\in N)$ isə, onda $A_nx_n\to Ax$.

5. Tutaq ki, $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ $C[a,b]$ fəzasında hər hansı qeyd olunmuş funksiyalar ardıcıllığıdır. İstənilən $n\in N$ üçün

$$(A_nx)(t)=p_n(t)x(t),\ t\in[a,b],\ x(t)\in C[a,b]$$

operatorları təyin edək.
$p_n(x)$ ardıcıllığı hansı şərtləri ödədikdə A_n operatorlar ardıcıllığı a) müntəzəm b) nöqtəvi yığılır.

6. Aşağıdakı hallarda $\{A_n\}\subset L(E)$ operatorlar ardıcıllığının müntəzəm yığılmasını tədqiq edin.

a) $E=l_2$, $A_nx=(0,\dots,0,x_n,x_{n+1},\dots)$, $x\in l_2$;

b) $E=l_2$, $A_nx=(x_{n+1},x_{n+2},\dots)$, $x\in l_2$;

v) $E = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = \int_0^1 \sqrt{(t-\tau)^2 + \frac{1}{n}}\, x(\tau)\, d\tau$;

q) $E = L_2[0,1]$, $(A_n x)(t) = \int_0^1 t^n \tau^n x(\tau)\, d\tau$.

XVII FƏSİL
XƏTTİ OPERATORUN QRAFİKİ. QAPALI OPERATORLAR

17.1. Banax fəzalarının düz cəmi

Fərz edək ki, X və Y istənilən xətti fəzalardır.

Tərif. $x \in X$, $y \in Y$ olduqda $x = (x, y)$ şəklində bütün cütlər çoxluğuna X və Y fəzalarının düz cəmi deyilir və $Z = X \dot{+} Y$ kimi işarə edilir. Bu fəzada cütlərin cəmi və cüt ədədə hasili əməlləri aşağıdakı qayda ilə təyin olunur: $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ cütləri və α_1, α_2 ədədləri üçün

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

Əgər xüsusi halda X və Y normalaşmış fəzalar olarsa, $X \dot{+} Y$ fəzasında norma $\|z\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ kimi təyin edilir. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu qayda ilə təyin edilmiş norma bütün aksiomları ödəyir. Bu halda X və Y Banax fəzaları olarsa, $X \dot{+} Y$ fəzası da Banax fəzası olar.

Göstərmək olar ki, $X \dot{+} Y$ fəzasında norma aşağıdakı üsullarla da təyin edilə bilər:

$$\|z\| = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2},\quad \|z\| = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p} \quad (p \geq 1),$$
$$\|z\| = \max\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}$$

Daxil edilmiş bu normalar bir-birinə ekvivalentdirlər.

17.2. Operatorun qrafiki

Fərz edək $y = F(x)$ təyin oblastı $D(F) \subset X$, qiymətlər çoxluğu isə $E(F) \subset Y$ olan operatordur. X və Y Banax fəzalarıdır.

$\{x, F(x)\}$, $x \in D(F)$ cütlər çoxluğuna F operatorunun qrafiki deyilir. Tərifdən görünür ki, operatorun qrafiki $X \dot{+} Y$ fəzasının alt çoxluğudur.

Tərif. Əgər $A : X \to Y$ xətti operatorunun qrafiki $X \dot{+} Y$ fəzasında qapalı olarsa, onda A operatoruna qapalı operator deyilir. A operatorunun qrafikinin qapalı olması o deməkdir ki, əgər $x_n \in D(A)$ üçün $\{x_n, Ax_n\} \to (x, y)$ olarsa, onda $x \in D(A)$ və $y = Ax$.

Əgər $\|z\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ olduğunu nəzərə alsaq, A operatorunun qapalılığının tərifini aşağıdakı kimi vermək olar: əgər $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ və $Ax_n \to y$ isə, onda $x \in D(A)$ və $y = Ax$.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. Əgər $D(A)=X$ və A məhdud operator isə, onda A qapalı operatordur.

İsbatı. Tutaq ki, $n \to \infty$ olduqda $x_n \to x$ və $Ax_n \to y$. A məhdud operatoru kəsilməz olduğundan $n \to \infty$ üçün $Ax_n \to Ax$. Limitin yeganəlik xassəsinə görə $y = Ax$ alarıq.

Teorem 2. Əgər A qapalı operator isə və A^{-1} tərs operatoru varsa, onda A^{-1} operatoru da qapalıdır.

İsbatı. A və A^{-1} operatorlarının qrafiklərinə baxaq:

$$\{x, Ax\},\ x \in D(A)$$
$$\{y, A^{-1}y\},\ y \in R(A)$$

A^{-1} operatorunun qrafikini eyni zamanda $\{Ax, x\}$, $x \in D(A)$ şəklində də göstərə bilərik. Bu A operatorunun qrafikində x və Ax-in yerini dəyişməklə alındığı üçün $Y + X$ fəzasında qapalı çoxluq olar. Deməli A^{-1} qapalı operatordur.

Nəticə. Əgər $A \in L(X,Y)$ və A^{-1} tərs operatoru varsa, onda A^{-1} qapalı operatordur.

Doğrudan da 1-ci teoremə görə A qapalıdır və 2-ci teoremə görə A^{-1} operatoru da qapalı olar.

17.3. Qapalı qrafik haqqında Banax teoremi və onun bəzi nəticələri

S.Banax tərəfindən mühüm tətbiqi əhəmiyyəti olan aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Teorem 1. Əgər A operatoru X Banax fəzasında hər yerdə təyin edilmiş və qiymətləri Y Banax fəzasına daxil olan xətti qapalı operator isə, onda A məhdud operatordur.

Çox mühüm bu teoremin isbatı aşağıdakı lemmadan alınır.

Lemma. Fərz edək ki, A operatoru bütün X Banax fəzasında təyin edilmiş, qiymətləri Y Banax fəzasına daxil olan xətti qapalı operatordur. Əgər X-də hər yerdə sıx olan elə M çoxluğu və elə $c > 0$ sabiti varsa ki, istənilən $x \in M$ üçün $\|Ax\|_Y \le c\|x\|_X$ şərti ödənilsin, onda A məhdud operatordur.

Qapalı qrafik haqqında yuxarıda qeyd etdyimiz teoremdən tərs operatorun varlığı haqqında Banax teoreminin daha güclü variantı olan aşağıdakı teorem alınır.

Teorem 2. Əgər A qapalı operatoru X Banax fəzasını bütün Y Banax fəzasına qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirirsə, yəni $R(A)=Y$ isə, onda A^{-1} operatoru məhduddur.

İsbatı. Teoremin şərtinə görə $D(A)=X$ və A qapalı olduğuna görə 1-ci teoremə görə A məhdud operatordur. Tərs operatorun varlığı haqqında Banax teoreminə görə $A^{-1} \in L(Y,X)$ olar.

17.4. Qrafikin norması

Göründüyü kimi xətti qapalı operatorlar bəzi xassələrinə görə xətti kəsilməz (məhdud) operatorlara yaxındır. Fridrixs göstərmişdir ki, bir çox hallarda xətti qapalı operatorların öyrənilməsini xətti məhdud operatorların öyrənilməsinə gətirmək olar.

Tutaq ki, A operatoru X banax fəzasında hər yerdə sıx $D(A)$ təyin oblastına malik, qiymətləri Y banax fəzasına daxil olan xətti qapalı operatordur. $D(A)$ çoxluğunda qrafikin norması adlanan yeni

$$\|x\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

normasını təyin edək. Daxil edilmiş bu normaya nəzərən $D(A)$ çoxluğu xətti normalaşmış fəzaya çevrilir. Bu fəzanı X_A ilə işarə edək.

Fərz edək ki, $\{x_n\} \in X_A$ hər hansı fundamental ardıcıllıqdır, yəni $m,n \to \infty$ üçün

$$\|x_n - x_m\|_X + \|Ax_n - Ax_m\|_Y \to 0$$

şərti ödənilir. Onda $n,m \to \infty$ olduqda

$$\|x_n - x_m\|_X \to 0, \quad \|Ax_n - Ax_m\|_Y \to 0$$

olar. Şərtə görə X və Y tam fəzalar olduğu üçün elə $x \in X$, $y \in Y$ elementləri vardır ki, $n \to \infty$ şərtində $x_n \to x$ və $Ax_n \to y$.

A operatoru qapalı olduğundan $x \in D(A)$ və $y = Ax$. Bu onu göstərir ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı X_A fəzasında yığılandır, yəni X_A – banax fəzasıdır.

Əgər A-ya X_A fəzasından Y-ə təsir edən operator kimi baxsaq, $\|Ax\|_Y \le \|x\|$ yaza bilərik. Bu şərt A operatorunun məhdud olduğunu göstərir.

17.5. Qapalı operatorlara aid məsələ həlli nümünələri və tapşırıqlar

1. Ortonormal $\{e_k\}^{\infty}$ bazisinə malik H hilbert fəzasında aşağıdakı qayda ilə A operatoru düzəldək:

$$Ae_k = \lambda_k e_k,$$

$k = 1,2,...,\lambda_k$ -lar sabit ədədlərdir.

Əgər istənilən $x \in H$ üçün $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ isə, onda $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ sırası yığılandır. Bu halda $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k e_k$. Bu sıra yalnız o zaman yığılır ki,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |x_k|^2 < +\infty. \qquad (\alpha)$$

Aşağıdakı 2 hal mümkündür:

a) $\{|\lambda_k|\}$ məhduddur. $C_A = \sup_k |\lambda_k|$ işarə edək. Onda

$$\|Ax\|^2 \le C_A^2 \|x\|^2$$

və A məhdud, deməli qapalı operator olar.

b) $\{|\lambda_k|\}$ qeyri-məhduddur. Bu halda A qeyri-məhdud operatordur və onun təyin oblastı $D(A)$ (α) şərtini ödəyən x elementlərindən ibarətdir. A operatorunun qeyri-məhdud olması $\|Ae_k\| = |\lambda_k|$ bərabərliyindən görünür. Əgər $\inf_k |\lambda_k| = C_A > 0$ (yəni, λ_k ədədləri sıfırdan ayrılmışsa) onda $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ ($\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$) elementlərində

$$A^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} y_k e_k$$

bərabərliyi ilə təyin olunmuş A^{-1} tərs operatoru vardır. $\sup_k |\lambda_k^{-1}| = C_A^{-1} < \infty$ olduğu üçün A^{-1} tərs operatoru məhduddur $\left(D(A^{-1}) - H\right)$, yəni qapalıdır. Beləliklə, alırıq ki, $\inf_k |\lambda_k| > 0$ şərti A^{-1}operatorunun qapalı olmasını təmin edir.

2. $X = Y = C[0,+\infty)$. $[0,+\infty)$ intervalında kəsilməz funksiyalar fəzasını götürək.

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,+\infty)} |x(t)|.$$

X fəzasında $Ax = tx(t)$ operatoru təyin edək. A xətti operatordur və onun təyin oblastı $D(A)$

$$|x(t)| \le \frac{C_x}{1+t}, \quad C_x - \text{sabitdir}$$

şərtini ödəyən funksiyalardan ibarət çoxluqdur. $A-$ qeyri-məhdud operatordur. Doğrudan da, $x_n(t) = \dfrac{n}{n+t}$, $n = 1,2,...$ funksiyalar ardıcıllığını götürək. $|x_n(t)| = \dfrac{n}{n+t} \le \dfrac{n}{1+t}$ olduğundan $x_n(t) \in D(A)$ və $\|x_n\| = 1$. Digər tərəfdən

$$\|Ax_n\| = \sup_{t\in[0,+\infty)} \left|\frac{nt}{n+t}\right| = n,$$

Buradan

$$\sup_{x\in D(A), \|x\|\le 1} \|Ax_n\| = +\infty$$

alırıq, yəni $A-$ qeyri-məhduddur.

İndi isə göstərək ki, A qapalıdır. Bunun üçün X fəzasında $x_n(t) \to x(t)$, $tx_n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$ götürək. Onda $(1+t)x_n(t) \leftarrow x(t) + y(t)$, $n \to \infty$ olar.

Tərifə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə N nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N$ olduqda

$$|(1+t)x_n(t) - [x(t) + y(t)]| < \varepsilon, \; t \in [0,+\infty)$$

yaxud

$$\left|x_n(t) - \frac{x(t)+y(t)}{1+t}\right| < \frac{\varepsilon}{1+t} < \varepsilon$$

$x_n(t) \to \dfrac{x(t)+y(t)}{1+t}$, $n \to \infty$ olduqda. Digər tərəfdən $x_n(t) \to x(t)$ olmasından $\dfrac{x(t)+y(t)}{1+t} = x(t)$ və buradan $y(t) = tx(t)$ alırıq, yəni $y = Ax$, $x \in D(A)$.
($|x(t)| \le \dfrac{\|y\|}{1+t}$)

3. Tapşırıq. Yuxarıdakı misalda $A^{-1}y = \dfrac{y(t)}{t}$ tərs operatorunun da qeyri-məhdud və qapalı operator olduğunu göstərin.

4. $C[a,b]$ fəzasında təyin oblastı $D(A)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan funksiyalardan ibarət olan $Ax = \dfrac{dx(t)}{dt}$ operatorunun qeyri-məhdud qapalı operator olduğunu göstərin.

Həlli. Bu məqsədlə $x_n(t) = \sin nt$, $n = 1,2,...$ ardıcıllığını götürək. Göstərə bilərik ki, $x_n(t) \in D(A)$ $\|x_n\| = 1$ və $\|Ax_n\| = n$. Buradan $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = +\infty$ alırıq. Deməli, A operatoru qeyri-məhduddur.

Göstərək ki, A qapalı operatordur. $x_n(t) \in D(A)$ götürək.

Tutaq ki, $n \to \infty$ şərtində $x_n(t) \to x(t)$, $x_n'(t) \to y(t)$.

Müntəzəm yığılan funksional sıraların limitinin xassəsinə görə $x(t) \in C[a,b]$ və müntəzəm yığılan funksional sıraların diferensiallanması teoreminə görə $x'(t) = y(t)$ alırıq. Bu isə A-nın qapalı olması deməkdir.

5. $C[a,b]$ fəzasında kəsilməz diferensiallanan və $x(a) = 0$ sərhəd şərtini ödəyən funksiyalardan ibarət $D(A)$ təyin oblastına malik $Ax(t) = x'(t)$ operatoruna baxaq.

A operatorunun tərsi təyin oblastı bütün $C[a,b]$ fəzası olan və

$$A^{-1}y = \int_a^t y(s)ds$$

bərabərliyi ilə təyin edilmiş A^{-1} operatorudur. Asanlıqla göstərmək olar ki, $\|A^{-1}y\| \le (b-a)\|y\|$. A^{-1} bütün fəzada təyin edilmiş məhdud operator olduğundan A qapalı operatordur.

6. $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x'(t)$ kimi təsir edən və təyin oblastı $D(A)$– $[0,1]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan və $X(0) = X(1) = 0$ şərtini ödəyən funksiyalardan ibarət olan A operatorunun qapalı olduğunu göstərin.

7. $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x''(t) + x(t)$ kimi təsir edən və təyin oblastı $D(A)$–$[0,1]$ parçasında iki dəfə kəsilməz diferensiallanan və $x(0) = x'(0) = 0$ şərtini ödəyən A operatorunun qeyri-məhdud qapalı operator olduğunu göstərin.

XVIII FƏSİL
QOŞMA FƏZALAR

18.1. Xətti funksionallar

Fərz edək ki, X – xətti fəzadır. X -də təyin edilmiş F operatorunun qiymətləri çoxluğu həqiqi və yaxud kompleks ədədlər çoxluğuna daxil olduqda F operatoru funksional adlanır. Biz əsasən X – həqiqi xətti fəzasında təyin edilmiş həqiqi qiymətlər alan funksionallara baxacağıq.

Tərif. Əgər X həqiqi xətti fəzasında təyin edilmiş, qiymətləri R həqiqi ədədlər çoxluğuna daxil olan f funksionalı aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, ona xətti funksional deyilir.

1. İstənilən $x, y \in X$ üçün $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (additivlik) və $\alpha \in R$
2. İxtiyari $x \in X$ üçün $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (bircinslik)

Misallara baxaq:

1) $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzasında $f(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş funksional həm additiv, həm də bircinsdir, yəni xəttidir.

2) $C[a,b]$ fəzasında qeyd olunmuş $t_0 \in [a,b]$ üçün $f(\varphi) = \varphi(t_0)$ qəbul edək. Bu bərabərlik xətti funksional təyin edir.

3) $X = R^n$ fəzasında hər bir $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ elementi üçün

$$f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + ... + c_n\xi_n$$

qəbul edək. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ qeyd edilmiş sabitlərdir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, bu bərabərliklə təyin edilmiş funksional xəttidir. Xətti funksionallar xətti operatorların xüsusi halı olduğundan xətti operatorlar üçün daxil edilmiş bir çox anlayışlar və ümumi faktlar xətti funksionallar üçün də doğrudur.

Xətti operatorların məhdudluğuna, kəsilməzliyinə və normasına tərif vermiş, bunlar arasındakı əlaqələri göstərmişik. Xətti operatorların xüsusi halı olan xətti funksionallar üçün bu tərifləri bir daha qeyd edək.

$E \subset X$ çoxluğunda təyin edilmiş F funksionalı üçün elə $M > 0$ ədədi varsa ki, istənilən $x \in E$ üçün

$$|F(x)| \leq M\|x\| \tag{1}$$

şərti ödənilir, bu halda F funksionalına E çoxluğunda məhdud funksional deyilir. Xüsusi halda $E = X$ olarsa, F funksionalı X fəzasında məhdud funksional adlanır.

(1) bərabərsizliyini ödəyən M ədədlərindən ən kiçiyinə F funksionalının norması deyilir və $\|F\|$ kimi işarə edilir. Qeyd edək ki, (1) şərtini ödəyən M ədədləri aşağıdan sıfırla məhdud olduğundan onların dəqiq

aşağı sərhəddi $m_0 = \inf\{M\}$ vardır və bu ədəd də (1) bərabərsizliyini ödəyir, yəni $\|F\| = m_0$.

Normalaşmış fəzada təyin edilmiş F xətti məhdud funksionalının normasını aşağıdakı kimi təyin edə bilərik:

$$\|F\| = \sup_{\|x\|\le 1}|F(x)| = \sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Əgər $n \to \infty$ şərtində $x_n, x_0 \in X$ üçün $\|x_n - x_0\| \to 0$ olduqda $|F(x_n) - F(x_0)| \to 0$ olarsa, onda F funksionalına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksional deyilir.

R həqiqi ədədlər çoxluğu (eləcə də C kompleks ədədlər çoxluğu) Banax fəzası olduğundan yuxarıda xətti operatorlar üçün isbat edilmiş aşağıdakı teoremlər də doğrudur.

Teorem 1. Xətti normalaşmış X fəzasında təyin edilmiş additiv F funksionalı hər hansı $x_0 \in X$ nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda bütün X fəzasında müntəzəm kəsilməzdir.

Teorem 2. Həqiqi X xətti normalaşmış fəzasında additiv və kəsilməz F funksionalı bircinsdir.

Teorem 3. Xətti normalaşmış X fəzasında təyin edilmiş F funksionalının kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt onun məhdud olmasıdır, yəni $|F(x)| \le M\|x\|$.

Qeyd edək ki, aşağıdakı mühüm fakt da doğrudur. Xətti normalaşmış X fəzasında hər yerdə sıx L xətti çoxobrazlısında təyin edilmiş xətti məhdud funksional normasını saxlamaqla birqiymətli olaraq bütün fəzaya davam etdirilə bilər.

18.2. Qoşma fəzalar. Xətti kəsilməz funksionallar ardıcıllığının yığılması

Fərz edək ki, X Banax fəzasıdır. K isə, X həqiqi xətti fəza olduğu halda həqiqi, kompleks xətti fəza olduğu halda isə kompleks ədədlər çoxluğudur. $L(X, K)$ xətti məhdud funksionallar çoxluğuna X fəzasının qoşması deyilir və onu X^* ilə işarə edirlər: $X^* = L(X, K)$ normalaşmış dolu fəzadır. $X^* = X$ olduqda X fəzasına öz-özünə qoşma fəza deyilir.

Operatorlar ardıcıllığının yığılmasında olduğu kimi $\{f_n\} \subset X^*$ ardıcıllığının f funksionalına müxtəlif mənada yığılmasını təyin etmək olar.

Tərif 1. $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ şərti ödənilərsə, onda deyirlə ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f - güclü mənada yığılır.

Bu tərif operatorlar ardıcıllığının müntəzəm yığılmasına uyğun gəlir.

Tərif 2. Əgər ixtiyari $x \in X$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ şərti ödənilərsə, onda deyirlər ki, $\{f_n\} \subset X^*$ ardıcıllığı $f \in X^*$ funksionalına zəif mənada yığılır.

Göründüyü kimi funksionallar ardıcıllığının zəif yığılmasının tərifi operatorlar ardıcıllığının nöqtəvi yığılmasının tərifinə uyğun gəlir.

Xətti məhdud operatorlar ardıcıllıqları üçün yuxarıda qeyd olunmuş müntəzəm məhdudluq prinsipini, Banax-Şteynhauz və Xan-Banax teoremlərini funksionallar üçün aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar.

Teorem (müntəzəm məhdudluq prinsipi). Əgər X Banax fəzasında istənilən $x \in X$ üçün $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı məhdud olarsa, onda $\{\|f_n\|\}$ ədədi ardıcıllığı məhduddur.

Teorem (Banax-Şteynhauz). X normalaşmış fəzasında $\{f_n\}$ xətti funksionallar ardıcıllığının $n \to \infty$ şərtində f xətti funksionalına zəif mənada yığılması üçün

a) $\{\|f_n\|\}$ ədədi ardıcıllığının məhdud olması

b) $\{f_n\}$ ardıcıllığının $n \to \infty$ şərtində X-də hər yerdə sıx olan L çoxobrazlısında f-ə zəif mənada yığılan olması zəruri və kafidir.

Teorem (Xan-Banax). Fərz edək ki, f funksionalı $D(f) \subset X$ oblastında təyin olunmuş xətti məhdud funksionaldır. Onda bütün X fəzasında təyin edilmiş elə $\tilde{f}$ funksionalı vardır ki, istənilən $x \in D(f)$ üçün $\tilde{f}(x) = f(x)$ və $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ şərtləri ödənilir.

$\tilde{f}$ funksionalına f funksionalının $D(f)$ xətti çoxobrazlısından bütün X-ə davamı adlanır. Bu teorem onu göstərir ki, müəyyən çoxobrazlıda təyin olunmuş xətti məhdud f funksionalını normasını saxlamaq şərti ilə bütün X fəzasına davam etdirmək olar.

Xan-Banax teoremindən aşağıdakı mühüm nəticələr almaq mümkündür.

Nəticə 1. Əgər X normalaşmış fəza olarsa, onda istənilən $x \in X$, $x \neq 0$ elementi üçün bütün X fəzasında təyin olunmuş elə xətti məhdud f funksionalı vardır ki, $f(x) = \|x\|$ və $\|f\| = 1$ şərti ödənilir.

Nəticə 2. Fərz edək ki, X normalaşmış fəza, $L \subset X$ xətti çoxobrazlı və $x_0 \in X|L$ nöqtəsi L çoxobrazlısından $d > 0$ məsafədə yerləşən nöqtədir. Onda bütün X fəzasında təyin edilmiş elə xətti f funksionalı vardır ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1. İxtiyari $x \in L$ üçün $f(x)=0$
2. $f(x_0)=1$.
3. $\|f\|=\dfrac{1}{d}$.

Yuxarıda biz $\{f_n\} \subset X^*$ funksionallar ardıcıllığının $f \in X^*$ funksionalına zəif yığılması anlayışı ilə tanış olduq. f xətti funksionalından istifadə edərək $\{x_n\} \subset X$ elementlər ardıcıllığının zəif yığılması anlayışını da daxil edə bilərik.

Tərif. Əgər istənilən $f \in X^*$ funksionalı üçün

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı x elementinə zəif mənada yığılır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, X normalaşmış fəzasında $\{x_n\}$ ardıcıllığı x elementinə normaya nəzərən yığılırsa, onda bu ardıcıllıq zəif mənada da yığılır. Doğrudan da $n\to\infty$ şərtində $\|x_n - x\|\to 0$ olduğu üçün istənilən f xətti məhdud funksionalı üçün

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|\le\|f\|\cdot\|x_n-x\|$$

bərabərsizliyindən $|f(x_n)-f(x)|\to 0$ alırıq. Bu isə $\{x_n\}$ elementlər ardıcıllığının x-ə zəif mənada yığılan olduğunu göstərir.

Tərif. Əgər istiyari $f \in X^*$ funksionalı üçün $\{f(x_n)\}$ ardıcıllığı fundamental olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına zəif fundamental ardıcıllıq deyilir.

Qeyd edək ki, fəzanın tamlığı və kompaktlıq anlayışlarını da ardıcıllıqların zəif yığılmasına görə təyin etmək olar.

Tərif. Əgər X fəzasında istənilən zəif fundamental ardıcıllıq bu fəzanın hər hansı elementinə zəif mənada yığılarsa, onda bu fəzaya zəif tam fəza deyilir.

Tərif. Əgər X fəzasının istənilən sonsuz $M \subset X$ altçoxluğundan zəif yığılan ardıcıllıq ayırmaq mümkün olarsa, onda M çoxluğuna zəif kompakt çoxluq deyilir.

18.3. Hilbert fəzasında xətti funksionalın ümumi şəkli

Aşağıda göstərilən teorem funksional analizin əsas teoremlərindən biridir və çoxsaylı tətbiqləri vardır. F.Rissə məxsus bu teorem Hilbert fəzasında xətti məhdud funksionalın skalyar hasil vasitəsi ilə təyin olunduğunu göstərir.

Teorem (F.Riss). $H-$ Hilbert fəzasında hər yerdə təyin olunmuş istənilən xətti məhdud f funksionalı üçün elə yeganə $y \in H$ elementi vardır ki, istənilən $x \in H$ üçün

$$f(x) = (x, y)$$

doğrudur. Bu halda $\|f\| = \|y\|$.

İsbatı. L ilə H fəzasının $f(z) = 0$ şərtini ödəyən $z \in H$ elementləri çoxluğunu işarə edək.

Aydındır ki, $L \subset H$ altfəzadır.

Əgər $L = H$ olarsa, bu zaman $f = 0$ və $y = 0$ götürmək lazımdır.

Fərz edək ki, $L \neq H$. Bu halda elə $z_0 \in H$ tapmaq olar ki, $z_0 \perp L$, $z_0 \neq 0$ və $f(z_0) = 1$ olsun (əgər z_0 elementi bu şərti ödəməzsə, onda z_0 əvəzinə $z_0' = \dfrac{z_0}{f(z_0)}$ elementini götürə bilərik).

$x \in H$ elementi üçün $x - f(x)z_0 \in L$ olar, çünki

$$f(x - f(x)z_0) = f(x) - f(x)f(z_0) = f(x) - f(x) = 0.$$

Onda $x - f(x)z_0 \perp z_0$ olar. Bu halda

$$0 = (x - f(x)z_0, z_0) = (x, z_0) - f(x)\|z_0\|^2$$

Buradan $f(x) = \dfrac{(x, z_0)}{\|z_0\|^2}$. Əgər $y = \dfrac{z_0}{\|z_0\|^2}$ qəbul etsək, $f(x) = (x, y)$ alarıq.

İndi isə $\|f\| = \|y\|$ olduğunu göstərək. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə yaza bilərik:

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Funksionalın normasının tərifinə görə $\|f\| \leq \|y\|$ alırıq. Digər tərəfdən $f(y) = (y, y) = \|y\|^2 \leq \|f\| \cdot \|y\|$ bərabərsizliyindən $\|y\| \leq \|f\|$ alırıq. Nəticədə $\|f\| = \|y\|$ alırıq. y elementinin yeganəliyini göstərək. $f(x) = (x, y) = (x, \bar{y})$ şərtini ödəyən y və $\bar{y}$ elementləri olarsa, bu halda istənilən $x \in H$ üçün $(x, y - y) = 0$ olar. $x = y - \bar{y}$ qəbul etsək,

$$(y - \bar{y}, y - \bar{y}) = \|y - \bar{y}\|^2 = 0$$

və $y = \bar{y}$ alarıq. Teorem isbat olundu.

Qeyd. Riss teoremindən alınır ki, H Hilbert fəzası ilə H^* qoşma fəzası arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar, belə ki, bu uyğunluq zamanı norma saxlanır. Eyni zamanda bu uyğunluq xəttidir. Ona görə də qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mənada $H = H^*$ qəbul etmək olar. Bu mənada H Hilbert fəzası öz-özünə qoşma fəza hesab edilir.

18.4. Refleksiv fəzalar

Fərz edək ki, X Banax fəzasıdır. Bu fəzanın qoşması olan X^* fəzası da Banax fəzasıdır. Onda $X^{**}=\left(X^*\right)^*$ bərabərliyi vasitəsilə X fəzasının ikinci qoşmasını, $X^{***}=\left(X^{**}\right)^*$ bərabərliyi ilə üçüncü qoşmasını və bu qayda ilə istənilən dərəcəli qoşmasını təyin edə bilərik. Nəticədə $X, X^*, X^{**}, X^{***},...$ Banax fəzalar zənciri alarıq. Əgər xüsusi halda X Hilbert fəzası olarsa, $X^*=X$ olar və zəncirin bütün fəzaları üst-üstə düşər. Fərz edək ki, $X^*\neq X$. Bu halda X^{**} fəzası $X^*=L(X,R)$ fəzasında təyin edilmiş xətti məhdud funksionallardan ibarət fəzadır. İsbat olunmuşdur ki, $X\subset X^{**}$.

Tərif. Əgər $X^{**}=X$ olarsa, bu halda X Banax fəzası refleksiv fəza adlanır.

Refleksiv Banax fəzalarının mühüm tətbiqi əhəmiyyəti vardır. Belə ki, refleksiv Banax fəzaları Hilbert fəzalarının malik olduqları bir çox xassələrə malikdirlər. Əgər X refleksiv deyilsə, onda $X, X^*, X^{**}, X^{***},...$ fəzaları hamısı müxtəlif fəzalardır.

Refleksiv fəzalar haqqında mühüm teoremlər doğrudur.

Teorem 1. Refleksiv Banax fəzasının istənilən alt fəzası da refleksivdir.

Teorem 2. Banax fəzası yalnız və yalnız o zaman refleksiv olar ki, onun qoşması refleksiv fəza olsun.

Teorem 3. X Banax fəzasının refleksiv olması üçün zəruri və kafi şərt, bu fəzanın istənilən məhdud ardıcıllığının fəzanın hər hansı $x\in X$ elementinə zəif yığılan altardıcıllığının olmasıdır.

Tərif. Əgər X Banax fəzasında $\{x_n\}\subset X$, $\{y_n\}\subset X$ ardıcıllıqları üçün $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ və $n\to\infty$ $\|x_n+y_n\|\to 2$ şərtlərindən $\|x_n-y_n\|\to 0$ olması alınarsa, o zaman X -ə müntəzəm qabarıq fəza deyilir. Hilbert fəzasında

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

paraleloqram bərabərliyindən istifadə etməklə göstərmək olar ki, Hilbert fəzası müntəzəm qabarıqdır.

Teorem 4. İstənilən müntəzəm qabarıq Banax fəzası refleksiv fəzadır.

18.5. Xətti funksionallara aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Aşağıdakı funksionalların xətti və kəsilməz olub-olmadığını göstərin:

a) $f(x)=\int\limits_0^1 x^2(t)dt$, $\qquad x(t)\in C[0,1]$

b) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\sin^2 tdt$, $\qquad x(t)\in L_2[0,1]$

v) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \sin k$, $\qquad x=(x_1,x_2,...)\in L$,

$$L=\left\{x: x\in l_2, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin k<\infty\right\},\ \ \|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Həlli. a) Göstərək ki, f funksionalı kəsilməzdir, amma xətti deyildir. Bunun üçün əvvəlcə $x_n(t)$, $x(t)\in C[a,b]$ üçün $x_n(t)\to x_0(t)$ olduqda, $x_n^2(t)\to x_0^2(t)$ olduğunu göstərək:

$$\max_{0\le t\le 1}\left|x_n^2(t)-x_0^2(t)\right|\le \max_{0\le t\le 1}|x_n(t)||x_n(t)-x_0(t)|+$$
$$+\max_{0\le t\le 1}|x_0(t)||x_n(t)-x_0(t)|\le$$
$$\le C\left(+\max_{0\le t\le 1}|x_0(t)|\right)\max_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0,\ n\to\infty.$$

Beləliklə, alırıq ki, $x_n^2(t)$ ardıcıllığı $x_0^2(t)$-yə müntəzəm yığılır. Müntəzəm yığılan funksional ardıcıllıqların inteqrallanması haqqında teoremə əsasən $n\to\infty$ şərtində

$$\int_0^1 x_n^2(t)dt\to\int_0^1 x_0^2(t)dt,$$

yəni $f(x_n)\to f(x_0)$. Deməli f kəsilməz funksionaldır. Amma

$x_1(t), x_2(t)\in C[0,1]$, $\int\limits_0^1 x_1(t)x_2(t)dt\ne 0$ olan

$$f(x_1+x_2)=\int_0^1\left[x_1^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+x_2^2(t)\right]dt=$$
$$=2\int_0^1 x_1(t)x_2(t)dt+f(x_1)+f(x_2)$$

Göründüyü kimi $f(x_1+x_2)\ne f(x_1)+f(x_2)$. Yəni f funksionalı xətti deyildir.

b) Göstərək ki, f xətti və kəsilməz funksionaldır.

Istənilən $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ ədədlər və $x_1(t), x_2(t) \in L_2[0,1]$ üçün

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \int_0^1 (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) \sin^2 t dt =$$

$$= \alpha_1 \int_0^1 x_1(t) \sin^2 t dt + \alpha_2 \int_0^1 x_2 \sin^2 t dt = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

və

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)| \sin^2 t dt \leq \left(\int_0^1 \sin^4 t dt \right) \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|x\|$$

$\|f\| \leq 1$.

v) Əvvəlcə f funksionalının xəttiliyini göstərək.

İstənilən $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ ədədləri və $x_1, x_2 \in L$ üçün

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_1 x_k^{(1)} + \alpha_2 x_k^{(2)} \right) \sin k =$$

$$= \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(1)} \sin k + \alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(2)} \sin k = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

İndi isə göstərək ki, f məhdud deyildir. Bu məqsədlə istənilən $n \in N$ üçün aşağıdakı kimi ardıcıllıq götürək:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{C}} \left(\frac{\sin 1}{1}, \frac{\sin 2}{2}, ..., \frac{\sin n}{n^\alpha}, 0, 0, ... \right)$$

burada

$\alpha = \frac{1}{2} + \sigma$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}}$.

Aydındır ki, istənilən n üçün $x_n \in L$ və

$$\|x_n\|^2 = \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^{2\alpha}} \leq \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} = 1$$

Amma $f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k}{k^\alpha} \to \infty$, $n \to \infty$.

Çünki $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k}{k^\alpha}$ sırası dağılan sıradır. Ona görə də $\|f\| = \sup\limits_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in L}} |f(x_n)| = +\infty$, yəni funksional məhdud (kəsilməz) deyildir.

2. Tutaq ki, F n-ölçülü E^n normalaşmış fəzasında təyin edilmiş funksionaldır. Göstərin ki, E^n fəzasında xətti funksionalı ümumi şəkli

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \tag{1}$$

kimidir, burada x_i, $(i=1,2,...,n)$– x vektorunun hər hansı bazisdə koordinatları, α_i $(i=1,2,...,n)$ isə istənilən həqiqi ədədlərdir.

Həlli. 1. Əvvəlcə göstərək ki, göstərilən şəkildə funksional xəttidir. İxtiyari $x,y\in E^n$ götürək. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$

$$F(\lambda x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\lambda x_i)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\lambda F(x)$$

$$F(x+y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=F(x)+F(y)$$

2. İndi tutaq ki, F istənilən xətti funksionaldır. Göstərmək lazımdır ki, həmin funksionalı da (1) şəklində göstərmək olar. Bu məqsədlə E^n fəzasında hər hansı $e_1,e_2,...,e_n$ bazisi seçək. Onda istənilən $x\in E^n$ elementini

$$x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$$

kimi göstərmək olar. Onda F-in xəttiliyinə görə

$$F(x)=F(x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n)=$$
$$=x_1F(e_1)+x_2F(e_2)+...+x_nF(e_n)$$
$$\alpha_1=F(e_1),\ \alpha_2=F(e_2)...\alpha_n=F(e\ \ )$$

işarə etsək

$$F(x)=\alpha_1x_2+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n$$

alarıq. Yəni F funksionalı (1) şəklində yazıla bilər.

3. $C[a,b]$ fəzasında $\Phi(f)=f(x_0)$, $x_0\in[a,b]$ bərabərliyi ilə verilmiş funksionalın xətti kəsilməz olduğunu göstərin və normasını tapın.

Həlli. Funksionalın additiv və bircins olması aydındır.

$$|\Phi(t)|=|f(x_0)|\le\max_{a\le x\le b}|f(x)|=\|f\|$$

bərabərsizliyindən $\|\Phi\|\le 1$ olması, yəni kəsilməz olması alınır. Funksionalın normasını tapmaq üçün $f_0(x)\equiv 1$ götürək. Bu halda $\|\Phi\|\ge|\Phi(f_0)|=1$. Nəticədə $\|\Phi\|=1$ alarıq.

4. Göstərin ki, $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$ və $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ istənilən həqiqi ədədlər olduqda

$$F(y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y(x_k),$$

bərabərliyi $C[a,b]$ fəzasında xətti kəsilməz funksional təyin edir. Funksionalın normasını tapın.

Həlli. Funksionalın additivliyini və bircinsliyini asanlıqla yoxlamaq olar. İstənilən $y(x) \in C[a,b]$ üçün yaza bilərik:

$$|F(y)| \le \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y(x_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| |y(x_k)| \le$$

$$\le \max_{a \le x \le b} |y(x)| \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right) \|y\|$$

Bu bərabərsizlikdən F funksionalının məhdud (kəsilməz) olmasını alırıq və $\|F\| \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. $\|F\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ olduğunu göstərmək üçün elə $y_0(x) \in C[a,b]$ funksiyası seçmək lazımdır ki, $\|y_0\| = 1$ və $|F(y_0)| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ olsun. Məsələn, $y_0(x)$ olaraq $C[a,b]$ fəzasından elə funksiya götürmək olar ki, $y(x_k) = sign\alpha_k$ ($signx = 1$, əgər $x > 0$, $signx = -1$, əgər $x < 0$ və $sign0 = 0$). Bu halda yuxarıdakı şərt ödənilər və $\|F\| \ge |F(y_0)| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ olar. Nəticədə $\|F\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ alarıq.

5. Tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ sırası mütləq yığılandır və $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ istənilən nöqtələr ardıcıllığıdır.

Göstərin ki,

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y(x_k)$$

$C[a,b]$ fəzasında xətti məhdud (kəsilməz) funksionaldır. Bu funksionalın normasını tapın.

Həlli. $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ yığılan sıra olduğundan və $C[a,b]$-yə daxil olan istənilən funksiya məhdud olduğundan müsbət sıraların müqayisə əlamətinə görə $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k y(x_k)|$ sırası da yığılandır. Ona görə $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y(x_k)$ yığılandır və istənilən $y(x) \in C[a,b]$ üçün $F(y)$ təyin edilmişdir. Yığılan sıralar haqqında məlum xassələrdən istifadə etməklə, $F(y)$-in additiv və bircins olduğunu göstərə bilərik.

Funksionalın kəsilməzliyini göstərək:

$$|F(y)| \le \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y(x_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| |y(x_k)| \le$$

$$\leq \max_{a\leq x\leq b}|y(x)|\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| = \|y\|\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|.$$

Buradan F funksionalının məhdud (kəsilməz) olması alınır, belə ki, $\|F\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$.

İsbat edək ki, $\|F\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $m \in N$ tapmaq olar ki, $\sum_{k=m+1}^{\infty}|\alpha_k| < \varepsilon$. $y_m(x)$ ilə elə $y(x) \in C[a,b]$ funksiyasını işarə edək ki, $|y(x)| \leq 1$ və $1 \leq k \leq m$ üçün $y(x_k) = sign\alpha_k$ olsun. $1 \leq k \leq m$ olduqda $\alpha_k y(x_k) = \alpha_k sign\alpha_k = |\alpha_k|$ olduğundan

$$F(y_m) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k y_m(x_k) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k y(x_k) + \sum_{k=m+1}^{\infty}\alpha_k y(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty}\alpha_k y(x_k).$$

İstənilən k üçün $|y(x_k)| \leq 1$ olduğundan

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\alpha_k y(x_k)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty}|\alpha_k| < \varepsilon$$

Buradan alarıq ki,

$$F(y_m) \geq \sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| - \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| - 2\varepsilon$$

Nəticədə

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| - 2\varepsilon < F(y_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$$

bərabərsizliyindən $\varepsilon > 0$-ın ixtiyariliyinə əsasən

$$\|F\| = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$$

alarıq.

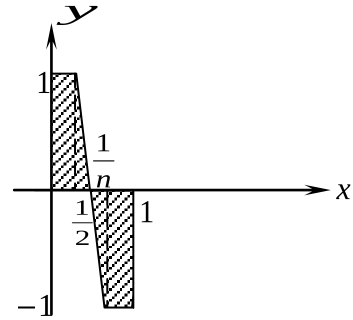
6. $F(y) = \int_{0}^{1/2} y(x)dx - \int_{1/2}^{1} y(x)dx$ funksionalının $C[0,1]$ fəzasında xətti kəsilməz olduğunu göstərin və onun normasını tapın.

Həlli. Funksionalın additiv və bircins olması aydındır. İstənilən $y(x) \in C[0,1]$ üçün yaza bilərik:

$$|F(y)| = \left| \int_0^{1/2} y(x)dx - \int_{1/2}^{1} y(x)dx \right| \le \left| \int_0^{1/2} y(x)dx \right| + \left| \int_{1/2}^{1} y(x)dx \right| \le$$

$$\le \int_0^{1/2} |y(x)|dx + \int_{1/2}^{1} |y(x)|dx = \int_0^{1} |y(x)|dx \le \max_{0 \le x \le 1} |y(x)| = \|y\|$$

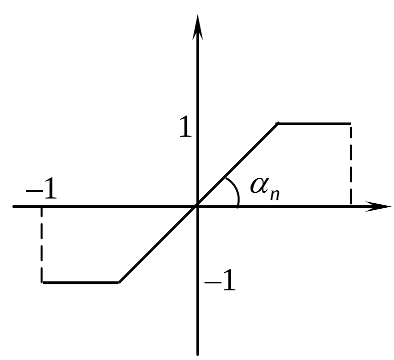
$|F(y)| \le \|y\|$ bərabərsizliyindən funksionalın məhdud və kəsilməz olması alınır. Eyni zamanda $\|F\| \le 1$ alırıq. $\|F\| = 1$ olduğunu almaq üçün elə $y_n(x)$ ardıcıllığı tapmaq lazımdır ki, $\|y_n\| = 1$ və $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1$ olsun.



Qrafiki şəkildə verilmiş $y_n(x)$ funksiyalarını götürək. Şəkildən görünür ki, $F(y_n) = 1 - \frac{1}{n}$ (ştrixlənmiş fiqurun sahəsi). $\|y_n\| = 1$ və $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1$. Buradan $\|F\| = 1$ alırıq.

7. $C[-1,1]$ fəzasına daxil olan və $x_0 = 0$ nöqtəsində diferensiallanan funksiyalardan ibarət altfəzada təyin edilmiş $F(y) = y'(0)$ funksionalı xətti məhdud funksionaldırmı?

Həlli. Funksionalın xətti olduğunu bilavasitə yoxlamaq olar. Göstərək ki, funksional kəsilməz deyildir.



Bunun üçün qrafiki şəkildə qurulmuş funksiyalara baxmaq kifayətdir. $tg\alpha_n = n$; $n-$ istənilən natural ədəddir. Bu funksiya üçün $F(y_n) = y_n'(0) = tg\alpha_n = n$ $\quad \|y_n(x)\| = 1$ olduğundan
$|F(y_n)| = n\|y_n\|$.
Buradan alınır ki, istənilən $K > 0$ ədədi üçün elə $y_n(x)$ funksiyası tapmaq olar ki, $n > K$ olduqda

$$|F(y_n)| = n\|y_n\| > K\|y_n\|$$

Buradan məlum teoremə görə funksionalın qeyri-məhdud olması alınır.

8. İsbat edin ki, R^n fəzasında təyin olunmuş ixtiyari f xətti funksional üçün elə $a \in R^n$ elementi vardır ki, istənilən x elementi üçün $f(x) = (x,a)$ bərabərliyi doğrudur və $\|f\| = \|a\|$.

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, R^n fəzasında istənilən xətti funksionalı $f(x)=(x,a)$ şəklində göstərmək olar. $e_1,e_2,...,e_n$ bazis vektorlarını götürək: $e_i=\left(\underbrace{0,0,...,1}_{i},0,...,0\right)$. Onda istənilən $x\in R^n$ üçün $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$ olar. $a_i=f(e_i)$ götürək və $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ işarə edək.

$$f(x)=f(x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n)=$$
$$=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+...+x_nf(e_n)=$$
$$=x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n=(x,a)$$

alarıq. Göstərmək olar ki, a elementi yeganə üsulla təyin edilir. Əgər $x=e_i$ qəbul etsək, $f(e_i)=(e_i,a)$ olar. Digər tərəfdən $(e_i,a)=a_i$ olduğundan $a_i=f(e_i)$ alarıq. Bu onu göstərir ki, a_i-lər yeganə üsulla tapılır, deməli $a\in R^n$ yeganədir.

İndi isə $\|f\|=\|a\|$ olduğunu göstərək:

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$|f(x)|\le|(x,a)|\le\|x\|\cdot\|a\|$$

Buradan $\|f\|\le\|a\|$.

$x=a$ qəbul etsək,

$$f(a)=(a,a)=\|a\|^2=\|a\|\cdot\|a\|$$

Digər tərəfdən $|f(a)|\le\|f\|\cdot\|a\|$, $\|f\|\ge a$ alırıq. Nəticədə $\|f\|=a$ alırıq.

9. Göstərin ki, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kc_k$ bərabərliyi l_2 fəzasında xətti məhdud funksionalın ümumi şəklini təyin edir.

Həlli. Qeyd edək ki, $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$, $c=(c_1,c_2)\in l_2$ olduqda $(x,c)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kc_k$ bərabərliyi l_2 fəzasında sonlu skalyar hasil təyin edir.

Bu skalyar hasil qeyd olunmuş hər bir $c\in l_2$ elementi üçün $x\in l_2$-yə qarşı bir həqiqi ədəd qarşı qoyur, yəni l_2 fəzasında skalyar hasil təyin edir. Bu funksional xəttidir, çünki

$$f\left(\alpha_1x^{(1)}+\alpha_2x^{(2)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_1x_k^{(1)}+\alpha_2x_k^{(2)}\right)c_k=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_1x_k^{(2)}c_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_2x_k^{(2)}c_k=$$
$$=\alpha_1\left(x^{(1)},c\right)+\alpha_2\left(x^{(2)},c\right)=\alpha_1f\left(x^{(1)}\right)+\alpha_2f\left(x^{(2)}\right).$$

Göstərək ki, l_2-də təyin olunmuş istənilən xətti məhdud f funksionalını $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k$ şəklində göstərmək olar. $\{e_k\}\in l_2$ ortonormal bazisini götürək və istənilən $x\in l_2$ elementini $x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k l_k$ kimi göstərək.

f xətti və kəsilməz olduğundan

$$f(x)=f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right)=f\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\right)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} x_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k ,$$

burada $c_k = f(e_k),\ k=1,2,...$

Göstərək ki, $c\in l_2$. Elə $a=(a_1,a_2,...,a_n...)$ elementinə baxaq ki, $k=1,2,...,n$ üçün $a_k=c_k$, $k=n+1,...,a_k=0$ olsun. Onda $f(a)=\sum_{k=1}^{n} c_k^2$. Digər tərəfdən f məhdud funksional olduğundan elə M ədədi vardır ki,

$$|f(a)|\le M\|a\|=M\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}=M\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}$$

Buradan $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\le M$ və ya $\sum_{k=1}^{n} c_k^2\le M^2$ alarıq. Sağ tərəf n-dən asılı deyildir. $n\to\infty$ limitə keçsək, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\le M^2$.

Tərifə görə M ədədlərindən ən kiçiyi $\|f\|$ olduğundan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2}\le\|f\|$$

alarıq. Beləliklə, $c=(c_1,c_2,...,c_n,...)\in l_2$.

Əgər $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k$ bərabərliyində $x_k=e_k$ götürsək

$$f(e_j)=\sum_{k=1}^{\infty} e_j c_k = c_j$$

alarıq. Yəni c_k əmsalları yeganə üsulla tapılır. Alırıq ki, elə $c\in l_2$ elementi vardır ki,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k = (x,c)$$

doğrudur. Bu isə $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k$ ifadəsinin l_2-də xətti funksionalın ümumi şəkli olduğunu göstərir. İndi isə f funksionalının normasını hesablayaq:

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2} \|x\|$$

Buradan

$$\|f\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2} .$$

Nəticədə $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2}$.

10. l_1 fəzasında xətti funksionalın ümumi şəklini və normasını tapın.

Həlli. Məlum olduğu kimi l_1 fəzası elə $x=(x_1,x_2,...)$ ardıcıllıqlarından ibarətdir ki, $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$ olsun. l_1 fəzasında $e_i=\left(\underbrace{0,0,...,1}_{k},0,0...\right)$ vektorlar sistemi bazis əmələ gətirir. Ona görə də istənilən $x \in l_1$ üçün

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k .$$

$c_k = f(e_k)$ qəbul etsək

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k .$$

$c_k = f(e_k)$ olduğundan

$$|c_k|=|f(e_k)| \le \|f\|\|e_k\| = \|f\|$$

$\{c_k\}$ məhdud ardıcıllıqdır və

$$\sup_k |c_k| \le \|f\| \tag{**}$$

Digər tərəfdən $\{c_k\}$ ixtiyari məhdud ardıcıllıq olduqda istənilən $x \in l_1$ üçün $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cdot|x_k| \le \|f\|\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|.$$

Bu bərabərsizlikdən $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ sırasının mütləq yığılan olduğunu alırıq. Ona görə də bu sıra vasitəsilə hər bir $x \in l_1$ elementinə qarşı sıranın cəmindən ibarət ədəd qarşı qoyur. Başqa sözlə

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k$$

bərabərliyi l_1-də funksional təyin edir. $f(x)$-in xəttiliyini asanlıqla göstərmək olar. f -in normasını tapaq:

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cdot|x_k| \le \sup_k |c_k| \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = \left(\sup_k |c_k|\right)\|x\|$$

Buradan

$$\|f\| \le \sup_k |c_k| \qquad (***)$$

(**) və (***) bərabərsizliklərindən $\|f\| = \sup_k |c_k|$ olduğunu alırıq.

11. $C[0,1]$ fəzasında

$$F(y) = \int_0^1 y(x)dx$$

funksionalının xətti və kəsilməz olduğunu göstərin. Funksionalın normasını tapın.

Həlli. İstənilən α_1, α_2 ədədləri və $y_1(x), y_2(x) \in C[0,1]$ üçün

$$F(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \int_0^1 [\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)]\, dx =$$

$$= \alpha_1 \int_0^1 y_1(x)dx + \alpha_2 \int_0^1 y_2(x)dx = \alpha_1 F(y_1) + \alpha_2 F(y_2)$$

bərabərliyindən F -in xətti olması alınır.

$$|F(y)| \le \int_0^1 |y(x)|dx \le \int_0^1 \max|y(x)|dx \le \|y\|$$

bərabərsizliyindən istənilən $y_1(x), y_2(x) \in C[0,1]$ üçün

$$|F(y_1) - F(y_2)| \le \|y_1 - y_2\|$$

bərabərsizliyindən F -in kəsilməz olduğunu və $\|F\| \le 1$ olmasını alırıq.

$$y_n(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\ \left(\frac{1}{2}-x\right)n, & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le x\le \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\\ -1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

ardıcıllığına baxaq. $\|y_n(x)\|\le 1$ olması aydındır.

$$F(y_n)=\int_0^1 y_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}1dx+\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{2}-x\right)ndx+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}(-1)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=1-\frac{2}{n}$$

olduğunu nəzərə alsaq, $\lim\limits_{n\to\infty}F(y_n)=1$ alarıq, yəni $\|F\|=1$.

12. $C[0,2]$ fəzasında $F(y)=\int_0^2(x-1)y(x)dx$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş funksionalın xətti və məhdud olduğunu göstərin və normasını tapın.

Həlli. F funksionalının xətti olduğunu asanlıqla yoxlamaq olar.

$$|F(y)|=\left|\int_0^2(x-1)y(x)dx\right|\le\int_0^2|x-1||y(x)|dx\le$$

$$\le\max_{x\in[0,2]}|y(x)|\int_0^2|x-1|dx\le\|y\|$$

Buradan $\|F\|\le 1$ alırıq.

$$y_n(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1-\frac{1}{n}\\ (1-x)n, & 1-\frac{1}{n}\le x\le 1+\frac{1}{n}\\ -1, & 1+\frac{1}{n}\le x\le 2,\end{cases}$$

ardıcıllığını götürək.

$$\|y_n\|=\max_{0\le x\le 2}|y_n(x)|=1$$

$$F(y_n)=\int_0^2(x-1)y_n(x)dx=\int_0^{1-\frac{1}{n}}(x-1)(-1)dx+$$

$$+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}(x-1)(1-x)ndx+\int_{1+\frac{1}{2}}^{2}(x-1)dx=1-\frac{2}{3n^2}$$

Buradan $\lim_{n\to\infty}F(y_n)=1$ olduğundan $\|F\|=1$ alırıq.

13. Tutaq ki, $t_1,t_2,...,t_n\in[a,b]$ hər hansı nöqtələr, $c_k\in R-$ həqiqi ədədlərdir. Göstərin ki,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k x(t_k)$$

formulu $C[a,b]$ fəzasında xətti kəsilməz funksional təyin edir. Bu funksionalın normasını tapın.

Həlli. İstənilən $x_1(t),x_2(t)\in C[a,b]$ və $\lambda,\mu\in R$ ədədləri üçün

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)=\sum_{k=1}^{n}c_k[\lambda x_1(t_k)+\mu x_2(t_k)]=$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k x_1(t_k)+\mu\sum_{k=1}^{n}c_k x_2(t_k)=\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$$

olduğundan f xətti funksionaldır. Funksionalın kəsilməz olması aşağıdakı qiymətləndirmədən alınır.

$$|f(x)|\le\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cdot|xt(_k)|\le\max_{a\le t\le b}|x(t)|\sum_{k=1}^{n}|c_k|=\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|\right)\|x\|$$

Buradan $\|f\|\le\sum_{k=1}^{n}|c_k|$.

İndi $[a,b]$ parçasında $t_1,t_2,...,t_n$ nöqtələrində $\tilde{x}(t_k)=signc_k$ $(k=1,2,...,n)$ qiymətlərini alan, $[t_k,t_{k+1}]$ parçasında xətti, $[a,t_1]$ və $[t_n,b]$ parçalarında sabit olan hissə-hissə $\tilde{x}(t)$ funksiyasına baxaq. Bu halda $\|\tilde{x}(t)\|\le1$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\le1}|f(x)|\ge|f(\tilde{x})|=\left|\sum_{k=1}^{n}c_k\tilde{x}(t_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}c_k signc_k=\sum_{k=1}^{n}|c_k|,$$

Deməli, $\|f\|\ge\sum_{k=1}^{n}|c_k|$. Nəticədə $\|f\|=\sum_{k=1}^{n}|c_k|$ alarıq.

14. l_2 fəzasında $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$ üçün

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k+x_{k+1}}{2^k}$$

funksionalının xətti, kəsilməz olduğunu göstərin və normasını hesablayın.

Həlli. Funksionalın xətti olduğunu asanlıqla yoxlamaq olar. Verilmiş funksionalı aşağıdakı kimi yazaq:

$$f(x) = \frac{x_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)x_{k+1} = \frac{x_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{2^{k+1}}x_{k+1}$$

Buradan

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k} = 1,$$

$\|f\| = 1$, yəni f məhdud (kəsilməz) funksionaldır.

15. Tutaq ki, $f \in E^*$, $f \neq 0$ xətti funksionalı verilmişdir və $M = \{x \in E;\ f(x) = 1\}$. Göstərin ki, $\frac{1}{\|f\|} = \inf\limits_{x\in M}\|x\|$ doğrudur.

İsbatı. İstənilən $x \in E$ üçün $|f(x)| \leq \|f\|\cdot\|x\|$ olduğundan xüsusi halda $x \in M$ üçün $\frac{1}{\|f\|} \leq \|x\|$ olar. Buradan

$$\frac{1}{\|f\|} \leq \inf_{x\in M}\|x\|.$$

f funksionalının normasının tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $y_\varepsilon \in E$ elementi tapmaq olar ki,

$$|f(y_\varepsilon)| > (\|f\| - \varepsilon)\|y_\varepsilon\| \qquad (\|f\| > \varepsilon)$$

$x_\varepsilon = \frac{y_\varepsilon}{f(y_\varepsilon)}$ götürək. $x_\varepsilon \in M$ olar və $\|x_\varepsilon\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$ alarıq. Buradan $\inf\limits_{x\in M}\|x\| \leq \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. ε-nun ixtiyari olmasından $\inf\limits_{x\in M}\|x\| \leq \frac{1}{\|f\|}$ alarıq. Nəticədə $\frac{1}{\|f\|} = \inf\limits_{x\in M}\|x\|$ alırıq.

16. Tutaq ki, $p > 1$ qeyd olunmuş ədəddir. $\alpha \in R$ hansı qiymətlərində

$$f_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha}dt$$

Funksionalı $L_p^*[0,1]$ fəzasına daxildir?

Həlli. $L_p^*[0,1] = L_q[0,1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğu üçün $f_\alpha \in L_p^*[0,1]$ yalnız və yalnız o zaman olar ki, $\frac{1}{t^\alpha} \in L_q[0,1]$ olsun, yəni $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha q}}$ inteqralı yığılan olsun.

Bu inteqral o zaman yığılandır ki, $q\cdot\alpha<1$, $\alpha<\frac{1}{q}$ olsun. Bu halda

$$\|f\|=\left(\int_0^1\frac{dt}{t^{q\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{(1-q\alpha)^{\frac{1}{q}}}.$$

17. Göstərin ki, R^n fəzasında zəif və güclü yığılmalar eynigüclüdür.

Həlli. $x_m=\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^n$ ardıcıllığını götürək. Fərz edək ki, x_m ardıcıllığı $x_0=\left(x_i^{(0)}\right)\in R^n$-ə zəif yığılır. $f_i: f_i(x)=x_i$ $(i=1,2,...,n)$ $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, xətti kəsilməz funksionalları götürək. Onda istənilən i $(1\le i\le n)$ $f_i(x_m)=x_i^{(m)}\to x_i^{(0)}$ $(m\to\infty)$ və

$$\|x_m-x_0\|^2=\sum_{i=1}^n\left(x_i^{(m)}-x_i^{(0)}\right)^2\to 0,$$

$m\to\infty$ olduqda. Deməli, x_m ardıcıllığı x_0-a güclü yığılır. Güclü yığılmadan zəif yığılma həmişə alındığı üçün R^n-də bu iki yığılmanın ekvivalent olduğunu alırıq.

18. Göstərin ki, l_2 fəzasında zəif və güclü yığılmalar eynigüclü deyildir.

Həlli. l_2 fəzasında $e_i=\left(\underbrace{0,0,...,0}_{i-1},1,0,...\right)$, $i=1,2,...$ ardıcıllığını götürək və tutaq ki, $f\in l_2^*$. Onda $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$ kimi göstərilə bilər, belə ki, $\alpha_n\in l_2$. Buradan $i\to\infty$ şərtində $f(e_i)=\alpha_i\to 0$ alarıq. Yəni e_i ardıcıllığı l_2-də zəif mənada yığılandır. Amma bu ardıcıllıq l_2 fəzasında güclü mənada yığılan deyildir. Çünki, $\|e_n-e_m\|=\sqrt{2}\not\to 0$ $(n,m\to\infty)$ olduğundan bu ardıcıllıq heç fundamental deyildir.

19. $C[-1,1]$ fəzasında verilmiş xətti kəsilməz

$$f(x)=\int_{-1}^1 tx(t)dt-2x(0)$$

funksionalını Stirles inteqralı şəklində göstərin.

Həlli. $[-1,1]$ parçasında təyin edilmiş $g_0=\frac{t^2}{2}$ funksiyasını götürək. Onda

$$\int_{-1}^{1} x(t)dg_0(t) = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$$

olar. Funksionalın ifadəsinə $-2x(0)$ toplananı daxil olduğu üçün $g_0(t)$ funksiyasını elə dəyişmək lazımdır ki, $\int_{-1}^{1} x(t)dg_0(t)$ Stirles inteqralı $t=0$ nöqtəsində $-2x(0)$ sıçrayışına malik olsun. Ona görə də

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & -1 \le t \le 0. \\ \dfrac{t^2}{2} - 2, & -0 < t \le 1 \end{cases}$$

götürmək lazımdır. Bu halda $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dg(t)$ olar.

Qeyd. Bu tipli məsələləri həll edərkən, yadda saxlamaq lazımdır ki, əgər $x(t)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz isə, $g(t)$ funksiyasının sonlu sayda $c_1, c_2, ..., c_m$ nöqtələri istisna olmaqla $[a,b]$-nin hər yerində Riman mənada inteqrallanan $g'(t)$ törəməsi varsa, onda

$$\int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^b x(t)g'(t)dt + x(a)[g(a+0) - g(a)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} x(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + x(b)[g(b) - g(b-0)].$$

20. $C^*[0,2\pi]$ fəzasında zəif və güclü mənada yığılmalar eynigüclüdürmü?

Həlli. $C[0,2\pi]$ fəzasında aşağıdakı qayda ilə təyin edilmiş xətti, kəsilməz funksionallar ardıcıllığını götürək:

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt\,, \quad (n = 0,1,2,...)$$

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, $[0,2\pi]$ parçasında kəsilməz hər bir $x(t)$ funksiyasının $\{a_n(x)\}$ Furye əmsalları sıfra yığılır, $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0$, yəni (a_n) funksionallar ardıcıllığı sıfır funksionala zəif mənada yığılır.

İndi isə a_n funksionalını aşağıdakı kimi göstərək:

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)d\left(\int_0^t \cos nudu\right),$$

Burada

$$\underset{t\in[0,2\pi]}{\mathrm{var}}\left(\int_0^1 \cos nu du\right) = \int_0^{2\pi} |\cos nu| du$$

(yuxarıdakı misalda göstərilən qeydi nəzərə alsaq), onda yaza bilərik:

$$\|a_n\| = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\cos nt| dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}2\pi} |\cos nt| dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} |\cos z| dz = \frac{4}{\pi} \quad (n = 1,2,...)$$

yəni $\|a_n\| \not\to 0$, $n \to \infty$. Bu onu göstərir ki, $C[0,2\pi]$ fəzasında (a_n) xətti kəsilməz funksionallar ardıcıllığı zəif yığılır, amma güclü yığılmır.

21. l_2 fəzasında istənilən $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in l_2$ elementi üçün

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

bərabərliyi ilə təyin edilmiş f funksionalının xətti məhdud olduğunu göstərin və normasını tapın.

22. Aşağıda verilmiş funksionalların verilmiş fəzada xətti, kəsilməz funksional olub-olmadığını göstərin.

a) $x(t) \in C[0,1]$, $\qquad f(x) = \int_0^1 t|x(t)| dt$;

b) $x(t) \in C[0,1]$, $\qquad f(x) = \|x\|$;

v) $x(t) \in L_2[0,1]$, $\qquad f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$;

q) $x \in l_1$, $\qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$;

23. Aşağıdakı funksionalların normasını tapın.

a) $x(t) \in L_2[0,1]$, $\qquad f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t}\, x(t^2) dt$;

b) $x(t) \in L_2[0,1]$, $\qquad f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t) sign\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$;

v) $x \in l_1$, $\qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^k\right] \frac{k-1}{k} x_k$,

q) $x \in l_2$, $\qquad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$,

d) $x \in l_2$, $\qquad f(x)=x_1+x_2$,

e) $x \in l_2$, $\qquad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$.

24. $x(t)\in L_2[-1,1]$ üçün

$$f_n(x)=\int_{-1}^{1}x(t)\cos nt\,dt$$

funksionalının xətti məhdud olduğunu göstərin və normasını tapın.

25. $f(x)=\int_{-1}^{1}tx(t)dt$ funksionalının

a) $C[-1,1]$, b) $L_2[-1,1]$, $L_1[-1,1]$ fəzalarında normasını hesablayın.

XIX FƏSİL
ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OPERATORLAR

19.1. Qoşma operatorun tərifi

Fərz edək ki, X və Y normalaşmış fəzalardır. $A \in L(X,Y)$ operatorunu və $f \in Y^*$ xətti funksionalını götürək. İstənilən $x \in X$ elementi üçün $f(Ax)$ ifadəsinin mənası var.

$$\varphi(x) = f(Ax) \qquad (1)$$

funksionalını təyin edək. Bu funksional aşağıdakı xassələrə malikdir.

1) $D(\varphi) = X$

2) φ xətti funksionaldır. Doğrudan da istənilən α_1, α_2 ədədləri və $x_1, x_2 \in X$ üçün

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f[A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] = f[\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2] =$$
$$= \alpha_1 f(Ax_1) + \alpha_2 f(Ax_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2).$$

3) $\varphi(x)$ funksionalı məhduddur, çünki

$$|\varphi(x)| = |f(Ax)| \le \|f\| \cdot \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|$$

Deməli $\varphi \in X^*$. Beləliklə, hər bir $f \in Y^*$ funksionalına qarşı (1) qaydası ilə $\varphi \in X^*$ funksionalına qarşı qoyulmuşdur. Bu qayda ilə xətti kəsilməz $\varphi = A^* f$ yaxud $A^* : Y^* \to X^*$ operatoru təyin etmək olar. $A^* \in L(Y^*, X^*)$ operatoruna A operatoruna qoşma olan operator deyilir.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. Əgər $A \in L(X,Y)$ isə, onda $\|A^*\| = \|A\|$.

İsbatı. $\varphi(x)$ funksionalının 3)-cü xassəsindən və xətti funksionalın normasının tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\|\varphi\| \le \|A\| \cdot \|f\|,$$

yəni

$$\|A^* f\| \le \|A\| \cdot \|f\|,$$

buradan

$$\|A^*\| \le \|A\|.$$

Xan-Banax teoremindən çıxan nəticəyə əsasən $Ax_0 \ne 0$ şərtini ödəyən istənilən x_0 elementinə görə elə $f_0 \in Y^*$ funksionalı tapmaq olar ki, $\|f_0\| = 1$ və $f_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$ olsun. Buna əsasən yaza bilərik:

$$\|Ax_0\| = |f_0(Ax_0)| = |\varphi_0(x_0)| = |(A^* f_0)(x_0)| \le \|A^* f\| \cdot \|x_0\| \le$$

$$\leq \|A^*\| \cdot \|f_0\| \cdot \|x_0\| = \|A^*\| \cdot \|x_0\|$$

Buradan $\|A\| \leq \|A^*\|$. Nəticədə $\|A^*\| = \|A\|$ olduğunu alırıq.

Qoşma operatorlara misallar göstərək.

Misal 1. Tutaq ki, $X = Y = E^n -$ n ölçülü Evklid fəzasıdır. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ üçün

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,, \ i = 1,2,...,n \tag{2}$$

bərabərliyi vasitəsilə $y = Ax$ xətti operatoru təyin edək. $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in (E^n)^* = E^n$ elementi götürək.

Hilbert fəzasında xətti kəsilməz funksional skalyar hasil vasitəsilə təyin olunduğu üçün yaza bilərik:

$$z(Ax) = (Ax, z) = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) z_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i \right) x_j = (x, A^* z) = (A^* z)(x)$$

Burada $\omega = A^* z$ operatoru

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \,, \ j = 1,2,...$$

bərabərliyi ilə təyin edilir. Göründüyü kimi A^* operatoru A operatorunun matrisinə transponirə edilmiş matris vasitəsilə verilir.

Misal 2. Tutaq ki, $X = Y = L_2(a,b)$. $x(t) \in L_2(a,b)$ üçün

$$y(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds$$

bərabərliyi ilə $y = Kx$ inteqral operatoru təyin edək. $K(x,t)$ nüvəsi $[a,b] \times [a,b]$ kvadratına kəsilməz funksiyadır. Aşağıdakı bərabərliyi yaza bilərik:

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s) x(s) ds \right\} z(t) dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s) z(t) dt \right\} x(s) ds$$

Buradan alırıq ki, qoşma $\omega = K^* z$ operatoru da inteqral operatordur:

$$\omega(t) = \int_a^b K(s,t) z(s) ds \,,$$

Göründüyü kimi qoşma operatorun nüvəsi $K(t,s)$ nüvəsinin transponirə edilmişidir.

19.2. Öz-özünə qoşma operatorlar

Fərz edək ki, $X = Y = H$ hilbert fəzalarıdır. Bu halda Hilbert fəzalarında xətti funksionalın ümumi şəklinə əsasən A və A^* operatorları istənilən x, y üçün

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

bərabərliyi ilə bağlıdır. Ona görə də bu bərabərliyi H hilbert fəzasında qoşma operatorun tərifi kimi qəbul edə bilərik.

Tərif. H Hilbert fəzasında təyin edilmiş A operatoru öz qoşması ilə üst-üstə düşərsə, yəni $A = A^*$ şərti ödənərsə, A operatoruna öz-özünə qoşma operator deyilir.

Bu tərifə əsasən A operatoru öz-özünə qoşma isə, onda istənilən $x, y \in H$ üçün

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

şərti ödənilər.

Qeyd edək ki, öz-özünə qoşma operatorlar bir çox mühüm xassələrə malikdirlər və riyaziyyatın bir çox sahələrində, eləcə də kvant mexanikasında geniş tətbiqlərə malikdirlər.

Ona görə də verilmiş operatorun öz-özünə qoşma olması şərtlərini bilmək xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Məsələn, yuxarıda baxdığımız 1-ci misalda E^n fəzasında təyin edilmiş A operatoru o zaman öz-özünə qoşma olar ki, $a_{ij} = a_{ji}$ olsun, yəni (a_{ij}) matrisi simmetrik matris olsun.

Eləcə də, 2-ci misalda $L_2(a,b)$ fəzasında təyin edilmiş K inteqral operatoru o zaman öz-özünə qoşma olar ki, $K(t,s) = K(s,t)$ şərti ödənilsin, yəni $K(t,s)$ nüvəsi simmetrik nüvə olsun.

İndi isə öz-özünə qoşma operatorların əsas xassələrini göstərən bəzi teoremləri qeyd edək.

Teorem 1. Əgər A və B H hilbert fəzasında öz-özünə qoşma operatorlar isə, onda istənilən α və β həqiqi ədədlər üçün $\alpha A + \beta B$ operatoru da H fəzasında öz-özünə qoşma operatordur.

İsbatı. Skalyar hasilin xəttiliyi və A, B operatorlarının öz-özünə qoşma olmasından istifadə edərək aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilərik:

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$
$$= \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha Ay + \beta By) = (x, (\alpha A + \beta B)y)$$

Tərifə görə bu bərabərlik $\alpha A + \beta B$ operatorunun öz-özünə qoşma olması deməkdir.

Teorem 2. Fərz edək ki, A və B H fəzasında öz-özünə qoşma operatorlardır. $A \cdot B$ operatoru yalnız və yalnız o zaman öz-özünə qoşma olar ki, $AB = BA$ şərti ödənilsin.

Teoremin isbatı aşağıdakı bərabərlikdən alınır.

$$(ABx, y) = (Bx, Ay) = (x, BAy)$$

Teorem 3. Əgər A öz-özünə qoşma operatorlar isə, onda istənilən $x \in H$ üçün (Ax, x) həqiqi ədəddir.

İsbatı. Skalyar hasilin xassəsinə görə

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \left(\overline{Ax, x}\right)$$

doğrudur. (Ax, x) kompleks ədədi öz qoşmasına bərabər olduğundan o yalnız həqiqi ədəd ola bilər. Deməli (Ax, x) həqiqi ədəddir.

Məlum olduğu kimi istənilən A xətti operatorunun norması

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

Əgər A operatoru öz-özünə qoşma operator olarsa, bu halda isbat etmək olar ki, A operatorunun normasını

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

bərabərliyi ilə təyin etmək olar.

19.3. Mənfi olmayan operatorlar

Fərz edək ki, $H-$ hilbert fəzasıdır. $L(H)$ ilə H fəzasında təsir edən bütün öz-özünə qoşma operatorlar çoxluğunu işarə edək. Göstərəcəyik ki, bu çoxluqda qismən nizamlanma daxil etmək olar, yəni istənilən iki öz-özünə qoşma operator arasında "böyük, yaxud bərabərlik" münasibəti təyin etmək olar.

Tərif 1. Əgər istənilən $x \in H$ üçün $(Ax, x) \geq 0$ şərti ödənərsə, bu halda A öz-özünə qoşma operatoruna mənfi olmayan operator deyilir və $A \geq 0$ kimi işarə edirlər.

Tərifdən istifadə edərək asanlıqla göstərmək olar ki, $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$ isə, onda istənilən $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ ədədləri üçün $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \geq 0$.

Lemma 1. Əgər $F(A)$ mənfi olmayan A operatorundan asılı, müsbət əmsallı istənilən dərəcəli çoxhədli isə, onda həmin çoxhədli də mənfi olmayan operatordur.

İsbatı. Tutaq ki, $A \geq 0$. $F(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$, $\alpha_k \geq 0$. $A^0 = I$ vahid operatordur və $(A^0 x, x) = (Ix, x) = \|x\|^2 \geq 0$, yəni $A^0 \geq 0$. A öz-özünə qoşma olduğundan

$$\left(A^{2m}x,x\right)=\left(A^m x,A^m x\right)=\left\|A^m x\right\|^2\geq 0,$$

deməli $A^{2m}\geq 0$. Eləcə də

$$\left(A^{2m+1}x,x\right)=\left(A\left(A^m x\right),A^m x\right)=\left(Ay,y\right)\geq 0\quad\left(y=A^m x\right)$$

bərabərsizliyindən $A^{2m+1}\geq 0$ alırıq. Buradan $F(A)\geq 0$ olduğunu alırıq.

Əgər $A\geq 0$ mənfi olmayan operator isə, bu halda ümumiləşmiş Bunyakovski bərabərsizliyi adlanan aşağıdakı bərabərsizlik də doğrudur

$$\left|\left(Ax,y\right)\right|\leq\sqrt{\left(Ax,x\right)}\sqrt{\left(Ay,y\right)}$$

Tərif 2. Əgər A və B öz-özünə qoşma operatorları istənilən $x\in H$ üçün $\left(Ax,x\right)\geq\left(Bx,x\right)$ şərtini ödəyərsə, deyirlər ki, $A\geq B$ və ya $A-B\geq 0$.

Tərifdən istifadə edərək aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu göstərə bilərik:

1) $A\geq A$;
2) əgər $A\geq B$, $B\geq C$ isə, onda $A\geq C$;
3) əgər $A\geq B$ və $B\geq A$ isə, onda $A=B$;
4) əgər $A\geq B$ isə, onda $\alpha\geq 0$ olduqda $\alpha A\geq\alpha B$, $\alpha\leq 0$ olduqda isə $\alpha A\leq\alpha B$ doğrudur.

19.4. Unitar operatorlar

Əgər U xətti operatoru normanı saxlamaq şərti ilə H fəzasını bütün H fəzasına inikas etdirirsə, yəni $\forall x\in H$ üçün

$$\|Ux\|=\|x\| \tag{1}$$

olarsa, ona unitar operator deyilir.

Asanlıqla görmək olar ki, bu inikas qarşılıqlı birqiymətli inikasdır. Belə ki, əgər $Ux_1=Ux_2$ olarsa, onda $U\left(x_1-x_2\right)=0$, $\left\|x_1-x_2\right\|=\left\|U\left(x_1-x_2\right)\right\|=0$ və $x_1=x_2$ alarıq. Ona görə də U operatorunun U^{-1} tərs operatoru vardır və bu operator da unitar operatordur. (1) bərabərliyindən alınır ki,

$$\left(Ux,Ux\right)=\|Ux\|^2=\|x\|^2=\left(x,x\right)$$

buradan

$$\left(U^*Ux,x\right)=\left(x,x\right)=\left(Ix,x\right),$$

I – vahid operatordur. Buradan

$$U^*U=I\,. \tag{2}$$

Bu bərabərliyi soldan U və sağdan U^{-1}-ə vursaq

$$UU^*=I \tag{3}$$

$U^*U=UU^*=I$ bərabərliklərindən $U^*=U^{-1}$ olduğunu alırıq. (2) bərabərliyindən $\left(Ux,Uy\right)=\left(x,y\right)$ alınır. Əksinə (2) və (3) bərabərliklərindən

U-nun unitar operator olması və $U^{-1} = U^*$ olması alınır. Bu isə U-nun qarşılıqlı birqiymətli olması deməkdir. Eyni zamanda

$$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (U^*Ux, x) = (x, x) = \|x\|^2$$

bərabərliyindən U çevirməsinin normanı saxladığı alınır, yəni $\|Ux\| = \|x\|$ ödənilir.

Fərz edək ki, A H hilbert fəzasında təsir edən xətti operator, U isə unitar operatordur.

$$B = UAU^{-1} = UAU^* \tag{4}$$

operatoruna A operatoruna unitar ekvivalent olan operator deyilir.

(4) bərabərliyindən alınır ki, öz-özünə qoşma A operatoruna unitar-ekvivalent olan operator da öz-özünə qoşma operatordur. Asanlıqla göstərmək olar ki, unitar ekvivalent operatorların normaları bərabərdir.

19.5. Ortoqonal proyeksiya operatoru

Fərz edək ki, L H fəzasının hər hansı altfəzasıdır. Məlum olduğu kimi istənilən $x \in H$ elementini yeganə üsulla $x = y + z$, $y \in L$, $z \perp L$ şəklində göstərmək olar. $Px = y$ bərabərliyi vasitəsilə bütün H-da təyin edilmiş, qiymətlər çoxluğu L olan operator təyin edək. Bu operatora proyeksiya operatoru, yaxud L altfəzasına ortoqonal proyeksiyalama operatoru deyilir və P_L kimi işarə edilir. Isbat edək ki, P operatoru öz-özünə qoşma, norması vahidə bərabər olan və $P^2 = P$ şərtini ödəyən operatordur.

Əvvəlcə P-nin xətti operator olduğunu göstərək. Bu məqsədlə $x_1 = y_1 + z_1$ və $x_2 = y_2 + z_2$, $y_1, y_2 \in L$, $z_1, z_2 \perp L$ götürək. Onda

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2),$$

belə ki, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L$, $\alpha z_1 + \beta z_2 \perp L$.

Buradan

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2$$

alırıq. Yəni P xətti operatordur. $y \perp z$ şərtindən istifadə etsək

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

alarıq. Buradan $\|y\| \le \|x\|$, yaxud $\|Px\| \le \|x\|$ və $\|P\| \le 1$ olduğunu alırıq.

$x \in L$ üçün $Px = x$ olduğundan $\|Px\| = \|x\|$ və $\|P\| = 1$ alırıq.

Göstərək ki, P öz-özünə qoşma operatordur. Tutaq ki, $x_1, x_2 \in H$ istənilən elementlər, y_1, y_2 isə bu elementlərin L-də proyeksiyalarıdır. $Px_1 = y_1$, $Px_2 = y_2$. Onda

$$(Px_1, x_2) = (y_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

və analoji olaraq

$$(x_1, Px_2) = (x_1, y_2) = (y_1, y_2)$$

alarıq. Buradan $(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2)$, yəni P-nin öz-özünə qoşma olmasını alarıq.

Nəhayət, $\forall x \in H$ üçün $Px \in L$ olduğu üçün $P^2 x = P(Px) = Px$, buradan isə $P^2 = P$ alarıq.

İndi isə göstərək ki, yuxarıdakı təklifin tərsi də doğrudur. Yəni $P^2 = P$ şərtini ödyən hər bir öz-özünə qoşma P operatoru müəyyən L altfəzasına ortoqonal proyeksiya operatorudur.

$$L = \{y : \dot{y} = Px,\ x \in H\}$$

çoxluğunu götürək. P operatoru additiv və bircins olduğuna görə L çoxluğu xətti çoxobrazlıdır. Göstərək ki, L qapalı çoxluqdur. Bu məqsədlə $y_n \to y_0$, $y_n \in L$ ardıcıllığını götürək və $y_0 \in L$ olduğunu göstərək.

$y_n \in L$ olduğu üçün elə $x_n \in H$ ardıcıllığı vardır ki, $y_n = Px_n$. Buradan $Py_n = P^2 x_n = Px_n = y_n$ alarıq. P operatoru kəsilməz olduğu üçün $Py_n \to Py_0$. $Py_n = y_n$ olduğunu nəzərə alsaq, $y_n \to Py_0$ alarıq. Nəticədə $y_0 = Py_0$ və $y_0 \in L$ olar. Deməli L qapalı çoxluqdur, yəni alt fəzadır. P operatorunun öz-özünə qoşma olmasından və $P^2 = P$ şərtindən

$$(x - Px, Px) = (Px - P^2 x, x) = (0, x) = 0$$

alırıq, yəni $x - Px \perp Px$.

L altfəzasının təyin olunmasından alırıq ki, P operatoru bu altfəzaya proyeksiyalama operatorudur. Yəni yuxarıdakı təklif doğrudur. Eyni zamanda qeyd edək ki, L altfəzası H fəzasının $Px = x$ şərtini ödəyən elementlərindən ibarət altfəzadır.

İsbat edilmiş bu təklifdən, xüsusi halda , P operatoru ilə bərabər $I - P$ operatorunun da proyeksiya operatoru olduğunu alırıq.

Tərif 1. Əgər iki P_1 və P_2 operatorları üçün $P_2 P_2 = 0$ olarsa, onda onlara ortoqonal operatorlar deyilir.

Göstərmək olar ki, P_1 və P_2 proyeksiya operatorlarının ortoqonal olması üçün zəruri və kafi şərt onlara uyğun L_1 və L_2 altfəzalarının ortoqonal olmasıdır. Doğrudan da, əgər $P_1 P_2 = 0$ olarsa, onda $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ üçün

$$(x_1, x_2) = (P_1 x_1, P_2 x_2) = (P_2 P_1 x_1, x_2) = (0, x_2) = 0$$

Əksinə, əgər $L_1 \perp L_2$ olarsa, onda istənilən $x \in H$ üçün $P_2 x \in L_2$ olduğundan $P_1(P_2 x) = 0$, yəni $P_1 P_2 = 0$.

Proyeksiya operatorların daha bir neçə xassələrini qeyd edə bilərik. Bu xassələr aşağıdakı teoremlər vasitəsilə verilir.

Teorem 1. P_{L_1} və P_{L_2} proyeksiya operatorlarının cəminin proyeksiya operatoru olması üçün zəruri və kafi şərt bu operatorların ortoqonal olmasıdır, yəni $P_{L_1}P_{L_2}=0$. Bu halda $P_{L_1}+P_{L_2}=P_{L_1\dot{+}L_2}$.

Teorem 2. P_{L_1} və P_{L_2} proyeksiya operatorlarının hasilinin proyeksiya operatoru olması üçün zəruri və kafi şərt $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1}$ olmasıdır. Bu halda

$$P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_1\cap L_2}.$$

Tərif 2. Əgər P_1 və P_2 proyeksiya operatorları üçün $P_1P_2=P_2$ şərti ödənilərsə, onda deyirlər ki, P_2 operatoru P_1-in hissəsidir.

Bilavasitə tərifdən alınır ki, P_2 operatoru yalnız və yalnız o zaman P_1 operatorunun hissəsidir ki, L_2 altfəzası L_1-in hissəsi olsun, yəni $L_2\subset L_1$ olsun. P_2 proyeksiya operatorunun P_1-in hissəsi olması üçün başqa bir zəruri və kafi şərt aşağıdakından ibarətdir. İstənilən $x\in H$ elementi üçün $\|P_2x\|\le\|P_1x\|$ olması P_2-nin P_1-in hissəsi olması üçün zəruri və kafidir.

Teorem 3. P_1 və P_2 proyeksiya operatorlarının P_1-P_2 fərqinin də proyeksiya operatoru olması üçün zəruri və kafi şərt P_2 operatorunun P_1-in hissəsi olmasıdır. Bu şərt ödənildikdə $L_{p_1-p_2}$ altfəzası L_{p_2}-nin L_{p_1}-ə ortoqonal tamamlayıcısıdır.

19.6. Qoşma və öz-özünə qoşma operatorlara aid məsələlər həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Aşağıda verilmiş qayda ilə təyin edilmiş A operatorunun A^* qoşma operatorunu tapın.

a) $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ və $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$;

b) $A:l_p\to l_p$, $p\ge 1$ və $Ax=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,...,\alpha_nx_n,...)$,

burada $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in l_p$ və $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ – məhdud ardıcıllıqdır.

v) $A:L_2(R)\to L_2(R)$ və $(Ax)(t)=a(t)x(t+h)$, harada ki, $a(t)$ bütün $(-\infty,\infty)$ intervalında məhdud və Lebeq mənada ölçülən funksiyadır, h isə istənilən həqiqi ədəddir.

Həlli. a) A operatoru kompleks $L_2[0,1]$ fəzasını özünə inikas etdirən xətti kəsilməz operatordur. Ona görə də $A^*:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ qoşma operatoru vardır. A^* operatorunu təyin etmək üçün $y(t)\in L_2[0,1]$ götürək.

$$(Ax,y)=\int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}dt=\int_0^1\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)\overline{y(t)}dt=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^t x(\tau)\overline{y(t)}\,d\tau\right)dt$$

Əgər inteqrallama növbəsini dəyişsək, alarıq:

$$(Ax,y)=\int_0^1 x(t)\left(\overline{\int_t^1 y(\tau)d\tau}\right)dt=\int_0^1 x(t)\overline{(A^*y)(t)}dt=(x,A^*y)$$

Buradan

$$(A^*y)(t)=\int_t^1 y(\tau)\,d\tau\,,\ y\in L_2[0,1].$$

A və A^* operatorlarını müqayisə etsək, $A\neq A^*$, yəni A-nın öz-özünə qoşma olmadığını alarıq.

b) Tutaq ki, $p>1$. Asanlıqla göstərmək olar ki, $\{\alpha_j\}$ ardıcıllığı məhdud olduqda, yəni $|\alpha_j|\le M$ isə bu halda A operatoru xətti kəsilməz operatordur və $\|A\|\le M$. Məlumdur ki, $l_p^*=l_q$, belə ki, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. $f\in l_p^*$ funksionalının $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in l_p$ elementinə təsiri

$$\langle f,x\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\bar{f}_j\,,\ f=(f_1,f_2,...)\in l_q$$

kimi verilir. Onda qoşma operatorun tərifinə görə alarıq:

$$\langle Ax,f\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j\bar{f}_j=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\overline{\bar{\alpha}_j f_j}=\langle x,A^*f\rangle$$

Bu bərabərlik istənilən $x\in l_p$, $f\in l_q$ üçün doğrudur. Buradan

$$A^*f=(\bar{\alpha}_1 f_1,\bar{\alpha}_2 f_2,...),\ f=(f_1,f_2,...)\in l_q$$

alarıq. $p=1$ olduğu halda yenə də A operatoru $\{\alpha_j\}$ ardıcıllığı məhdud olduğu halda kəsilməz olar.

Qeyd edək ki, bu halda $l_1^*=m$, yəni l_1-in qoşma fəzası bütün məhdud ardıcıllıqlar fəzasıdır. Eyni mühakiməni təkrar etməklə

$$A^*f=(\bar{\alpha}_1 f_1,\bar{\alpha}_2 f_2,...),\ \text{əgər}\ f=(f_1,f_2,...)\in m$$

olduğunu göstərə bilərik. Göründüyü kimi əgər α_j ədədləri həqiqi ədədlər olarsa, $A=A^*$ və A öz-özünə qoşma operator olar.

v) Göstərə bilərik ki, bu halda A operatoru xətti kəsilməz operatordur və $\|A\|\le\sup\limits_{t\in R}|a(t)|$.

Əgər

$$(Ax,y)=\int_R a(t)x(t+h)\overline{y(t)}\,dt\,,\quad (x,y\in L_2(R))$$

bərabərliyində $t+h=\tau$ əvəz etsək, alarıq:

$$(Ax,y)=\int_R x(\tau)\overline{a(\tau-h)y(\tau-h)}d\tau=\left(x,A^*y\right),\ (x,y)\in L_2(R).$$

Buradan $\left(A^*y\right)(t)=\overline{a(t-h)}y(t-h),\ y\in L_2(R)$ alırıq.

2. Tutaq ki, $H-$ kompleks Hilbert fəzası, $A:H\to H-$ öz-özünə qoşma operatordur. Isbat edin ki, $I+iA$ operatorunun $R(I+iA)$ çoxobrazlısında təyin edilmiş $(I+iA)^{-1}$ tərs operatoru vardır.

İsbatı. Xətti kəsilməz $I+iA$ operatoru $H-$ hilbert fəzasını $I+iA$ operatorunun qiymətlər çoxluğu olan $R(I+iA)$ çoobrazlısına inikas etdirir. $I+iA$ operatorunun tərs operatorunun varlığını göstərmək üçün $I+iA$ operatorunun nüvəsi olan $\ker(I+iA)$ çoxluğunu yalnız sıfır elementdən ibarət olduğunu göstərmək lazımdır.

Tutaq ki, $x\in H$ və $(I+iA)x=0$. Buradan $Ax=ix$ və

$$i(x,x)=(Ax,x)=(x,ix)=-i(x,x)\to(x,x)=0$$

$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=0$, $x=0$ alırıq. Yəni $\ker(I+iA)=\{0\}$. Ona görə də $(I+iA):R(I+iA)\to H$ vardır.

3. l_2 fəzasında $A_n:l_2\to l_2$, $n\in N$ operatorlarını

$$A_nx=(x_{n+1},x_{n+2},\ldots),\ x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_2$$

bərabərliyi ilə təyin edək. İsbat edin ki, A_n, $n\in N$ xətti kəsilməz operatorlardır və $\lim\limits_{n\to\infty}A_nx=0$, $x\in l_2$. $\left(A_n^*\right)_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığını tapın. $x\in l_2$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^*x=0$ doğrudurmu?

İsbatı. Bütün A_n operatorları l_2 fəzasında təsir edir və xətti operatorlardır. Bu operatorların məhdud (kəsilməz) olması isə aşağıdakı kimi alınır:

$$\|A_nx\|=\sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j\right|^2}\le\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^2}=\|x\|\ \ (n\in N,\ x\in l_2),$$

Buradan $\|A_n\|\le 1$, $n\in N$ alırıq, yəni A_n məhdud (kəsilməz) operatorlardır.

İndi isə güclü yığılma mənada $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$ olduğunu göstərək. Məlum olduğu kimi, istənilən $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$ üçün $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2$ yığılandır və $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^2=0$. Ona görə də

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n x\|=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^2\right)^{1/2}=0,\ x\in l_2$$

alarıq. Buradan $\lim_{n\to\infty}A_n x=0$.

İndi isə tutaq ki, $x=(x_1,x_1,...)$ və $y=(y_1,y_2,...)$ l_2 fəzasına daxil olan istənilən elementlərdir.

$$(A_n x,y)=(x,A^* y)$$

bərabərliyindən alınır ki, $A^* y=\left(\underbrace{0,0,...,0}_{n},y_1,y_2,...\right)$. Ona görə də istənilən

$y\in l_2$ üçün

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n^* y\|=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^2\right)^{1/2}=\|y\|.$$

Buradan alırıq ki, $\{A_n^*\}$ ardıcıllığı sıfır operatora güclü mənada yığılmır.

4. Göstərin ki, A və B H hilbert fəzasında təsir edən xətti məhdud operatorlar olduqda a) $(A+B)^*=A^*+B^*$, b) $(\lambda A)^*=\lambda A^*$, $\lambda\in R$, v) $(BA)^*=A^*B^*$ bərabərlikləri doğrudur.

Həlli. a) Qoşma operatorun tərifinə görə istənilən $x,y\in H$ üçün

$$((A+B)x,y)=(Ax+Bx,y)=(Ax,y)+(Bx,y)=$$
$$=(x,A^*y)+(x,B^*y)=(x,(A^*+B^*)y)$$

Buradan

$$(A+B)^*=A^*+B^*$$

b) $((\lambda A)x,y)=\lambda(Ax,y)=\lambda(x,A^*y)=(x,(\lambda A^*)y)$, $(\lambda A)^*=\lambda A^*$.

v) $((BA)x,y)=(B(Ax),y)=(Ax,B^*y)=(x,(A^*B^*)y)$,

$(BA)^*=A^*B^*$.

5. Tutaq ki, $X=Y=R^n$ n-ölçülü Evklid fəzalarıdır. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ elementləri üçün $y=Ax$ operatorunu $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, $i=1,2,...,n$ bərabərlikləri ilə təyin edək. A^* qoşma operatorunu tapın.

Həlli. Tutaq ki, $e_1, e_2, ..., e_n$ R^n fəzasında vahid ortvektorlardır. Onda istənilən $x \in R^n$ üçün $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ və

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i ,$$

burada $f_i = f(e_i)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Ona görə də

$$f(Ax) = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \right) f_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$$

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i , \ j = 1,2,...,n$$

sistemi $g = A^* f$ qoşma operatorunu təyin edir.

$$A^* : f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in (R^n)^* \to g = (g_1, g_2, ..., g_n) \in (R^n)^*$$

kimi təsir edir. A^* operatoru $(a_{ij})_{j,i=1}^{n}$ matrisi vasitəsilə təyin edilir. Göründüyü kimi A^*-a uyğun matris A-ya uyğun matrisin transponirə edilmiş matrisidir. Xüsusi halda $a_{ij} = a_{ji}$, yəni matris simmetrik olarsa, $A = A^*$ olar.

6. Göstərin ki, A və B $H-$ hilbert fəzasında öz-özünə qoşma operatorlar, α və β isə həqiqi ədədlər isə, onda $\alpha A + \beta B$ operatoru da H fəzasında öz-özünə qoşma operatordur.

Həlli. Skalyar hasilin xassələrindən və A, B nin öz-özünə qoşma olmasından istifadə etməklə istənilən $x, y \in H$ üçün yaza bilərik:

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$
$$= \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha Ay + \beta By) = (x, (\alpha A + \beta B)y)$$

Buradan $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A + \beta B$ alırıq.

7. Tutaq ki, $A_n : H \to H$, öz-özünə qoşma operatorlar ardıcıllığıdır və istənilən $x \in H$ üçün $n \to \infty$ $A_n x \to Ax$. Bu halda A operatorunun öz-özünə qoşma olduğunu göstərin.

Həlli. Sklayar hasilin kəsilməzlik xassəsindən istifadə edərək, istənilən $x, y \in H$ üçün yaza bilərik:

$$(Ax, y) = \left(\lim_{n\to\infty} A_n x, y\right) = \lim_{n\to\infty}(A_n x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, A_n y) =$$
$$= \left(x, \lim_{n\to\infty} A_n y\right) = (x, Ay)$$

Yəni $A = A^*$.

Buradan öz-özünə qoşma operatorlar çoxluğunun qapalı çoxluq olduğunu alırıq.

8. Göstərin ki, A və B xətti məhdud operatorları H fəzasında öz-özünə qoşma operatorlar olduqda AB operatoru yalnız o zaman öz-özünə qoşma operator olar ki, $AB = BA$ olsun.

Həlli. Şərtə görə A və B öz-özünə qoşma operatorlar olduğundan istənilən $x, y \in H$ üçün yaza bilərik:

$$(ABx, y) = (Bx, Ay) = (x, BAy).$$

$AB = BA$ olduqda $(ABx, y) = (x, ABy)$, yəni, $(AB)^* = AB$.

$(AB)^* = AB$ olduqda isə,

$$(ABx, y) = (x, ABy) = (Ax, By) = (BAx, y) \to AB = BA$$

alarıq.

9. $X = Y = L_2[a,b]$. $K : X \to Y$ operatoru təyin edək:

$$y(t) = (Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

burada $K(t,s)$ nüvəsi $[a,b]\times[a,b]$kvadratında təyin edilmiş həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyadır.

İstənilən (x,t), $y(t) \in L_2[a,b]$ üçün yaza bilərik:

$$(Kx, y) = \int_a^b \left\{ \int_a^b k(t,s)x(s)ds \right\} y(t)dt =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b k(t,s)y(t)dt \right\} x(s)ds = (x, K^* y).$$

Buradan alırıq ki, $\omega(t) = K^* y$ operatoru da inteqral operatordur və aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\omega(t) = K^* y = \int_a^b K(s,t)y(s)ds$$

Göründüyü kimi K^* operatorunun nüvəsi K operatorunun nüvəsinə transponirə edilmiş nüvədir.

10. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = t \cdot x(0)$ operatoru təyin edək, belə ki, $D(A)$ təyin oblastı $[0,1]$ parçasında kəsilməz funksiyalardan ibarət xətti çoxobrazlıdır.

A^* qoşma operatorunu və qoşma operatorun $D(A^*)$ təyin oblastını təyin edin.

Həlli. $D(A)$ təyin oblastı $L_2[0,1]$ fəzasında hər yerdə sıx olduğundan, A^* qoşma operatoru vardır. A^* operatorunu tapmaq üçün $L_2[0,1]$ fəzasından elə $y = y(t)$ və $y^* = y^*(t)$ funksiyalar cütü tapmaq lazımdır ki,

$$(Ax, y) = (x, A^* y), \ \forall x \in D(A)$$

yəni

$$\int_0^1 t\cdot x(0)\overline{y(t)}dt=\int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}dt,\ \forall x\in D(A) \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənilsin.

Əgər (1) bərabərliyində $x(t)=t^n$, $0\le t\le 1$, $n\in N$, onda $\int_0^1 t^n\overline{y^*(t)}dt=0$, $\forall n\in N$, yəni $y^*(t)$ funksiyası bütün t^n, $n\in N$ funksiyalarına ortoqonaldır. Göstərək ki, $y^*(t)$ həm də $x(t)=1$ funksiyasına ortoqonaldır. Bu məqsədlə

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & \frac{1}{n}\le t\le 1,\\ nt, & 0\le t\le \frac{1}{n},\end{cases}$$

funksiyalar ardıcıllığına baxaq. Göründüyü kimi $x_n(t)\in D(A)$. (1) bərabərliyində $x(t)=x_n(t)$ götürsək, alarıq:

$$\int_0^{\frac{1}{n}} nt\overline{y^*(t)}\,dt+\int_{\frac{1}{n}}^1\overline{y^*(t)}\,dt=0 \quad (\forall n\in N)$$

Sonuncu bərabərlikdə $n\to\infty$ şərtində $\int_0^1\overline{y^*(t)}\,dt=0$ alırıq. Beləliklə, $y^*(t)$ funksiyası $L_2[0,1]$ fəzasında tam $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ sisteminin bütün funksiyalarına ortoqonaldır. Ona görə də $y^*(t)=0$, $t\in[0,1]$, yəni $y^*=0$. Nəticədə (1) bərabərliyindən alırıq ki, $\int_0^1 t\overline{y(t)}dt=0$. Buradan o nəticəyə gəlirik ki, A^* qoşma operatorun $D(A^*)$ təyin oblastı $y=y(t)\in L_2[0,1]$, $\int_0^t ty(t)dt=0$ şərtini ödəyən funksiyalardan ibarətdir. A^* operatoru hər bir $y\in D(A^*)$ funksiyasına qarşı $y^*=0$ funksiyasını qarşı qoyur.

11. $L_2[0,1]$ fəzasında $A=i\frac{d}{dt}$ – xətti operatoruna baxaq. Belə ki, A operatorunun təyin oblastı $D(A)\subset L_2[0,1]$ $[0,1]$ parçasında mütləq kəsilməz, $x'(t)\in L_2[0,1]$ olan və $x(0)=x(1)=0$ şərtini ödəyən funksiyalardan ibarətdir. İsbat edin ki, A qapalı və simmetrik operatordur. A^* qoşma operatorunu tapın.

Həlli. A operatorunun qapalı olduğunu göstərmək üçün fərz edək ki, elə $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in D(A)$ ardıcıllığı vardır ki, orta kvadratik mənada $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ və

$$\lim_{n\to\infty}(A_0 x_n)(t) = \lim_{n\to\infty} ix_n'(t) = iy(t)$$

limitləri vardır. Onda skalyar hasilin kəsilməzlik xassəsinə görə

$$\lim_{n\to\infty} ix_n(t) = \lim_{n\to\infty} i\int_0^t x_n'(\tau)d\tau = i\int_0^t y(\tau)d\tau \quad (\forall t \in [0,1]),$$

İstənilən $n \in N$ üçün $x_n(1) = 0$ olduğundan $\int\limits_0^1 y(\tau)d\tau = 0$ alırıq. Yığılan ardıcıllığın limitinin yeganəliyinə görə ($x(t)$ funksiyasının qiymətlərini sıfır ölçülü çoxluqda dəyişmək olar).

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau\,, \quad \forall t \in [0,1]$$

alarıq. Buradan çıxır ki, $x = x(t),\ 0 \le t \le 1$ funksiyası mütləq kəsilməzdir, $x(t) \in D(A)$ və $(Ax)(t) = ix'(t)$ olduğunu alırıq. Bu isə A-nın qapalı operator olması deməkdir.

Göstərək ki, $A-$ simmetrik operatordur. Bu məqsədlə istənilən $x(t), y(t) \in D(A)$ funksiyalarını götürək. Hissə-hissə inteqrallamaqla, alarıq:

$$(Ax, y) = \int_0^1 ix'(t)\overline{y(t)}dt = ix(t)\overline{y(t)}\Big|_0^1 - \int_0^1 ix(t)\overline{y'(t)}dt = (x, Ay)$$

Ona görə də A simmetrik operatordur.

İndi isə A^* qoşma operatorunu və onun $D(A^*)$ təyin oblastını tapaq.

$\overline{D(A)} = H$ olduğundan A^* qoşma operatoru vardır. Qoşma operatoru tapmaq üçün istənilən $x = x(t) \in D(A)$ üçün $(Ax, y) = (x, y^*)$ bərabərliyini ödəyən və $L_2[0,1]$-ə daxil olan $y = y(t)$ və $y^* = y^*(t)$ funksiyalar cütünü təyin edək.

$$\int_0^1 ix'(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}dt \tag{2}$$

$L_2[0,1] \subset L_1[0,1]$ olduğu üçün $Y^*(t) = \int\limits_0^t y^*(\tau)d\tau,\ 0 \le t \le 1$ ibtidai funksiyasını götürək. (2) bərabərliyinin sağ tərəfini hissə-hissə inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}dt = \int_0^1 x(t)d\overline{Y^*(t)} = x(t)\overline{Y^*(t)}\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 x'(t)\overline{Y^*(t)}dt=-\int_0^1 x'(t)\overline{Y^*(t)}dt$$

Ona görə də (2) bərabərliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\int_0^1 x'(t)\left[\overline{Y^*(t)-iy(t)}\right]dt=0 \quad (\forall x(t)\in D(A)), \tag{3}$$

Buradan aydındır ki, $Y^*(t)-iy(t)=C=const$ olarsa, onda (3) bərabərliyi ödənilər. Əksinə, göstərək ki, əgər $\varphi=\varphi(t)\in L_2[0,1]$ funksiyası

$$\int_0^1 x'(t)\overline{\varphi(t)}dt=0 \quad (\forall x(t)\in D(A)) \tag{4}$$

şərtini ödəyirsə, onda $\varphi(t)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında sabitdir. Doğrudan da, $x(t)=\int_0^1 \varphi(\tau)d\tau-ct$ funksiyasına baxaq;– belə ki, C sabitini elə seçək ki, $x(1)=0$ şərti ödənilsin. $C=\int_0^1 \varphi(\tau)d\tau$ qəbul edək. Onda $x(t)\in D(A)$ olar. Ona görə də (4) bərabərliyində $x(t)$-nin yerinə bu qiymətini yazsaq, alarıq:

$$\int_0^1 [\varphi(t)-c]\overline{\varphi}(t)dt=\int_0^1 [\varphi(t)-c]\,\overline{[\varphi(t)-c]}dt$$

Buradan $\varphi(t)$ funksiyasının $[0,1]$-də sanki hər yerdə sabit olduğunu alırıq. $\varphi(t)=C$, $\forall t\in[0,1]$. Onda (3) bərabərliyindən alarıq ki, $Y^*(t)=iy(t)$, $\forall t\in[0,1]$, yəni

$$\int_0^t y^*(\tau)d\tau=iy(t) \ (\forall t\in[0,1])$$

Buradan çıxır ki, $y=y(t)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında mütləq kəsilməz funksiyadır və $y^*(t)=iy'(t)$, $0\le t\le 1$. Beləliklə alırıq ki, (2) eyniliyini ödəyən y və y^* funksiyalar cütü onunla xarakterizə olunur ki, $y(t)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında mütləq kəsilməzdir, $y'(t)\in L_2[0,1]$ və $y^*(t)=(A^*y)(t)=iy'(t)$. Onda bu şərtləri ödəyən bütün $y(t)$ funksiyalar çoxluğu $D(A^*)$ xətti çoxobrazlısı təşkil edir və A^* qoşma operatorunun təyin oblastıdır. Bu halda $\forall y(t)\in D(A^*)$ üçün $(A^*y)(t)=iy'(t)$.

Bu misal bir daha onu göstərir ki, qeyri-məhdud operatorlar üçün simmetrik və öz-özünə qoşma operator anlayışları bir-birindən fərqli anlayışlardır.

12. Tutaq ki, $H = L_2[0,1]$– kompleks Hilbert fəzasında $(Ax)(t) = ix'(t)$ operatoru verilmişdir. $D(A)$ təyin oblastı $[0,1]$ parçasında mütləq kəsilməz elə $x(t)$ funksiyalarından ibarətdir ki, $x'(t) \in L_2[0,1]$ və $x(0) = x(1)$ şərti ödənilsin. A operatorunun öz-özünə qoşma operator olduğunu göstərin.

Həlli. $D(A)$ təyin oblastı H fəzasında hər yerdə sıx olduğundan A^* qoşma operatoru vardır. A^* operatorunu tapmaq tələb olunur. Bu məqsədlə ixtiyari $x = x(t) \in D(A)$ üçün $(Ax, y) = (x, y^*)$ bərabərliyini ödəyən $y(t), y^*(t) \in L_2[0,1]$ funksiyalar cütünü təyin etmək lazımdır. Tərifə görə

$$\int_0^1 ix'(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}dt, \ \forall x \in D(A). \tag{5}$$

$y^* = y^*(t)$ funksiyası vasitəsilə $Y^*(t) = \int_0^t y^*(\tau)d\tau$ daxil edək. Göründüyü kimi $Y^*(0) = 0$. Əgər (5) bərabərliyində $x(t) = 1$ götürsək,

$$Y^*(1) = \int_0^t y^*(\tau)d\tau = 0$$

olar. Əgər (5) bərabərliyinin sağ tərəfini hissə-hissə inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_0^1 x'(t)\overline{\left[Y^*(t) - iy(t)\right]}\, dt = 0, \ \forall x \in D(A).$$

11 misalını həll edərkən göstərdik ki, $Y^*(t) - iy(t)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında sabitdir. Ona görə də $y(t)$ funksiyası mütləq kəsilməz funksiyadır və

$$iy'(t) = y^*(t) \in L_2[0,1]$$

$Y^*(t) - iy(t) = C$, $0 \le t \le 1$ bərabərliyindən və $Y^*(0) = Y^*(1) = 0$ şərtindən $y(0) = y(1)$ olduğunu alırıq. Beləliklə, alırıq ki, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$ mütləq kəsilməz funksiyadır, $y'(t) \in L_2[0,1]$ və $y(0) = y(1)$. Buradan $D(A^*) \subset D(A)$ alınır. Eyni zamanda $y^*(t) = (A^*y)(t) = iy'(t)$. Göstərmək olar ki, $D(A) \subset D(A^*)$ doğrudur və $A = A^*$. Yəni, A öz-özünə qoşma operatordur.

13. Tutaq ki, $H = L_2(R)$– Hilbert fəzasında $(Ax)(t) = tx(t)$ operatoru təyin edilmişdir, belə ki, $D(A)$ təyin oblastı elə $x(t) \in L_2(R)$ funksiyalarından ibarətdir ki, $tx(t) \in L_2(R)$ olsun. A operatorunun öz-özünə qoşma operator olduğunu göstərin.

Həlli. A operatorunun təyin oblastı olan $D(A)$ çoxluğu $R = (-\infty, \infty)$ intervalında finit və kəsilməz funksiyaları öz daxilində saxladığı üçün

$\overline{D(A)} = L_2(R)$. Ona görə də A operatorunun A^* qoşma operatoru vardır. A^* qoşma operatorunu tapaq. Bunun üçün ixtiyari $x = x(t) \in D(A)$ üçün $(Ax, y) = (x, y^*)$ bərabərliyini ödəyən $y(t), y^*(t) \in L_2(R)$ funksiyalar cütünü təyin etmək lazımdır. Tərifə görə

$$\int_R tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_R x(t)\overline{y^*(t)}dt, \quad \forall x(t) \in L_2(R)$$

Bu bərabərlikdən alırıq:

$$\int_R x(t)\overline{\left[ty(t) - y^*(t)\right]}\, dt = 0, \qquad \forall x(t) \in L_2(R)$$

$D(A)$ çoxluğu $L_2(R)$ fəzasında hər yerdə sıx çoxluq olduğundan, R-də sanki hər yerdə $y^* = ty(t)$ olar. Beləliklə, $ty(t) \in L_2(R)$ şərtini ödəyən $y(t) \in L_2(R)$ üçün $y^* = ty(t)$ alırıq. Onda $D(A^*) \subset D(A)$ və $(A^*y)(t) = ty(t)$. Eyni zamanda bunun əksini də göstərmək olar. Nəticədə $A = A^*$ olar. Yəni, A öz-özünə qoşma operatordur.

14. Tutaq ki, E_1 və E_2 xətti normalaşmış fəzalardır və $A \in L(E_1, E_2)$. Isbat edin ki, əgər $A^{-1} \in L(E_2, E_1)$ varsa, onda A^* qoşma operatorunun da tərsi vardır, $(A^*)^{-1} \in L(E_1^*, E_2^*)$ və $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

15. Tutaq ki, H – Hilbert fəzasıdır, $A \in L(H)$, $\ker A$ – A operatorunun nüvəsi, $R(A)$ – A operatorunun qiymətlər oblastıdır. İsbat edin ki, a) $\ker(AA^*) = \ker A^*$; b) $\ker(A^*A) = \ker A$; v) $R(AA^*) = R(A)$; q) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

16. Aşağıdakı hallarda $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ operatorunun A^* qoşma operatorunu tapın.

a) $(Ax)(t) = tx(t)$; b) $(Ax)(t) = \int_0^1 \cos tx(s)ds$; v) $(Ax)(t) = \int_0^1 x(s)ds$

17. Aşağıdakı hallarda $A: l_1 \to l_1$ operatorunun qoşmasını tapın.

a) $Ax = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$ $\quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$;

b) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, 0, 0, ...)$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in R$ məhdud ardıcıllıqdır, $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$;

v) $Ax = (0, 0, x_1, x_2, ...)$, $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$;

q) $Ax = (x_2, x_3, ...)$, $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$.

18. Yuxarıdakı 12-18 misalında verilmiş operatorların 1) $A: C_0 \to C_0$ 2) $A: l_2 \to l_2$ operatorlar olduğu hallarda qoşma operatorlarını tapın.

19. Aşağıdakı hallarda $A: L_2(R) \to L_2(R)$ operatorunun qoşmasını tapın.

a) $(Ax)(t)=x(t+h)$, burada $h-$ hər hansı qeyd olunmuş ədəddir.
b) $(Ax)(t)=a(t)x(t+h)$, burada $a(t)-$ hər hansı ölçülən funksiya, $h-$ qeyd olunmuş ədəddir.
v) $(Ax)(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$.

20. Tutaq ki, $H-$ Hilbert fəzasıdır. İsbat edin ki, istənilən $A\in L(H)$ operatorunu birqiymətli olaraq $A=B+iC$ şəklində göstərmək olar, belə ki, B və C öz-özünə qoşma operatorlardır.

21. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Ax)(t)=tx(t)$ operatorunun mənfi olmayan öz-özünə qoşma operator olduğunu göstərin.

22. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t)=\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$$

operatorunun mənfi olmayan və öz-özünə qoşma operator olduğunu göstərin.

23. Tutaq ki, $H-$ Hilbert fəzasıdır və $A:H\to H$ öz-özünə qoşma operatordur. Isbat edin ki, $\|A^2\|=\|A\|^2$.

24. Tutaq ki, $H-$ Hilbert fəzası, $A_n:H\to H$, $n=1,2,...$ öz-özünə qoşma operatorlar ardıcıllığıdır. Isbat edin ki, əgər $\{A_n\}$ ardıcıllığı güclü mənada A operatoruna yığılırsa, onda A operatoru da öz-özünə qoşmadır. Eyni zamanda isbat edin ki, bütün A_n-lər müsbət operatorlar isə, onda A da müsbət operatordur.

25. Tutaq ki, $H-$ Hilbert fəzası, $A-$ öz-özünə qoşma operatordur və $A\ge 0$. Isbat edin ki, əgər $A^{-1}\in L(H)$ varsa, onda $A^{-1}\ge 0$.

26. Tutaq ki, E kompleks banax fəzası, $A:E\to E$ xətti operatordur və A^{-1} vardır. İsbat edin ki, A və A^{-1} operatorları eyni məxsusi vektorlara malikdirlər.

27. Aşağıdakı hallarda $C[0,\pi]$ fəzasında $(Ax)(t)=\frac{d^2x}{dt^2}$ operatorunun məxsusi ədədlərini və məxsusi vektorlarını tapın.
a) $D(A)=\{x(t)\in C^{(2)}[0,\pi]:\ x'(0)=x'(\pi)=0\}$
b) $D(A)=\{x(t)\in C^{(2)}[0,\pi]:\ x(0)=x(\pi),\ x'(0)=x'(\pi)\}$.

28. $L_2[0,1]$ fəzasında $(Ax)(t)=-\frac{d^2x}{dt^2}$ operatoruna baxaq. Belə ki,

$$D(A)=\{x(t)\in C^{(2)}[0,1]:\ x(0)=x(1)=0\}$$

A operatorunun simmetrik operator olduğunu və $A\ge 0$ olduğunu göstərin.

29. Aşağıdakı hallarda $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ operatorunun qoşmasını tapın.

a) $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$; b) $(Ax)(t) = tx(t)$; v) $(Ax)(t) = \int_0^1 tx(s)ds$

30. Aşağıdakı hallarda $A: l_1 \to l_1$ operatorunun qoşmasını tapın.

a) $Ax = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$

b) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, 0, 0, ...)$, $\lambda_n \in R$, $|\lambda_n| \le 1$, $n \in N$

v) $Ax = (0, 0, x_1, x_2, ...)$,

q) $Ax = (x_2, x_3, ...)$.

31. $A: l_2 \to l_2$ olduğu halda 30-da verilmiş operatorların qoşmasını tapın.

32. $A: C_0 \to C_0$ olduğu halda 30-da verilmiş operatorların qoşmasını tapın.

XX FƏSİL
TAMAM KƏSİLMƏZ OPERATORLAR

20.1.Tamam kəsilməz operatorun tərifi və sadə xassələri

Tərif 1. Tutaq ki, X və Y xətti normalaşmış fəzalardır. Əgər $A: X \to Y$ xətti operatoru X fəzasının istənilən məhdud çoxluğunu Y fəzasında nisbi kompakt çoxluğa inikas etdirirsə, bu halda A operatoruna tamam kəsilməz operator deyilir.

İstənilən nisbi kompakt çoxluq məhdud olduğundan alırıq ki, hər bir tamam kəsilməz operator məhdud operatordur, yəni kəsilməz operatordur. Xətti operatorun tamam kəsilməzliyi anlayışı adi kəsilməzliyə nisbətən daha güclü anlayışdır. Məsələn, sonsuz ölçülü X fəzasında vahid operator tamam kəsilməz deyil, çünki vahid operator vahid sferanı özünə inikas etdirir və vahid sfera isə nisbi kompakt deyildir.

Amma sonlu ölçülü fəzalarda təsir edən xətti operatorlar üçün kəsilməzlik və tamam kəsilməzlik eynigüclü anlayışlardır.

Misallara baxaq:

1. Fərz edək ki, A xətti operatoru sonsuz ölçülü X fəzasında təyin olunmuşdur. Əgər inikas zamanı X-in obrazı sonlu ölçülü olarsa, onda A operatoruna sonlu ölçülü operator deyilir. Bu halda istənilən $M \subset X$ məhdud çoxluğunun obrazı $A(M)$ sonlu ölçülü fəzada nisbi kompakt çoxluq olacaqdır. Ona görə də alırıq ki, istənilən sonlu ölçülü operator tamam kəsilməz operatordur.

2. Tutaq ki, $X = Y = C[0,1]$.

$$Ax = y(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

operatoru təyin edək. Burada $k(t,s)$ $0 \le t \le 1$, $0 \le s \le 1$ kvadratında kəsilməz funksiyadır. Göstərək ki, A tamam kəsilməz operatordur. Bu məqsədlə $C[0,1]$ fəzasına daxil olan, $\|x(t)\| \le r$ məhdud çoxluğunu götürək. $K = \max_{t,s\in[0,1]} |K(t,s)|$ işarə edək.

$$|y(t)| = \left| \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \right| \le \int_0^1 |k(t,s)||x(s)|ds \le Kr$$

$|y(t)| \le Kr$. Göründüyü kimi $y(t)$ funksiyalar çoxluğu müntəzəm məhduddur. Göstərək ki, $y(t)$ funksiyaları eyni dərəcədən kəsilməzdirlər. $\varepsilon > 0$ ədədini götürək. $k(t,s)$ nüvəsinin müntəzəm kəsilməzliyinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $|t_1 - t_2| < \delta$ və istənilən $s \in [0,1]$ üçün

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{r}$$

şərti ödənilər. Onda $|t_1-t_2|<\delta$ olduqda baxılan bütün $g(t)$ funksiyaları üçün yaza bilərik:

$$|y(t_1)-y(t_2)|\leq\int_0^1|K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|ds<\varepsilon$$

Bu isə $y(t)$ funksiyalarının eyni dərəcədən kəsilməz olması deməkdir. Arsel teoreminə görə $\{y(t)\}$ funksiyalar sisteminin $C[0,1]$ fəzasında nisbi kompakt olduğunu və A operatorunun tamam kəsilməz olduğunu alırıq.

Aşağıdakı mühüm teorem doğrudur.

Teorem 1. Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığı x_0 elementinə zəif yığılırsa və nisbi kompakt isə, onda bu ardıcıllıq x_0-a güclü mənada da yığılır.

İsbatı. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı x_0 elementinə güclü mənada, yəni normaya görə yığılmır. Onda elə $\varepsilon_0>0$ ədədi və sonsuz artan $n_1<n_2<...,n_k<...$ indekslər ardıcıllığı tapmaq olar ki, $\|x_{n_k}-x_0\|\geq\varepsilon_0$. $\{x_{n_i}\}$ ardıcıllığı nisbi kompakt olduğu üçün onun elə $\left\{x_{n_{i_j}}\right\}$ altardıcıllığı vardır ki, bu altardıcıllıq hər hansı u_0 elementinə güclü mənada yığılır. Onda eyni zamanda $\left\{x_{n_{i_j}}\right\}\to u_0$ zəif mənada da yığılır. Digər tərəfdən $\left\{x_{n_{i_j}}\right\}$ altardıcıllığı x_0-a zəif yığıldığı üçün $u_0=x_0$ alırıq.

Beləliklə, bir tərəfdən $\left\|x_{n_{i_j}}-x_0\right\|\geq\varepsilon_0$, digər tərəfdən isə $\left\|x_{n_{i_j}}-x_0\right\|\to 0$ olduğunu alırıq. Alınmış bu ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Yəni verilmiş ardıcıllıq x_0-a güclü mənada yığılandır. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Əgər A operatoru tamam kəsilməz operator isə, onda o istənilən zəif yığılan ardıcıllığı güclü yığılan ardıcıllığa keçirir.

İsbatı. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı x_0 elementinə zəif yığılır. Onda bu ardıcıllıq normaya görə məhdud olan ardıcıllıqdır. A tamam kəsilməz operator olduğu üçün bu ardıcıllığı nisbi kompakt $\{y_n\}$, $y_n=Ax_n$ ardıcıllığına keçirir. Istənilən xətti məhdud A operatoru üçün zəif mənada $x_n\to x_0$ şərtindən zəif mənada $Ax_n\to Ax_0$ olması doğrudur. Yəni hər bir xətti məhdud operator həm güclü, həm də zəif mənada kəsilməzdir. Onda alırıq ki, $y_n=Ax_n$ ardıcıllığı zəif mənada $y_0 = Ax_0$ elementinə yığılır. Onda teorem 1-ə əsasən y_n -in y_0-a güclü yığılmasını alırıq. Teorem isbat edildi.

Fərz edək ki, A sonsuz ölçülü X banax fəzasını özünə inikas etdirən tamam kəsilməz operator, B isə bu fəzada təsir edən istənilən xətti operatordur. Bu halda AB və BA tamam kəsilməz operatorlardır.

Doğrudan da, B xətti operatoru istənilən məhdud $M \subset X$ çoxluğunu məhdud $B(M)$ çoxluğuna inikas etdirir. A operatoru isə $B(M)$ məhdud çoxluğunu $A(B(M))$ nisbi kompakt çoxluğuna keçirir. Nəticədə alırıq ki, AB operatoru istənilən məhdud çoxluğu nisbi kompakt çoxluğa keçirir və deməli AB tamam kəsilməz operatordur. Eyni qayda ilə BA operatorunun da tamam kəsilməzliyini göstərə bilərik.

Asanlıqla göstərmək olar ki, A və B tamam kəsilməz operatorlar olduqda istənilən α və β həqiqi ədədləri üçün $\alpha A + \beta B$ operatoru da tamam kəsilməz operator olar.

Teorem 3. Əgər X fəzasını tam Y fəzasına inikas etdirən tamam kəsilməz A_n operatorlar ardıcıllığı A operatoruna müntəzəm (normaya nəzərən) yığılırsa, onda A operatoru da tamam kəsilməz operatordur.

İsbatı. Göstərməliyik ki, A operatoru X fəzasında istənilən məhdud çoxluğu Y fəzasında nisbi kompakt çoxluğa keçirir. Tutaq ki, M X fəzasında məhdud çoxluqdur və istənilən $x \in M$ üçün $\|x\| \le r$, $r -$ sabit ədəddir.

Verilmiş $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, $\|A_{n_0} - A\| < \dfrac{\varepsilon}{r}$. Tutaq ki, $A(M) = N$ və $A_{n_0}(M) = N_0$. Göstərək ki, N_0 çoxluğu N üçün ε-şəbəkə təşkil edir. Doğrudan da, istənilən $y \in N$ üçün onun $x \in M$ proobrazını götürsək və $y_0 = A_{n_0} x \in N_0$ işarə etsək, yaza bilərik:

$$\|y - y_0\| = \|Ax - A_{n_0}x\| = \|(A - A_{n_0})x\| \le \|A - A_{n_0}\| \cdot \|x\| < \left(\frac{\varepsilon}{r}\right) r = \varepsilon .$$

Digər tərəfdən, A_{n_0} -ın tamam kəsilməzliyini və M -in məhdudluğunu nəzərə alsaq, N_0 ın nisbi kompakt olduğunu alırıq. Beləliklə, alırıq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ üçün N çoxluğu nisbi kompakt olan ε-şəbəkəyə malikdir, ona görə də N çoxluğu özü də nisbi kompaktdır. Nəticədə alırıq ki, A operatoru istənilən məhdud çoxluğu nisbi kompakt çoxluğa keçirir, yəni A tamam kəsilməz operatordur. Teorem isbat edildi.

Qeyd. Nöqtəvi yığılan tamam kəsilməz operatorlar ardıcıllığının limiti tamam kəsilməz operator olmaya da bilər.

Bu məqsədlə $\{e_i\}$ bazisinə malik sonsuz ölçülü X banax fəzasında aşağıdakı qayda ilə operatorlar təyin edək. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ elementi üçün

$$S_n x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

S_n operatorları X fəzasını sonlu ölçülü X_n fəzasına inikas etdirdiyi üçün tamam kəsilməz operatorlardır. $n \to \infty$ şərtində S_n operatorlar ardıcıllığı vahid I operatoruna nöqtəvi mənada yığılır. Məlum olduğu kimi vahid operator sonsuz ölçülü fəzada tamam kəsilməz operator deyildir.

Sonsuz ölçülü fəzalarda vahid operatorun tamam kəsilməz operator olmaması faktından alınır ki, bu fəzalarda tamam kəsilməz A operatorunun məhdud A^{-1} tərs operatoru ola bilməz.

Tamam kəsilməz operatorlara aid aşağıdakı mühüm faktları da qeyd edək.

Teorem 4. Tamam kəsilməz operatorun qiymətlər çoxluğu separabeldir.

Teorem 5. Əgər A operatoru X fəzasını Y-ə inikas etdirən tamam kəsilməz operator isə, onda onun qoşması olan A^* operatoru Y^* fəzasını X^*-a inikas etdirən tamam kəsilməz operatordur.

20.2. Banax fəzasında tamam kəsilməz operatorun sonlu ölçülü operatorlarla approksimasiyası

Fərz edək ki, X bazisə malik olan hər hansı Banax fəzasıdır və A operatoru X fəzasını özünə inikas etdirən xətti tamam kəsilməz operatordur. Tutaq ki, $\overline{K}$ bu fəzada vahid radiuslu kürədir. A operatoru tamam kəsilməz olduğundan $A(\overline{K})$ nisbi kompakt çoxluqdur. $e_1, e_2, ..., e_n ...$ ilə X fəzasının bazis vektorlarını işarə edək. İstənilən $x \in X$ elementini

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i$$

şəklində göstərək və hər bir $x \in X$ elementinə qarşı birqiymətli şəkildə təyin olunan $y_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ və $z_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i$ elementlərini qarşı qoyaq. Bu bərabərliklər vasitəsilə X fəzasında təyin edilmiş və qiymətləri də X-dən olan iki $y_n = S_n x$ və $z_n = R_n x$ operatorları təyin edə bilərik. Onda

$$Ix = S_n x + R_n x$$

alarıq. n-in hər bir qeyd olunmuş qiymətlərində S_n və R_n xətti məhdud operatorlardır.

Bazisə malik Banax fəzasında çoxluğun nisbi kompaktlığı üçün zəruri və kafi şərtə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $n = n(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olar ki, istənilən $y \in A(\overline{K})$ üçün $\|R_n(y)\| < \varepsilon$ olsun. Bu n nömrəsini qeyd edərək yaza bilərik:

$$Ax = y = S_n y + R_n y = S_n(Ax) + R_n(Ax) = A_1 x + A_2 x$$

Burada A_1 və A_2 xətti operatorlardır. Bu halda $y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$ qəbul etsək, $A_1 x = S_n y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$ olar. Buradan görünür ki, istənilən x üçün $A_1 x$ elementi $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis elementlərinin təyin etdiyi sonlu ölçülü altfəzaya daxildir, yəni A_1 operatoru sonlu ölçülü operatordur. Digər tərəfdən isə istənilən $y \in A(\overline{K})$ üçün yuxarıda aldığımız $\|R_n y\| < \varepsilon$ bərabərsizliyinə görə

$$\sup_{x \in \overline{K}} \|A_2 x\| = \sup_{y \in A(\overline{K})} \|R_n y\| < \varepsilon .$$

Buradan $\|A_2\| < \varepsilon$ alırıq.

Beləliklə alırıq ki, tamam kəsilməz A operatoru biri sonlu ölçülü, digəri isə norması əvvəlcədən verilmiş kifayət qədər kiçik ədədi aşmayan iki operatorun cəmi şəklində göstərilə bilər. Ona görə də bəzi hallarda deyirlər ki, bazisə malik fəzalarda tamam kəsilməz operatorlar sanki sonlu ölçülü operatorlardır.

20.3. Tamam kəsilməz operatorlara aid məsələlər həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Aşağıda verilmiş $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatorları tamam kəsilməz operatorlardırmı?

a) $(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds$;

b) $(Ax)(t) = x(\sqrt{t})$;

v) $(Ax)(t) = \int_0^1 x(s^2) ds$.

Əgər bu operatorlara $L_2[0,1]$ fəzasında təsir edək operatorlar kimi baxılarsa, onlar tamam kəsilməz olarmı?

Həlli. a) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds$ operatoru bütün $C[0,1]$-də təyin edilməmişdir. Doğrudan da, $t \in [0,1]$ üçün $x(t) = 1$ götürsək, bu halda $\int_0^1 \frac{ds}{|t-s|}$ dağılan olar. Ona görə də A operatoru məhdud deyildir və deməli tamam kəsilməz deyildir. Həmin səbəbdən bu operatora $L_2(0,1)$ də təsir edən operator kimi baxılarsa, yenə də onun tamam kəsilməz olmadığını alarıq.

b) Verilmiş $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatoru xətti və kəsilməz operatordur və $\|A\| = 1$. Göstərək ki, A tamam kəsilməz operator deyildir. Bu məqsədlə $[0,1]$ parçasında kəsilməz funksiyalardan ibarət $M = \{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ məhdud çoxluğunu götürək. Göstərək ki, $A(M) = \{\sin n\sqrt{t}\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \le t \le 1$ çoxluğu kompakt deyildir. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $A(M)$ kompakt çoxluqdur. Onda Arsel teoreminə görə $A(M)$-ə daxil olan funksiyalar eyni dərəcədən kəsilməzdirlər, yəni, istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ vardır ki, $t', t'' \in [0,1]$, $|t' - t''| < \delta$ olduqda

$$\left|\sin n\sqrt{t'} - \sin n\sqrt{t''}\right| < \varepsilon \ \ (\forall n \in N \text{ üçün})$$

Xüsusi halda bu bərabərsizlik $\varepsilon = \sin 1$ üçün də doğrudur. Əgər $t' = 0$, $t'' = \frac{1}{n^2}$ götürsək, $\frac{1}{n^2} < \delta$ şərtini ödəyən n nömrələri üçün

$$\sin 1 = \left|\sin n\sqrt{t'} - \sin n\sqrt{t''}\right| < \sin 1$$

ziddiyyətini alarıq. Bu onu göstərir ki, $A(M)$ kompakt deyildir. Ona görə də A tamam kəsilməz deyildir.

A operatoruna $L_2[0,1]$ fəzasında baxaq. İstənilən $x(t) \in L_2[0,1]$ üçün alarıq:

$$\|Ax\|^2 = \int_0^1 \left|x\left(\sqrt{t}\right)\right|^2 dt = \int_0^1 |x(\tau)|^2 2\tau d\tau \le 2\|x\|^2$$

Buradan alırıq ki, A doğrudan da $L_2[0,1]$ fəzasında təsir edir, xətti və kəsilməz operatordur. Bu halda da A-nın tamam kəsilməz olmadığını göstərək. Bunun üçün $L_2[0,1]$-də məhdud $M = \{\sin n\pi t^2\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0,1]$ çoxluğunu götürək. Göstərək ki, $(Ax_n)(t) = \sin n\pi t$, $0 \le t \le 1$, $n \in N$ çoxluğu kompakt deyildir. Göstərək ki, bu çoxluğun $L_2[0,1]$-də kompaktlığı üçün Riss meyarı doğru deyildir. Bunu əksini fərz etmə ilə isbat edək.

Fərz edək ki, $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ vardır ki,

$$\left|\int_0^1 (Ax_n)(t+h) - (Ax_n)(t)\right|^2 dt < \varepsilon, \ |h| < \delta$$

olduqda ($[0,1]$ parçasından kənarda $(Ax_n)(t)$ funksiyası sıfra bərabər götürülür).

$h=\dfrac{1}{n}$ olarsa,

$$\int_0^1 \left|(Ax_n)\left(t+\frac{1}{n}\right)-(Ax_n)(t)\right|^2 dt = 2-\frac{3}{2n}$$

olar. Buradan alırıq ki, əgər $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ götürsək və ona uyğun $\delta>0$ ədədini tapsaq, onda aşağıdakı ziddiyyəti alırıq:

$$\int_0^1 \left|(Ax_n)(t+h)-(Ax_n)(t)\right|^2 dt = 2-\frac{3}{2n}<\frac{1}{2}.$$

v) Baxılan $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operatoru norması vahidə bərabər olan xətti məhdud operatordur. Bu operator sonlu ölçülü olduğu üçün (operatorun qiymətlər çoxluğu sabit funksiyalardan ibarətdir) A operatoru kompakt operatordur.

İndi isə A operatorunu $L_2[0,1]$ fəzasında təsir edən operator kimi araşdıraq. Bu məqsədlə $\int_0^1 x\left(s^2\right)ds$ inteqralında $s^2=\tau$ əvəzləməsi aparaq. Onda alarıq:

$$(Ax)(t)=\int_0^1 \frac{x(\tau)}{2\sqrt{\tau}}d\tau .$$

Göstərək ki, A operatoru $L_2[0,1]$ fəzasında məhdud deyildir və deməli A operatoru kompakt ola bilməz. Doğrudan da $x_n(t)=n^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}},\ \ 0\le t\le 1$ ardıcıllığını götürsək, istənilən $n\in N$ üçün $\|x_n\|=1$ olduğunu göstərə bilərik. Amma

$$(Ax_n)(t)=\int_0^1 n^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{n}-1}d\tau=\sqrt{n},\ \forall t\in[0,1]$$

$\|Ax_n\|=\sqrt{n}$ olduğundan A qeyri-məhdud operatordur, yəni A kompakt operator deyildir.

2. $\varphi(t)\in C[a,b]$ funksiyası hansı şərti ödəməlidir ki, $(Ax)(t)=\varphi(t)x(t)$ bərabərliyi ilə təyin edilən $A:C[a,b]\to C[a,b]$ operatoru tamam kəsilməz olsun?

Həlli. Göstərək ki, əgər $\varphi(t)$ funksiyası heç olmazsa bir $t_0\in[a,b]$ nöqtəsində sıfırdan fərqli olarsa, yəni $\varphi(t_0)\neq 0$ olarsa, bu halda uyğun A operatoru tamam kəsilməz operator olmaz. Doğrudan da, n-in kifayət qədər böyük qiymətləri üçün $(n \geq n_0)$ aşağıda göstərilən qayda ilə qurulmuş $\{x_n(t)\}_{n=n_0}^{\infty}$, $t \in [a;b]$ kəsilməz funksiyalarından ibarət məhdud ardıcıllığa baxaq:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, \ a \leq t \leq t_0 - \dfrac{1}{n} \text{ və } t_0 + \dfrac{1}{n} \leq t \leq b \text{ üçün} \\ \dfrac{1}{\varphi(t_0)}, \ t = t_0, \\ \text{xətti funksiyadır}, \left[t_0 - \dfrac{1}{n}; t_0\right] \cup \left[t_0; t_0 + \dfrac{1}{n}\right] \end{cases}$$

$\{(Ax_n)(t)\}_{n=n_0}^{\infty}$ funksiyalar ardıcıllığının kompakt olmadığını göstərək.

Əksini fərz edək. Fərz edək ki, bu ardıcıllıq kompaktdır. Məlum kompaktlıq meyarına görə tutaq ki, $\{(Ax_n)(t)\}_{n=n_0}^{\infty}$ çoxluğu eyni dərəcədən kəsilməzdir, yəni istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $t', t'' \in [a,b]$, $|t' - t''| < \delta$ olduqda $|(Ax_n)(t') - (Ax_n)(t'')| < \varepsilon$ ödənilir ($n \geq n_0$ üçün). Buradan $\varepsilon = 1$ üçün uyğun $\delta > 0$ ədədini $\dfrac{1}{n} < \delta$ kimi seçsək, $t' = t_0$, $t'' = t_0 + \dfrac{1}{n}$ olduqda

$$\left|(Ax_n)(t_0) - (Ax_n)\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)\right| = |1 - 0| = 1$$

olar. Bu onu göstərir ki, baxılan çoxluq eyni dərəcədən kəsilməz ola bilməz, yəni $\{(Ax_n)(t)\}_{n=n_0}^{\infty}$ çoxluğu kompakt deyildir, yəni A tamam kəsilməz operator deyildir. Beləliklə, alırıq ki, $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, $x(t) \in C[a,b]$ operatoru yalnız istənilən $t \in [a,b]$ üçün $\varphi(t) = 0$ olduqda tamam kəsilməz operator olar.

3. Aşağıda göstərilən hallardan hansında $(Ax)(t) = \dfrac{dx}{dt}$ operatoru tamam kəsilməz olar?

a) $A : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$

b) $A : C^{(2)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$

v) $A : C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$

Həlli. Əvvəlcə, aşağıdakı faktın doğruluğunu göstərək. İstənilən $t \in [0,1]$ üçün $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi $C[0,1]$ fəzasında məhdud çoxluqdur, amma kompakt çoxluq deyildir. Bunun üçün baxılan çoxluğun eyni dərəcədən kəsilməz olmadığını göstərmək lazımdır. Əksini fərz edək, fərz edək ki, çoxluq eyni dərəcədən kəsilməzdir. Onda məlum Arsel teoreminə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, $|t_1 - t_2| < \delta$ $(t_1, t_2 \in [0,1])$ olduqda istənilən n üçün $|t_1^n - t_2^n| < \varepsilon$ olar.

Əgər $\varepsilon < 1 - \frac{1}{e}$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1 - \frac{1}{n}$ götürsək, müəyyən $n \geq n_0$ nömrəsindən başlayaraq

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

olar. Sonuncu bərabərsizlikdə $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək, ε-nın seçilməsi ilə ziddiyyət alarıq. Buradan alarıq ki, fərziyyə doğru deyildir və $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0,1]$ ardıcıllığı $C[0,1]$ fəzasında kompakt çoxluq deyildir.

a) $C^{(1)}[0,1]$ fəzasında $M = \left\{ x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} : 0 \leq t \leq 1,\ n \in N \right\}$

çoxluğunu götürək. Bu çoxluq $C^{(1)}[0,1]$ fəzasında məhduddur. Çünki, istənilən $n \in N$ üçün

$$\|x_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)| = 1 + \frac{1}{n+1} < 2$$

M çoxluğunun A inikası zamanı obrazı olan $A(M)$ çoxluğu $\{t^n ; 0 \leq t \leq 1,\ n \in N\}$ çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi bu çoxluq $C[0,1]$ fəzasında kompakt deyildir. Aydındır ki, bu halda $A : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ tamam kəsilməz deyildir.

b) $C^{(2)}[0,1]$ fəzasına daxil olan

$$M = \left\{ x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)(n+2)} : 0 \leq t \leq 1,\ n \in N \right\}$$

çoxluğunu götürək. Bu çoxluq $C^{(2)}[0,1]$ fəzasında məhduddur, çünki istənilən $n \in N$ üçün

$$\|x_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n'(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n''(t)| < 3$$

$A(M)$ çoxluğu $\left\{ \frac{t^{n+1}}{n+1} ; 0 \leq t \leq 1,\ n \in N \right\}$ funksiyalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür. Göstərək ki, $A(M)$ çoxluğu $C^{(1)}[0,1]$ fəzasında kompakt deyildir.

Asanlıqla alarıq ki, istənilən $x \in C^{(1)}[0,1]$ elementinin norması üçün $\|x\|_{C^{(1)}[0,1]} \geq \|x'\|_{C[0,1]}$ doğrudur. Bu bərabərsizlikdən almaq olar ki, əgər $A(M)$

çoxluğu $C^{(1)}[0,1]$-də kompakt olarsa, onda $\{t^n; 0 \le t \le 1,\ n \in N\}$ çoxluğu $C[0,1]$-də kompakt olar. Amma yuxarıda göstərdik ki, sonuncu çoxluq $C[0,1]$-də kompakt deyildir. Ona görə də alırıq ki, $A: C^{(2)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$ operatoru tamam kəsilməz deyildir.

v) Göstərək ki, bu halda A operatoru tamam kəsilməzdir. Tutaq ki, $M \subset C^{(2)}[0,1]$– istənilən məhdud çoxluqdur, yəni elə $R > 0$ ədədi vardır ki,

$$\max_{0 \le t \le 1} |x(t)| + \max_{0 \le t \le 1} |x'(t)| + \max_{0 \le t \le 1} |x''(t)| \le R$$

Buradan alırıq ki, $\max\limits_{0 \le t \le 1} |x'(t)| \le R$, $\max\limits_{0 \le t \le 1} |x''(t)| \le R$.

$A(M) = \{x'(t);\ x(t) \in M\}$ çoxluğuna baxaq. Bu çoxluğa daxil olan hər bir $x(t)$ funksiyası kəsilməz diferensiallanandır və $A(M)$ müntəzəm məhduddur. Göstərək ki, $A(M)$ çoxluğu eyni dərəcədən kəsilməzdir. İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi götürək. Onda istənilən $x(t) \in M$ üçün və $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$ şərtini ödəyən istənilən t_1, t_2 nöqtələri üçün

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |x''(\tau)(t_1 - t_2)| = |x''(\tau)||t_1 - t_2| \le R\delta < \varepsilon$$

(burada $\tau \in [t_1, t_2]$– hər hansı nöqtədir). Onda Arsel teoreminə görə $A(M)$-in kompakt çoxluq olduğunu alırıq. Deməli, $A: C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$ tamam kəsilməz operatordur.

4. $A: C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau, \quad x(t) \in C[0,1]$$

operatorunun tamam kəsilməz olduğunu göstərin.

Həlli. Tutaq ki, $M \subset C[0,1]$ məhdud çoxluqdur, yəni elə $R > 0$ vardır ki,

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le R,$$

istənilən $x(t) \in M$. Onda $\forall x(t) \in M$ üçün

$$\|Ax\| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t x(\tau)d\tau \right| \le \max_{0 \le t \le 1} \int_0^t |x(\tau)|d\tau \le R$$

Ona görə də $A(M)$ məhdud çoxluqdur.

Göstərək ki, $A(M)$ eyni dərəcədən kəsilməz funksiyalar çoxluğudur. $u(t) = (Ax)(t)$ işarə edək. Onda $u(t)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında diferensiallanan funksiyadır və istənilən $t \in [0,1]$ üçün $u'(t) = x(t)$. Ona görə də $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \dfrac{\varepsilon}{R}$ üçün və istənilən $x = x(t) \in M$ üçün

$$|(Ax)(t_1)-(Ax)(t_2)|=|u(t_1)-u(t_2)|=|u'(\tau)||t_1-t_2|=$$
$$=|x(\tau)||t_1-t_2|<\frac{\varepsilon}{R}R=\varepsilon$$

Beləliklə, $A(M)$-in eyni dərəcədən kəsilməz çoxluq olduğunu və A-nın tamam kəsilməz operator olduğunu alırıq.

5. Tutaq ki, $p>1$ və $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$$A:l_p\to l_q,\ (Ax)_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j,\ x=(x_1,x_2,...)\in l_p$$

burada $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ədədi matrisi üçün $\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q<\infty$ sırası yığılandır. Göstərin ki, $A-$ tamam kəsilməz operatordur.

Həlli. Əvvəlcə göstərək ki, A operatoru doğrudan da l_p fəzasını l_q-yə inikas etdirir. Hölder bərabərsizliyinə əsasən alarıq:

$$\|Ax\|_q^q=\sum_{i=1}^{\infty}|(Ax)_i|^q=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right|^q\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)\|x\|_{l_p}^q$$

buradan

$$\|Ax\|_q\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|_{l_p},\ x\in l_p. \qquad (*)$$

Bu bərabərsizlikdən A xətti operatorunun məhdud olduğunu alırıq. İndi tutaq ki, M l_p fəzasında istənilən məhdud çoxluqdur. Onda elə $R>0$ ədədi vardır ki, $\forall x\in M$ üçün $\|x\|_{l_p}\le R$. Onda (*) bərabərsizliyindən alarıq:

$$\|Ax\|_{l_q}\le R\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{1/q},\ \forall x\in M$$

Buradan alırıq ki, $A(M)$ çoxluğu l_q fəzasında məhduddur. l_q fəzasında kompaktlıq meyarına görə $A(M)$-in kompakt olması üçün ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə n_0 nömrəsi olmalıdır ki, $\sum_{i=n_0}^{\infty}|(Ax)_i|^q<\varepsilon$ ($\forall x\in M$ üçün). Ona görə də

$\varepsilon > 0$ götürək. Onda $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q$ ikiqat sırasının yığılan olmasından elə n_0 nömrəsinin varlığı çıxır ki, $\sum_{i=n_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \frac{\varepsilon}{R^q}$.

Göstərək ki, tapılmış n_0 nömrəsi axtarılan nömrədir. Doğrudan da

$$\sum_{i=n_0}^{\infty}|(Ax)_i|^q = \sum_{i=n_0}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right|^q \le \left(\sum_{i=n_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)\|x\|_q^q < \frac{\varepsilon}{R^q}R^q = \varepsilon$$

Ona görə də $A(M)$ kompakt çoxluqdur və A operatoru tamam kəsilməzdir.

6. $A: l_p \to l_p$ $(p > 1)$ operatoru $x = (x_1, x_2, ...) \in l_p$ üçün $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$ kimi təyin edilmişdir, belə ki, $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ – verilmiş ədədlər ardıcıllığıdır. $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ ardıcıllığı hansı şərtləri ödəməlidir ki, A operatoru a) məhdud olsun b) tamam kəsilməz olsun.

Həlli. a) Göstərək ki, A operatoru yalnız və yalnız o zaman məhdud operator olar ki, $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ ardıcıllığı məhdud olsun. Doğrudan da, əvvəlcə fərz edək ki, $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ məhduddur, yəni elə $L > 0$ vardır ki, $|\alpha_j| \le L \quad \forall j$ üçün. Onda

$$\|Ax\|^p = \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j x_j|^p \le L^p\|x\|^p \qquad (\forall x \in l_p),$$

Buradan A operatorunun məhdud olmasını və $\|A\| \le L$ olduğunu alırıq.

İndi tutaq ki, A operatoru məhduddur, amma $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ ardıcıllığı qeyri-məhduddur. Onda istənilən n natural ədədi üçün elə j_n nömrəsi tapmaq olar ki, $|\alpha_{j_n}| > n$. l_p fəzasında vahid sfera üzərində bütün koordinatları sıfırlar, təkcə j_n nömrəli koordinatı vahidə bərabər olan e_{j_n} vektorunu götürək. Onda

$$\|Ae_{j_n}\| = \sqrt[p]{|\alpha_{j_n}|} > \sqrt[p]{n} \quad (\forall n \in N)$$

Buradan $\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = +\infty$ alırıq. Bu isə A-nın məhdud olması şərtinə ziddir. Deməli $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ məhdud olmalıdır.

b) Göstərək ki, A operatoru yalnız və yalnız $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ olduqda tamam kəsilməz olar. Fərz edək ki, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Göstərək ki, A kompakt operatordur. Tutaq ki, $M \subset l_p$ məhdud çoxluqdur, yəni elə $R > 0$ vardır ki, $\|x\| \le R$,

$\forall x \in M$ üçün. a) bəndinə əsasən bu halda A məhdud operatordur və M məhdud çoxluğunu $A(M)$ məhdud çoxluğuna inikas etdirir. İstənilən $\varepsilon > 0$ götürək. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ şərtindən çıxır ki, elə n_0 nömrəsi vardır ki, $n > n_0$ üçün $|\alpha_n| < \dfrac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{R}$. Ona görə də hər bir $x = (x_1, x_2, ...) \in M$ üçün alırıq:

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |(Ax)_j|^p = \sum_{j=n_0}^{\infty} |\alpha_j|^p |x_j|^p < \frac{\varepsilon}{R^p} \sum_{j=n_0}^{\infty} |x_j|^p \le \frac{\varepsilon}{R^p} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \le \varepsilon,$$

Buradan l_p fəzasında kompaktlıq meyarına əsasən $A(M)$ çoxluğunun kompakt olduğunu, eyni zamanda A operatorunun tamam kəsilməz olduğunu alarıq.

İndi tutaq ki, A kompakt operatordur. Onda A operatoru məhduddur və a) bəndinə əsasən $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ ardıcıllığı da məhduddur. İstənilən n natural ədədi üçün n nömrəli koordinatı vahidə, digər bütün koordinatları sıfırlar olan $e_n \in l_p$ vektorunu götürək. Onda $e_n \ne 0$ və $Ae_n = \alpha_n e_n$ olar. Buradan bütün α_n ədədlərinin A kompakt operatorunun məxsusi ədədləri olduğunu alırıq. Məlum teoremə görə bu halda $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olmalıdır.

7. Tutaq ki, H Hilbert fəzasıdır. $A \in L(H)$ və A^*A- tamam kəsilməz operatordur. Göstərin ki, A özü də tamam kəsilməz operatordur.

Həlli. Tutaq ki, $M \subset H$ – hər hansı məhdud çoxluqdur. Onda elə $R > 0$ vardır ki, $\forall x \in M$ üçün $\|x\| \le R$. $A^*A : H \to H$ inikası zamanı M çoxluğunun obrazını $(A^*A)(M)$ kimi işarə edək. Şərtə görə bu çoxluq kompaktdır. Ona görə də istənilən $\{x_n\} \subset M$ üçün yığılan $\{A^*(Ax_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ altardıcıllığı vardır. Onda bu altardıcıllıq fundamentaldır, yəni $\lim\limits_{l,k\to\infty} \|A^*A(x_{n_k} - a_{n_l})\| = 0$. Göstərək ki, $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığının $\{Ax_{n_k}\}$ altardıcıllığa fundamentaldır. H hilbert fəzası olduğundan buradan onun yığılan olması alınar.

İstənilən k, l nömrələri üçün yaza bilərik:

$$\|A(x_{n_k} - x_{n_e})\|^2 = (A(x_{n_k} - x_{n_e}), A(x_{n_k} - x_{n_e})) =$$
$$= (A^*A(x_{n_k} - x_{n_e}), x_{n_k} - x_{n_e})$$

Buradan Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək, alarıq:

$$\|A(x_{n_k} - x_{n_e})\|^2 \le 2R\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_e})\| \quad (\forall k, l \in N)$$

buradan

$$\lim_{k,l\to\infty} \|A(x_{n_k} - x_{n_e})\| = 0$$

Alırıq ki, $\{Ax_{n_k}\}$ fundamentaldır və deməli yığılandır. Yəni, A hər bir məhdud çoxluğu kompakt çoxluğa inikas etdirir və tamam kəsilməz operatordur.

Əvvəldə A kompakt operator olduqda A^*A-nın da kompakt olduğunu göstərmişik. Bunu nəzərə aldıqda baxılan misalda A operatoru və A^*A-nın kompakt olmasının eynigüclü olduğunu alarıq.

8. Tutaq ki, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi H Hilbert fəzasında bazisdir, Y isə Banax fəzasıdır. İsbat edin ki, əgər $A: H \to Y$ xətti kəsilməz operatoru üçün $\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|^2$ yığılan sıra isə, bu halda A tamam kəsilməz operatordur.

İsbatı. Verilmiş A operatoru vasitəsilə aşağıdakı kimi $A_n : H \to Y$, $n \in N$ operatorlar ardıcıllığı quraq. Əvvəlcə A_n operatorlarını $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ bazis elementlərində aşağıdakı kimi təyin edək:

$$A_n e_k = \begin{cases} Ae_k, \text{ əgər } k \le n, \\ 0, \text{ əgər } k > n. \end{cases}$$

Sonra isə A_n operatorlarını bütün H fəzasına kəsilməzliyə görə davam etdiririk. Bu halda istənilən $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \in H$ elementi üçün

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) Ae_k$$

qəbul edirik. Buradan görünür ki, A_n operatorlarından hər biri sonlu ölçülü operatorlardır. Ona görə də A_n, $n \in N$ kompakt operatorlardır.

Göstərək ki, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ operatorlar ardıcıllığı A operatoruna müntəzəm yığılır, yəni $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

Doğrudan da, A operatoru kəsilməz olduğundan istənilən $x \in H$ üçün $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) Ae_k$ bərabərliyinə görə alarıq:

$$\|Ax - A_n x\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k) Ae_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)| \|Ae_k\| \quad (\forall n \in N)$$

Sağ tərəfdə yazılmış sıraya Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək (burada $\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 < \infty$), alarıq:

$$\|(A-A_n)x\| \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x,e_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 \right)^{1/2} \|x\| \quad (\forall x \in H)$$

Buradan

$$\|A-A_n\| \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 \right)^{1/2} \quad (\forall n \in N)$$

Şərtə görə $\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|^2$ yığılan sıra olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 = 0$$

Ona görə də $\lim_{n\to\infty} \|A-A_n\| = 0$. Məlum teoremə görə A_n-lərin kompakt olmasından A-nın da kompakt olmasını alırıq.

9. Aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə verilmiş $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatorlarının tamam kəsilməz operator olub-olmadığını göstərin.

a) $(Ax)(t) = tx(t)$;

b) $(Ax)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$;

v) $(Ax)(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2 x(1)$;

q) $(Ax)(t) = t\int_0^1 e^{ts} x(s) ds$;

d) $(Ax)(t) = A(t^2)$

10. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$,

$$(Ax)(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

bərabərliyi ilə verilmiş operatorun tamam kəsilməz olub-olmadığını göstərin.

11. Göstərin ki, $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$$

operatoru tamam kəsilməzdir.

12. $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş A operatoru $L_2[0,1]$ fəzasında tamam kəsilməz operatordurmu?

13. İsbat edin ki, $A: l_2 \to l_1$ xətti kəsilməz operatoru tamam kəsilməzdir.

14. Tutaq ki, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} -$ H Hilbert fəzasında ortonormal bazisdir. $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ isə məhdud həqiqi ədədlər ardıcıllığıdır.

İstənilən $x \in H$ üçün

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$$

qəbul edək.

İsbat edin ki, A operatoru məhduddur. Hansı λ_n-lər üçün A operatoru tamam kəsilməz olar?

15. Tutaq ki, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – H Hilbert fəzasında ortonormal bazisdir və $A: H \to H$ – tamam kəsilməz operatordur.

İsbat edin ki,

$$\lim_{n \to \infty} Ae_n = 0 .$$

16. Tutaq ki, E – Banax fəzası, $A \in L(E)$ və elə $m > 0$ ədədi vardır ki, istənilən $x \in E$ üçün

$$\|Ax\| \geq m\|x\|$$

A operatoru tamam kəsilməz ola bilərmi?

XXI FƏSİL
XƏTTİ OPERATORLARIN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİ VƏ MƏXSUSİ VEKTORLARI.
REZOLVENTA VƏ SPEKTR

21.1. Sonlu ölçülü fəzalarda çevirmənin məxsusi ədədləri və məxsusi vektorları

Fərz edək ki, X hər hansı n ölçülü xətti fəza, A isə bu fəzada təyin edilmiş xətti çevirmədir.

Tərif 1. Əgər elə $x \neq 0$ vektoru varsa ki, $Ax = \lambda x$ bərabərliyi ödənilsin, bu halda λ ədədinə A çevirməsinin məxsusi ədədi, x vektoruna isə λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor deyilir.

Tərifdən görünür ki, əgər $x-$ məxsusi vektor isə, onda αx şəklində bütün vektorlar birölçülü invariant altfəza təşkil edir və əksinə, birölçülü invariant altfəzanın sıfırdan fərqli hər bir vektoru məxsusi vektordur.

Teorem 1. n-ölçülü kompleks xətti fəzada hər bir A xətti çevirməsinin heç olmazsa, bir məxsusi vektoru vardır.

İsbatı. Verilmiş xətti fəzada hər hansı $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisi götürək. A xətti çevirməsinə bu bazisdə hər hansı $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1,2,....,n$ kvadrat matrisi uyğundur.

Tutaq ki, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ X fəzasının istənilən vektorudur. Onda Ax vektorunun $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ koordinatları aşağıdakı kimi olar

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1n}\xi_n$$
$$\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{2n}\xi_n$$
$$..$$
$$\eta_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + a_{nn}\xi_n$$

x məxsusi vektor olduğu üçün $Ax = \lambda x$ bərabərliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2 \\ .... \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + a_{nn}\xi_n = \lambda\xi_n \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + ... + a_{2n}\xi_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)\xi_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Teoremin doğruluğu üçün elə λ ədədinin və eyni zamanda sıfır olmayan elə $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ədədlərinin varlığını göstərməliyik ki, (1) tənliklər sistemi ödənilsin.

(1) sistemi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$-ə nəzərən xətti bircins tənliklər sistemidir. Bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ .... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

olmalıdır. Bu tənlik λ-ya nəzərən n dərəcəli cəbri tənlikdir. Bu tənliyin heç olmazsa bir kompleks λ_0 kökü vardır. λ-nın bu qiymətini (1) tənliklər sistemində yazaraq sistemin sıfırdan fərqli $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, ..., \xi_n^{(0)}$ həllini taparıq. Onda

$$x^{(0)} = \xi_1^{(0)} e_1 + \xi_2^{(0)} e_2 + ... + \xi_n^{(0)} e_n$$

vektoru λ_0 məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor olar, yəni $Ax^{(0)} = \lambda_0 x^{(0)}$. Teorem isbat olundu.

Tərif 2. (2) tənliyinin sol tərəfindəki çoxhədliyə A çevirməsinə uyğun xarakteristik çoxhədli, (2) tənliyinə isə xarakteristik tənlik deyilir.

Göründüyü kimi xarakteristik tənliyin kökləri A çevirməsinin məxsusi ədədləridir.

Xarakteristik tənlik λ-ya nəzərən n dərəcəli çoxhədli olduğundan alırıq ki, A çevirməsinin n sayda məxsusi ədədləri vardır. Bu məxsusi ədədlər həqiqi və ya kompleks, eləcə də sadə və ya təkrarlanan ola bilərlər.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 2. Xətti çevirmənin müxtəlif məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi vektorları xətti asılı deyildir.

İsbatı. Teoremi riyazi induksiya metodu ilə isbat edək:
$n = 1$ olduqda λ məxsusi ədədinə uyğun $x_1 \neq 0$ vektoru xətti asılı deyildir.

Fərz edək ki, $n = k$ sayda müxtəlif məxsusi ədədlərə uyğun $x_1, x_2, ..., x_k$ vektorları xətti asılı deyildir.

Göstərək ki, $n=k+1$ sayda müxtəlif məxsusi ədədlərə uyğun $x_1, x_2,..., x_k, x_{k+1}$ məxsusi vektorları da xətti asılı deyildir. Əksini fərz edək, fərz edək ki, bu vektorlar xətti asılıdırlar. Onda heç olmazsa biri, məsələn α_1 əmsalı sıfırdan fərqli olan elə $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_{k+1}$ əmsalları vardır ki,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0 \qquad (3)$$

(3) bərabərliyinin hər tərəfinə A operatoru ilə təsir etsək, alarıq:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = 0$$

və ya

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + ... + \alpha_k \lambda_k x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0 \qquad (4)$$

(3) bərabərliyini λ_{k+1} ədədinə vurub (4) bərabərliyindən çıxsaq, alarıq:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})x_2 + ... + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k = 0$$

$\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ $i \neq k+1$ və $\alpha_1 \neq 0$ olduğu üçün birinci əmsal sıfırdan fərqlidir. Bu k sayda $x_1, x_2,..., x_k$ vektorlarının xətti asılı olduğunu göstərir. Alınmış bu ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Yəni $k+1$ sayda məxsusi vektorlar xətti asılı deyildir. Əgər xarakteristik çoxhədlinin n sayda müxtəlif kökləri varsa, onda A çevirməsinin xətti asılı olmayan n sayda məxsusi vektorlarını fəzanın bazis vektorları qəbul etsək, onda A çevirməsinə uyğun matrisi diaqonal şəklinə gətirmək olar, yəni

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A çevirməsinin λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektorlar çoxluğuna θ sıfır vektorunun əlavə olunması ilə əmələ gələn çoxluğa A-nın məxsusi xətti çoxobrazlısı deyilir. Bu çoxluğu L ilə işarə edək.

Asanlıqla göstərə bilərik ki, bu qapalı çoxobrazlıdır, yəni qapalı altfəzadır. Doğrudan da x və y vektorları A-nın λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektorları isə, onda $Ax = \lambda x$, $Ay = \lambda y$ olar. Buradan istənilən α və β ədədləri üçün alarıq:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

İndi isə L-in qapalı olduğunu göstərək: $x_n \in L,\ x_n \to x$ götürək:

$$Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = \lambda x,$$

Buradan $x \in L$ alırıq. Yəni, L qapalıdır, altfəzadır.

21.2. Tamam kəsilməz operatorların məxsusi ədədləri və məxsusi vektorları

Tutaq ki, X Banax fəzasıdır, A isə bu fəzada təsir edən tamam kəsilməz operatordur. Fərz edək ki, λ ədədi A operatorunun məxsusi ədədi, X_λ isə λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi altfəzadır.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. Əgər A tamam kəsilməz operator isə, onda onun λ məxsusi ədədinə uyğun X_λ məxsusi altfəzası sonlu ölçülüdür.

İsbatı. Fərz edək ki, $\bar{S}_1(0)-X_\lambda$ altfəzasında qapalı vahid kürədir. $\{x_n\}\subset \bar{S}_1(0)$ ardıcıllığını götürək.

A operatoru tamam kəsilməz olduğundan $\{Ax_n\}$ ardıcıllığı kompaktdır. Onda $x_n=\dfrac{1}{\lambda}Ax_n$ bərabərliyinə görə $\{x_n\}$ ardıcıllığının da kompakt olduğunu alırıq. Beləliklə, vahid kürənin X_λ altfəzasında kompakt olduğunu alırıq. Məlum teoremə görə bu X_λ-nın sonlu ölçülü olması deməkdir.

Teorem 2. Tutaq ki, $A-X$ fəzasında təyin edilmiş tamam kəsilməz operatordur. Onda istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün A operatorunun kompleks müstəvi üzərində $|\lambda|\le\varepsilon$ dairəsi xaricində yalnız sonlu sayda məxsusi ədədləri ola bilər.

İsbatı. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, A tamam kəsilməz operatordur, amma elə $\varepsilon_0>0$ ədədi tapmaq olar ki, A operatorunun $|\lambda_n|\ge\varepsilon_0$ şərtini ödəyən sonsuz sayda $\{\lambda_n\}$ məxsusi ədədlər ardıcıllığı vardır. $\{x_n\}-$ bu məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi vektorlar ardıcıllığı olsun. Yuxarıda göstərdik ki, $\{x_n\}$ vektorları xətti asılı deyildirlər.

X_n ilə X fəzasının $x_1,x_2,...,x_n$ elementləri vasitəsilə düzəlmiş məxsusi altfəzasını işarə edək. Aydındır ki,

$$X_1\subset X_2\subset...\subset X_n\subset...$$

və n-in bütün qiymətlərində $X_{n+1}\ne X_n$. Bütün X_n altfəzaları sonlu ölçülü olduğundan qapalıdırlar. Məlum Riss teoreminə görə elə $\{y_n\}$ vektorlar ardıcıllığı tapmaq olar ki, $y_k\in X_k$, $\|y_k-x\|\ge\dfrac{1}{2}$ istənilən $x\in X_{k-1}$, $k=2,3,...$ üçün $\{Ay_n\}$ ardıcıllığına baxaq. $\{y_n\}$ məhdud və A tamam kəsilməz olduğu üçün $\{Ay_n\}$ kompakt çoxluq olar. Amma aşağıda göstərəcəyik ki, $\{Ay_n\}$ çoxluğu kompakt ola bilməz. Ona görə də alarıq ki, bizim sonsuz sayda məxsusi ədədlərin varlığı haqqındakı fərziyyəmiz doğru deyildir. Ona görə də

$\{Ay_n\}$ çoxluğunun kompakt olmadığını göstərək. $A_\lambda = A - \lambda I$ işarə edək. İstənilən natural $m, n, m > n$ üçün yaza bilərik:

$$\|Ay_m - Ay_n\| = \|A_{\lambda_m} y_m + \lambda_m y_m - A_{\lambda_n} y_n - \lambda_n y_n\| =$$

$$= |\lambda_m| \left\| y_m - \left[-\frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_m} y_m + \frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_n} y_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n \right] \right\| = |\lambda_m| \|y_m - x_{mn}\|$$

burada

$$x_{mn} = \left(-\frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda m} y_m + \frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda n \, y_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n \right) \in X_{m-1}.$$

Doğrudan da, əgər $y_k \in X_k$ isə, onda $y_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(k)} x_i$, burada $\{x_i\}_1^k$ vektorları X_k altfəzasının bazis vektorlarıdır. Ona görə yaza bilərik:

$$A_{\lambda_m} y_m = (A - \lambda I) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(m)} x_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^{(m)} (\lambda_i - \lambda_m) x_i \in X_{m-1}$$

$$y_n \in X_n \subset X_{m-1}, \; A_{\lambda_n} y_n \in X_{n-1} \subset X_{m-1}$$

Nəticədə $x_{mn} \in X_{m-1}$ alırıq və bu halda $\|y_m - x_{mn}\| \geq \frac{1}{2}$ olar. Onda yaza bilərik:

$$\|Ay_m - Ay_n\| = |\lambda_m| \|y_n - x_{mn}\| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Buradan alarıq ki, nə $\{Ay_n\}$, nə də onun heç bir altardıcıllığı yığılan ola bilməz. Digər tərəfdən $\{y_n\}$ məhdud çoxluq olduğundan $\{Ay_n\}$ nisbi kompakt ardıcıllıqdır və onun yığılan altardıcıllığı vardır. Alınmış bu ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Yəni, A operatorunun $\|\lambda_n\| \geq \varepsilon_0$ şərtini ödəyən sonsuz sayda məxsusi ədədləri ola bilməz. Teorem isbat olundu.

21.3. Öz-özünə qoşma operatorların məxsusi ədədləri və məxsusi vektorlarının xassələri

Fərz edək ki, H Hilbert fəzası, A isə bu fəzada təyin edilmiş öz-özünə qoşma operatordur, yəni $A = A^*$ və istənilən $x, y \in H$ elementləri üçün

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

bərabərliyi ödənilir.

Yuxarıda göstərmişdik ki, A Hilbert fəzasında verilmiş öz-özünə qoşma operator isə, onda istənilən $x \in H$ elementi üçün (Ax, x) ifadəsi həqiqi ədəddir. Bu faktdan istifadə edərək öz-özünə qoşma operatorun məxsusi ədədləri haqqında aşağıdakı mühüm teoremləri isbat edə bilərik.

Teorem 1. Öz-özünə qoşma operatorun məxsusi ədədləri həqiqidirlər.

İsbatı. Fərz edək ki, λ öz-özünə qoşma operatorun məxsusi ədədidir. A operatorunn məxsusi ədədinin tərifinə görə elə $x \neq 0$ vektoru vardır ki, $Ax = \lambda x$. Bu münasibətdən alırıq ki,

$$(Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2$$

(Ax, x) və $\|x\|$ həqiqi ədədlər olduğundan, aydındır ki, λ həqiqi ədəddir. Teorem isbat edildi.

Teorem 2. Əgər A öz-özünə qoşma operator isə, onda A operatorunun müxtəlif məxsusi ədədlərinə uyğun məxsusi vektorları ortoqonaldır.

İsbatı. Fərz edək ki, λ_1 və λ_2 öz-özünə qoşma A operatorunun müxtəlif məxsusi ədədləri və x_1, x_2 isə bu məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi vektorlardır. Onda $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ olar. Buradan alarıq:

$$(Ax_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$$
$$(x_1, Ax_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

A öz-özünə qoşma olduğundan $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$ bərabərliyi ödənməlidir. Buradan

$$\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

yaxud

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu üçün $(x_1, x_2) = 0$, yəni x_1 və x_2 vektorları ortoqonaldır. Teorem isbat edildi.

Teorem 3. Öz-özünə qoşma operatorun istənilən λ məxsusi ədəd $\lambda = (Ax, x)$ kimi təyin edilir, belə ki, x, $\|x\| = 1$ şərtini ödəyən müəyyən bir vektordur.

İsbatı. λ ədədi A operatorunun məxsusi ədədi olduğu üçün elə $z \neq 0$ vektoru vardır ki, $Az = \lambda z$. $x = \frac{z}{\|z\|}$ qəbul etsək, $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ alarıq.

Buradan $(Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda$ alarıq. Teorem isbat edildi.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə. Tutaq ki, A öz-özünə qoşma operator, λ isə onun istənilən məxsusi ədədidir.

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$$

işarə edək. Bu halda $m \leq \lambda \leq M$ bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 4. Tutaq ki, A öz-özünə qoşma operatordur və istənilən x elementi üçün $(Ax, x) \geq 0$. Bu halda $\|A\|$ ədədi A operatorunun ən böyük məxsusi ədədinə bərabərdir.

İsbatı. Məlum olduğu kimi öz-özünə qoşma operatorun norması $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ kimi təyin edilə bilər. Şərtə görə $(Ax, x) \geq 0$ olduğundan $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ yaza bilərik. Onda elə x_0, $\|x_0\| = 1$ elementi vardır ki,

$$(Ax_0, x_0) = \|A\| = \lambda$$

Normanın tərifindən və yuxarıda aldığımız sonuncu bərabərlikdən alarıq:

$$\|(A - \lambda I)x_0\|^2 = \|Ax_0\|^2 - 2\lambda(Ax_0, x_0) + \lambda^2 \|x_0\|^2 =$$

$$= \|A\|^2 - 2\|A\|\|A\| + \|A\|^2 \cdot 1 = 0$$

Beləliklə, $(A - \lambda I)x_0 = 0$ və $Ax_0 = \lambda x_0$ alırıq.

Buradan $\lambda = \|A\|$-nın A operatorun məxsusi ədədi olması alınır. Bunun ən böyük məxsusi ədəd olması isə teorem 3-dən çıxır.

Teorem 5. Tutaq ki, A öz-özünə qoşma operatordur və

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

Bu halda m və M ədədləri A operatorunun ən kiçik və ən böyük məxsusi ədədləridir.

İsbatı. Aydındır ki, m və M-in məxsusi ədədlər olduğunu göstərmək kifayətdir. $m \leq \lambda \leq M$ bərabərsizliyindən m və M-in uyğun olaraq ən kiçik və ən böyük məxsusi ədəd olması nəticə kimi alınır.

Əvvəlcə M-in məxsusi ədəd olduğunu göstərək. $B = A - mI$ öz-özünə qoşma operatoruna baxaq.

$$(Bx, x) = (Ax, x) - m(x, x) \geq 0$$

olduğu üçün teorem 4-ə əsasən $\|B\|$ ədədi B operatorunun ən böyük məxsusi ədədinə bərabər olar.

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x) = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) - m = M - m.$$

$M - m$ ədədi B operatorunun ən böyük məxsusi ədədidir. Onda elə $x_0 \neq 0$ vektoru vardır ki,

$$Bx_0 = (M - m)x_0.$$

$B = A - mI$ olduğundan $Bx_0 = Ax_0 - mIx_0 = Ax_0 - mx_0$.

Nəticədə $Ax_0 - mx_0 = (M - m)x_0$, yaxud $Ax_0 = Mx_0$ alırıq. Yəni M ədədi A operatorunun məxsusi ədədidir. m ədədinin A operatorunun məxsusi ədədi olduğunu göstərmək üçün $B = -A$ operatoruna baxaq. Bu halda $-m$ ədədi B-nin məxsusi ədədi olar və

$$-m = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x)$$

Burada isə m-in A-nın məxsusi ədədi olması alınır.

21.4. Xətti öz-özünə qoşma tamam kəsilməz operatorların məxsusi ədədləri və məxsusi vektorları

Fərz edək ki, H-Hilbert fəzası və A bu fəzada təsir edən öz-özünə qoşma tamam kəsilməz operatordur.

Yuxarıda biz həm tamam kəsilməz operatorların, həm də öz-özünə qoşma operatorların məxsusi ədədlərinin və məxsusi vektorlarının bəzi xassələrini göstərdik.

İndi isə operator eyni zamanda həm tamam kəsilməz, həm də öz-özünə qoşma olduğu halda onun məxsusi ədədləri və məxsusi vektorlarının əsas xassələrini göstərək.

Aydındır ki, bu halda verilmiş operatorun məxsusi ədədləri və məxsusi vektorları haqqında daha güclü xassələr almaq mümkündür. Əvvəlcə, aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 1. Əgər $A \neq 0$ öz-özünə qoşma tamam kəsilməz operator isə, onda onun heç olmazsa, bir $\lambda \neq 0$ məxsusi ədədi vardır.

İsbatı. A operatoru öz-özünə qoşma operator olduğu üçün onun norması $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ kimi təyin edilə bilər. Onda elə $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ ardıcıllığı tapmaq olar ki, $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$, $n \to \infty$. $A \neq 0$ olduğu üçün n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində $(Ax_n, x_n) \neq 0$. Bu halda elə $\{x_{n'}\}$ altardıcıllığı vardır ki, $n' \to \infty$ şərtində $(Ax_{n'}, x_{n'}) \to \lambda$, harada ki, $\lambda = \|A\|$ və ya $\lambda = -\|A\|$.

Aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$\|Ax_{n'} - \lambda x_{n'}\|^2 = \left(Ax_{n'} - \lambda x_{n'}, Ax_{x'_n} - \lambda x_{n'}\right) =$$

$$= \|Ax_{n'}\|^2 - 2\lambda(Ax_{n'}, x_{n'}) + \lambda^2 \leq 2\lambda\left[\lambda - (Ax_{n'}, x_{n'})\right]$$

(Burada biz $\|x_{n'}\| = 1$ və $\|Ax_{n'}\|^2 \leq \|A\|^2 = \lambda^2$ olduğunu nəzərə aldıq**)**

$n' \to \infty$ olduqda $y_{n'} = Ax_{n'} - \lambda x_{n'} \to 0$. Şərtə görə $\{x_{n'}\}$ məhdud ardıcıllıqdır. A tamam kəsilməz olduğundan $\{Ax_{n'}\}$ kompakt ardıcıllıqdır. Ona görə də onun yığılan $\{Ax_{n''}\}$ altardıcıllığı vardır. Onda $y_{n''} = Ax_{n''} - \lambda x_{n''}$ bərabərliyindən $n'' \to \infty$ olduqda $y_{n''} \to 0$ alarıq. Eyni zamanda $x_{n''} = \dfrac{1}{\lambda} Ax_{n''} - \dfrac{1}{\lambda} y_{n''}$ ardıcıllığında yığılan olar.

$x = \lim\limits_{n'' \to \infty} x_{n''}$ olsun. Onda $x = \dfrac{1}{\lambda} Ax$, yaxud $Ax = \lambda x$ alarıq. Burada $\|x\| = \lim\limits_{n'' \to \infty} \|x_{n''}\| = 1$ olduğundan $x \neq 0$. Teorem isbat olundu.

12.3 paraqrafında isbat edilmiş teorem 4-ün daha dəqiq variantı olan aşağıdakı teoremi də isbat etmək olar.

Teorem 2. Öz-özünə qoşma tamam kəsilməz operatorun bütün məxsusi ədədləri həqiqidir və $[m, M]$ parçasına daxildirlər, burada

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

Əgər $M \neq 0$ isə, onda M ədədi A operatorunun ən böyük məxsusi ədədi, əgər $m \neq 0$ isə, onda m ədədi A operatorunun ən kiçik məxsusi ədədidir.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə. Əgər $A-$ tamam kəsilməz öz-özünə qoşma operator isə, onda $\|A\| = |\lambda_1|$, burada $\lambda_1 - A$ operatorunun mütləq qiymətcə ən böyük məxsusi ədədidir.

Qeyd edək ki, bu nəticə sonlu ölçülü evklid fəzalarında istənilən öz-özünə qoşma operator üçün də doğrudur.

Teorem 3. (Hilbert-Şmidt). Əgər $A-$ H Hilbert fəzasında tamam kəsilməz öz-özünə qoşma operator isə, onda istənilən $x \in H$ üçün Ax elementini A operatorunun ortonormal məxsusi vektorlarına nəzərən yığılan Furye sırasına ayırmaq olar.

İsbatı. Tutaq ki, φ_1 A operatorunun ən böyük məxsusi ədədinə (mütləq qiymətcə) uyğun normallaşmış məxsusi vektorudur. $H_1 = \{x \in H : (x, \varphi_1) = 0\}$ götürək.

İstənilən $x \in H$ üçün

$$(Ax, \varphi_1) = (x, A\varphi_1) = \lambda_1 (x, \varphi_1) = \lambda_1 \cdot 0 = 0$$

olduğu üçün $Ax \in H_1$, yəni A operatoru H_1-i H_1-ə keçirir. Ona görə də A operatoruna H_1-də təsir edən operator kimi baxa bilərik. A operatoru H_1-də tamam kəsilməz öz-özünə qoşma operator olduğundan teorem 1-ə əsasən onun λ_2 məxsusi ədədi və ona uyğun φ_2 məxsusi vektoru vardır, belə ki, $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

İndi isə $H_2 = \{x \in H_1; (x, \varphi_2) = 0\}$ götürək. Teorem 1-i tətbiq etməklə prosesi davam etdirək. Bu zaman aşağıdakı iki haldan biri ola bilər: ya proses hər hansı addımda kəsilir, yəni elə n nömrəsi tapılır ki, $(x, \varphi_k) = 0$, $k = 1, 2, .., n$ şərtləri ilə təyin edilən H_n çoxluğunda $A = 0$ olur. Bu halda istənilən $x \in H$ elementi üçün $y = x - \sum\limits_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) \varphi_k$ elementinə baxaq. Aşkardır ki, $y \in H_n$ və $Ay = 0$. Buradan

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, \varphi_k) \varphi_k .$$

İkinci halda isə proses qeyri-məhdud davam edir. Bu halda A operatorunun məxsusi ədədlərindən ibarət $\{\lambda_k\}$ ardıcıllığını və məxsusi vektorlarından ibarət $\{\varphi_k\}$ ardıcıllığını almış oluruq. İstənilən n üçün

$$\|A\|^2_{L(H_n)} = \lambda^2_{n+1}$$

bərabərliyindən istifadə edərək yaza bilərik:

$$\left\| A\left[x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) \right] \right\|^2 \le \lambda^2_{n+1} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) \right\|^2 =$$

$$= \lambda^2_{n+1} \left\{ \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| (x, \varphi_k)^2 \right| \right\} \le \lambda^2_{n+1} \|x\|^2$$

A tamam kəsilməz operator olduğundan §12.2-də teorem 2-yə görə $n \to \infty$, $\lambda_n \to 0$. Ona görə də $n \to \infty$ şərtində

$$A\left[x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) \varphi_k \right] \to 0$$

yaxud

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, \varphi_k) \varphi_k \qquad (1)$$

alırıq. Teorem isbat olundu.

İsbat edilmiş bu teoremdən aşağıdakı iki nəticə çıxır.

Nəticə 1. Separabel Hilbert fəzasında təsir edən öz-özünə qoşma, tamam kəsilməz A operatorunun məxsusi vektorlarından ibarət ortonormal bazis vardır.

İsbatı. Yuxarıdakı (1) bərabərliyinin hər tərəfinə A^{-1} operatoru ilə təsir etsək, alarıq:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k$$

Göründüyü kimi hər bir $x \in H$ elementini bu elementin özünə yığılan, A operatorunun ortonormal məxsusi vektorlarına görə Furye sırasına ayırmaq olar.

Nəticə 2. Əgər A operatoru H separabel Hilbert fəzasında A operatorunun məxsusi vektorlarından ibarət ortonormal bazis vardır.

İsbatı. Yuxarıdakı (1) bərabərliyini

$$A\left[x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k \right] = 0$$

şəklində yazmaq olar. Bu bərabərlik onu göstərir ki, $x_0 = x - \sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\varphi_k$ elementi A operatorunun $\lambda = 0$ məxsusi ədədinə uyğun $N(A)$ məxsusi altfəzasına daxildir. $N(A)$ məxsusi altfəza özü də separabel olduğundan bu altfəzada da $\{e_k\}$ ortonormal bazisi qurmaq olar. $x_0 \in N(A)$ elementini bu bazis üzrə ayırsaq, alarıq:

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k + \sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\varphi_k$$

Ayrılışa daxil olan cəmlərdən biri və ya hər ikisi sonlu da ola bilər.

Beləliklə, alırıq ki, H separabel Hilbert fəzasında məxsusi vektorlardan ibarət ortonormal bazis qurmaq üçün teoremin isbatında A operatorunun məxsusi elementlərindən düzəlmiş $\{\varphi_n\}$ sistemini A operatorunun $N(A)$ sıfır altfəzasının hər hansı ortoqonal $\{e_k\}$ bazisi ilə tamamlamaq lazımdır.

21.5. Xətti operatorun rezolvent çoxluğu və spektri

Riyaziyyatın müxtəlif sahələrində

$$Ax - \lambda x = y, \text{ yaxud } (A - \lambda I)x = y \qquad (1)$$

şəklində tənliklərə rast gəlinir. Burada A müəyyən X Banax fəzasında təyin edilmiş xətti operator, λ isə kompleks parametrdir. (1) tənliyi ilə bərabər

$$Ax - \lambda x = 0, \text{ yaxud } (A - \lambda I)x = 0 \qquad (2)$$

tənliyinə də baxaq. (2) tənliyinə (1)-ə uyğun bircins tənlik deyilir. Aydındır ki, (2) tənliyinin həmişə $x = 0$ trivial həlli vardır.

Fərz edək ki, λ parametrinin müəyyən qiymətində $A - \lambda I$ operatorunun $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ tərs operatoru vardır. $R_\lambda(A)$ operatoru A operatorunun rezolventası adlanır. λ-nın bu qiymətlərində (1) tənliyinin istənilən y üçün $x = R_\lambda(A)y$ həlli vardır. Bu halda (2) tənliyinin yeganə $x = 0$ trivial həlli olar. λ parametrinin istənilən y üçün (1) tənliyinin yeganə həllinin olduğu və R_λ operatorunun məhdud olduğu bu qiymətlərinə A operatorunun requlyar nöqtələri deyilir. A operatorunun bütün requlyar nöqtələri çoxluğunu $\rho(A)$ ilə işarə edək. $\rho(A)$-ya A operatorunun rezolvent çoxluğu deyilir.

$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatoruna A operatorunun rezolventası deyilir.

Rezolvent çoxluğun bəzi xassələrini göstərək.

Teorem 1. $\rho(A)$ rezolvent çoxluğu açıq çoxluqdur.

İsbatı. Tutaq ki, $\lambda_0 \in \rho(A)$. Bu o deməkdir ki, $A - \lambda_0 I$-nin kəsilməz tərsi vardır. $A - \lambda I$ operatoru üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$A-\lambda I=A-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I=$$
$$=(A-\lambda_0 I)\left[I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)\right] \qquad (3)$$

Şərtə görə $A-\lambda_0 I$ -nin kəsilməz tərsi vardır. $A-\lambda I$ -nin kəsilməz tərsinin olması üçün $I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)$ operatorunun kəsilməz tərsi olmalıdır.

Tərs operatorun varlığı teoreminə görə $I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)$ operatorunun o zaman kəsilməz tərsi olar ki,

$$|\lambda-\lambda_0|\left\|R_{\lambda_0}(A)\right\|<1$$

şərti ödənilsin.

Alırıq ki, əgər $\lambda_0\in\rho(A)$ isə, onda $S_r(\lambda_0)$ dairəsi də $\rho(A)$ çoxluğuna daxildir, belə ki, $r=\left\|R_{\lambda_0}(A)\right\|^{-1}$. Bu o deməkdir ki, $\rho(A)$ açıq çoxluqdur. Teorem isbat edildi.

Teorem 2. Əgər $A\in L(X)$ isə, onda $\{\lambda:|\lambda|>\|A\|\}\subset\rho(A)$ doğrudur.

İsbatı. Doğrudan da $A-\lambda I=-\lambda\left(I-\lambda^{-1}A\right)$ bərabərliyinə görə $\left\|\lambda^{-1}A\right\|<1$, yəni $|\lambda|>\|A\|$ olarsa, bu halda $A-\lambda I$ -nin kəsilməz tərsi olar. Deməli, $|\lambda|>\|A\|$ şərtini ödəyən bütün λ nöqtələri çoxluğu $\rho(A)$ rezolvent çoxluğuna daxildir. Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər A məhdud operator isə, onda $\rho(A)$ qeyri-məhdud çoxluqdur.

Tərif. $\rho(A)$ rezolvent çoxluğunun bütün kompleks müstəviyə tamamlayıcı çoxluğuna A operatorunun spektri deyilir və $\sigma(A)$ kimi işarə edilir.

Teorem 1-dən çıxır ki, istənilən xətti operatorun spektri qapalı çoxluqdur (açıq çoxluğun tamamlayıcısı olduğu üçün).

Teorem 2-dən isə alınır ki, A xətti məhdud operator isə, onun spektri $\sigma(A)\subset S_{\|A\|}(0)$, yəni A operatorunun spektri $|\lambda|\le\|A\|$ dairəsi daxilində yerləşir. Bu halda spektr məhdud çoxluqdur.

Əgər $\lambda\in\sigma(A)$ olarsa, bu halda aşağıdakı iki hal mümkündür:

1) $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ operatoru yoxdur. Bu halda λ A operatorunun məxsusi ədədidir. Bütün bu cür nöqtələr A operatorunun nöqtəvi spektri adlanır.

2) $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ operatoru vardır, amma bütün fəzada təyin olunmamışdır. λ -nın bu qiymətli A operatorunun kəsilməz spektri adlanır.

Beləliklə, λ -nın hər bir qiyməti ya requlyar nöqtədir, ya məxsusi ədəddir, ya da kəsilməz spektrdir.

Qeyd edək ki, operatorun kəsilməz spektrinin varlığı sonsuz ölçülü fəzalarda təyin edilmiş operatorların sonlu ölçülü fəzalarda verilmiş operatorlardan ciddi fərqini göstərən əlamətdir. Yəni, məhdud operatorların kəsilməz spektri yoxdur.

Misallara baxaq.

Misal 1. Əgər X fəzası sonlu ölçülü fəza isə, onda bu fəzada istənilən xətti operatorun spektri yalnız məxsusi ədədlərdən ibarətdir. n ölçülü evklid fəzasında təyin edilmiş hər bir öz-özünə qoşma operatorun, təkrarlanma tərtibi nəzərə alınmaqla n sayda məxsusi ədədləri vardır. Bütün bu məxsusi ədədlər həqiqidir və bu məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi vektorlardan X fəzasının ortonormal bazisini seçmək olar.

Misal 2. Sonsuz ölçülü X Banax fəzasında hər bir tamam kəsilməz operatorun $\sigma(A)$ spektri ən çoxu hesabi sayda məxsusi ədədlərdən ibarətdir, belə ki, bu məxsusi ədədlərin yeganə limit nöqtəsi $\lambda = 0$ nöqtəsi ola bilər.

Əgər $\lambda \neq 0$ ədədi operatorun məxsusi ədədi deyilsə, onda λ ədədi operatorun $\rho(A)$ rezolvent çoxluğuna daxildir. Doğrudan da, bu halda $A - \lambda I$ operatorunun nüvəsi, $N(A - \lambda I) = \{0\}$, ona görə də $(A - \lambda I)$-nin kəsilməz tərsi vardır. $\lambda = 0$ nöqtəsi həmişə spektrə daxildir, $0 \in \sigma(A)$. $\lambda = 0$ nöqtəsi A operatorunun məxsusi ədədi olmadığı halda A operatorunun tərsi varsa, onda A^{-1} qeyri-məhdud operatordur.

Misal 3. A operatoru Hilbert fəzasında istənilən tamam kəsilməz öz-özünə qoşma operator olarsa, onda misal 2-də tamam kəsilməz operatorun spektri haqqında dediyimiz bütün hökmlər burada da doğrudur. Əlavə onu deyə bilərik ki, öz-özünə qoşma tamam kəsilməz A operatorunun heç olmazsa bir $\lambda \neq 0$ məxsusi ədədi vardır, A-nın bütün məxsusi ədədləri həqiqidir və A operatorunun məxsusi vektorları üzrə ayrılış haqqında Hilbert-Şmidt teoremi doğrudur.

Misal 4. $C[a,b]$ fəzasında A operatorunu aşağıdakı kimi təyin edək:

$$Ax(t) = tx(t) \tag{4}$$

A operatoru sərbəst dəyişənə vurma operatoru adlanır. (4) bərabərliyindən alırıq:

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t)$$

$A - \lambda I$ operatorunun λ-nın bütün qiymətlərində tərs operatoru vardır, çünki $(t - \lambda)x(t) = 0$ bərabərliyindən $x(t)$ kəsilməz funksiyasının eyniliklə sıfra bərabərliyi alınır $x(t) = 0$. Amma $\lambda \in [a,b]$ üçün

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{t - \lambda}x(t)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan tərs operator bütün $C[a,b]$ fəzasında təyin edilməmişdir və qeyri-məhdud operatordur. Nəticədə alırıq ki, A operatorunun spektri $[a,b]$ parçasından ibarətdir, bu operatorun məxsusi ədədləri yoxdur, yalnız kəsilməz spektri vardır.

Misal 5. l_2 fəzasında $A:(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \to (0, x_1, x_2, ...)$ bərabərliyi vasitəsilə A operatoru təyin edək.

A operatorunun məxsusi ədədləri yoxdur. A^{-1} tərs operatoru məhduddur, amma l_2-də yalnız $x_1 = 0$ şərtini ödəyən altfəzada təyin olunmuşdur. $\lambda = 0$ yeganə spektr nöqtəsidir.

21.6. Öz-özünə qoşma məhdud operatorların spektral ayrılışı

Aşağıda biz H Hilbert fəzasında təsir edən hər bir öz-özünə qoşma məhdud A operatoru üçün mücərrəd Stiltes inteqralı şəklində inteqral göstəriliş düsturunu göstərəcəyik. Bu formul öz-özünə qoşma operatorun spektral ayrılışı adlanır. Bu düsturun alınmasında A operatorunun spektral funksiyası adlanan $P(\lambda)$ operator-funksiyası mühüm rol oynayır. λ-nın hər bir qiymətində $P(\lambda)$-nın qiymətləri A operatorunun spektri ilə sıx bağlı olan müəyyən ortoqonal proyeksiya operatorlarıdır. Öz-özünə qoşma operatorların spektral ayrılış düsturları bu operatorların öyrənilməsi üçün mühüm bir analitik vasitədir və öz-özünə qoşma operatorlarla bağlı məsələlərin həllində geniş istifadə edilir.

Tərif. Fərz edək ki, $A \in L(H)$ öz-özünə qoşma operator, $P(\lambda)$ isə, istənilən $\lambda \in (-\infty, \infty)$ üçün H fəzasında ortoqonal proyeksiya operatorudur. Əgər $P(\lambda)$ operator-funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, ona A operatorunun spektral funksiyası deyilir:

1) $\lambda < m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ olduqda $P(\lambda) = 0$,

$\lambda \geq M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ olduqda $P(\lambda) = I$;

2) $P(\lambda)$ λ-dan asılı azalmayan funksiyadır, yəni $\lambda < \mu$ olduqda $P(\lambda) \leq P(\mu)$;

3) $P(\lambda)$ funksiyası H fəzasında güclü yığılma mənasında sağdan kəsilməzdir, yəni istənilən $x \in H$ üçün $\lim\limits_{\mu \to \lambda + 0} P(\mu)x = P(\lambda)x$ doğrudur.

4) λ parametrinin hər bir qiymətində $P(\lambda)$ operatoru $L(H)$ fəzasının A ilə kommutativ olan hər bir operatoru ilə kommutativdir.

Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün A operatoru üçün Stiltes inteqralı şəklində aşağıdakı spektral ayrılış düsturu doğrudur:

$$A = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda dP(\lambda) \tag{1}$$

Misal 1. Tutaq ki, A operatoru sonlu ölçülü H Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma operatordur. A operatorunun n sayda məxsusi ədədləri vardır və bu məxsusi ədədlər həqiqidir. Bu məxsusi ədədləri artma istiqamətində düzək:

$$m = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k = M \quad (1 \le k \le n)$$

H_i ilə A operatorunun λ_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi altfəzasını işarə edək. Onda H fəzası üçün aşağıdakı ortoqonal ayrılışı yaza bilərik:

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_k$$

Tutaq ki, $P_i -$ H fəzasından H_i altfəzasına ortoqonal proyeksiya operatorudur. Bu halda A operatoruna uyğun $P(\lambda)$ spektral funksiyası aşağıdakı kimi olar:

$$P(\lambda) = \begin{cases} 0 \quad \text{əgər } \lambda < \lambda_1 \text{ olarsa,} \\ P_1 \quad \text{əgər } \lambda_1 \le \lambda < \lambda_2 \text{ olarsa,} \\ P_1 + P_2 \quad \text{əgər } \lambda_2 \le \lambda < \lambda_3 \text{ olarsa,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 + P_2 + \ldots + P_{k-1} \quad \text{əgər } \lambda_{k-1} \le \lambda < \lambda_k \text{ olarsa,} \\ I \quad \text{əgər } \lambda \ge \lambda_k \text{ olarsa.} \end{cases}$$

Qurulmuş $P(\lambda)$ operator-funksiyasının yuxarıdakı 1)-4) xassələrini ödədiyini göstərmək olar. Bu halda (1) spektral ayrılışının hansı şəkildə olduğunu göstərək. Məlum

$$I = \sum_{i=1}^{k} P_k$$

bərabərliyini soldan A operatoruna vursaq, alarıq:

$$A = \sum_{i=1}^{k} AP_k$$

İstənilən $x \in H$ üçün $P_i x \in H_i$, deməli, $AP_i x = \lambda_i P_i x$, buradan $AP_i = \lambda_i P_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$. Nəticədə

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \,. \tag{2}$$

(2) bərabərliyi A operatorunun spektral ayrılışını göstərir.

21.7. Öz-özünə qoşma operatordan asılı funksiyalar

Yuxarıda biz X normalaşmış fəzasından Y normalaşmış fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatorlar çoxluğu $L(X,Y)$ fəzası ilə tanış olduq. Bu fəzada operatorların cəmi və operatorun ədədə hasili cəbri əməllərini, eləcə də operatorun norması anlayışını daxil etdik və onların bir sıra xassələrini öyrəndik. Bir çox tətbiqi məsələləri öyrənərkən $X=Y$ olduğu hala baxmaq xüsusi əhəmiyyətə malik olur. Bu halda $L(X)$ fəzasında, yəni X fəzasında təsir edən bütün xətti kəsilməz operatorlar fəzasında daha bir əməl operatorların hasili əməlini də daxil etmək mümkün olur. Xüsusi halda A operatorunun istənilən natural dərəcəsini, məsələn $A^2, A^3, \dots, A^k$ təyin edə bilərik. Analoji qayda ilə A operatorundan asılı çoxhədli və digər funksiyaları da təyin edə bilərik. Məsələn, $A \in L(X)$ üçün e^A operatorunu

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad \left(A^0 = I\right)$$

kimi sıra vasitəsilə təyin edək bilərik. İsbat etmək olar ki, $\left\|e^A\right\| \le e^{\|A\|}$ və $e^A \in L(X)$ doğrudur.

Yuxarıda öz-özünə qoşma operatorlar üçün aldığımız (1) spektral ayrılış formulundan istifadə etməklə operatorlar sırasından istifadə etmədən, həmin sıranın yığılmasını araşdırmadan belə A operatorundan asılı funksiyaları daxil etmək olar.

Tərif. Tutaq ki, $f(\lambda) - [a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. A operatorundan asılı $f(A)$ funksiyası dedikdə

$$f(A) = \int_{m-\varepsilon}^{M} f(\lambda) dP(\lambda) \tag{3}$$

ifadəsi başa düşülür. ($\varepsilon > 0$ ixtiyari kiçik ədəddir).

Xüsusi halda $A > 0$ üçün

$$I = \int_{m-\varepsilon}^{M} dP(\lambda), \ \sqrt{A} = \int_{m-\varepsilon}^{M} \sqrt{\lambda} dP(\lambda), \ A^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 dP(\lambda) \tag{4}$$

düsturları doğrudur.

Bu bərabərliklərdən istənilən $x \in H$ üçün

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = \left(A^2 x, x\right) = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 d\left(P(\lambda) x, x\right)$$

olduğunu alarıq.

Qeyd edək ki, yuxarıda göstərdiyimiz (1), (3), (4) spektral ayrılış düsturlarının korrekt olması üçün A operatoruna uyğun düzəlmiş $P(\lambda)$

spektral funksiyası yeganə olmalıdır. İsbat edilmişdir ki, həqiqi Hilbert fəzasında təyin edilmiş istənilən öz-özünə qoşma məhdud operatorun spektral funksiyası yeganədir.

21.8. Öz-özünə qoşma qeyri-məhdud operatorların spektral ayrılışı

Tutaq ki, A operatoru $\overline{D(A)} = H$ təyin oblastına malik qeyri-məhdud öz-özünə qoşma operatordur.

Tərif. İstənilən $\lambda \in (-\infty, \infty)$ ədədinə qarşı $P(\lambda)$ ortoqonal proyeksiya operatorunu qarşı qoyan $P(\lambda)$ operator-funksiyası aşağıdakı şərtləri ödədikdə ona A operatorunun spektral funksiyası deyilir:

1) $P(\lambda) \to 0 \quad \lambda \to -\infty$ olduqda,
   $P(\lambda) \to I \quad \lambda \to +\infty$ olduqda

(limitlər güclü mənada başa düşülür)

2) $P(\lambda)$ λ-dan asılı azalmayan funksiyadır, yəni $\lambda < \mu$ olduqda $P(\lambda) \le P(\mu)$;

3) $P(\lambda)$ sağdan kəsilməzdir (güclü yığılma mənada)

4) $BD(A) \subset D(A)$ şərtini ödəyən istənilən $B \in L(H)$ operatoru və istənilən $x \in D(A)$ üçün

$$BP(\lambda)x = P(\lambda)Bx$$

Onda istənilən $x \in D(A)$ və istənilən $y \in H$ üçün

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(P(\lambda)x, y) \qquad (1)$$

bərabərliyi doğrudur, (1)-in sağ tərəfi qeyri-məxsusi Stiltes inteqralıdır.

Qeyd 1. $x \in H$ elementinin A operatorunun təyin oblastına daxil olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(P(\lambda)x, x) < \infty$$

şərtinin ödənməsidir.

Qeyd 2. Əgər $x \in D(A)$ isə, onda

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP(\lambda)x$$

Bu halda sağ tərəfdəki qeyri-məxsusi inteqral, H fəzasında güclü mənada yığılmaya nəzərən $a \to -\infty,\ b \to \infty$ şərtində $\int_a^b \lambda dP(\lambda)x$ inteqralının limiti kimi təyin edilir.

Qeyd 3. Əgər $x \in D(A)$ isə, onda

$$\|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(P(x)x, x).$$

Tutaq ki, $f(\lambda)$ $(-\infty, \infty)$ intervalında təyin edilmiş kompleks qiymətli funksiyadır. Bəzi hallarda $f(A)$ qeyri-məhdud operatorunu aşağıdakı kimi təyin edə bilərik:

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(P(\lambda)x, y), \quad (y \in H) \tag{2}$$

Bu bərabərlikdə $y = f(A)x$ qəbul edərək, göstərmək olar ki, $f(A)$ operatorunun təyin oblastı $D(f(A))$ elə x elementlərindən ibarətdir ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(P(\lambda)x, x) < \infty$$

olsun.

İsbat olunmuşdur ki, əgər $f(\lambda)$ məhdud funksiya isə, onda $f(A)$ operatoru da məhduddur. Eləcədə əgər $f(\lambda)$ funksiyası yalnız həqiqi qiymətlər alırsa, $f(A)$– öz-özünə qoşma operatordur.

Öz-özünə qoşma operatordan asılı funksiya olaraq $R_\lambda(A)$ rezolventasına baxaq. Əgər λ_0 ədədi A operatorunun $\sigma(A)$ spektrinə daxil deyilsə, onda

$$R_{\lambda_0}(A)x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP(\lambda)x}{\lambda - \lambda_0}$$

bərabərliyi doğrudur. Əgər $Jm\lambda_0 \neq 0$ isə, onda $\lambda_0 \overline{\in} \sigma(A)$ və

$$\left\| R_{\lambda_0}(A) \right\| \leq \frac{1}{|Jm\lambda_0|}.$$

21.9. Xətti operatorun məxsusi ədədlərinin və məxsusi vektorlarının tapılmasına aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. Tutaq ki, $E-$ kompleks normalaşmış fəzadır və $A \in L(E)$. İsbat edin ki, əgər A^2 operatorunun məxsusi vektoru varsa, onda A operatorunun da məxsusi ədədi vardır.

Həlli. Tutaq ki, $\lambda \in C-$ A^2 operatorunun məxsusi ədədi $x \in E$ isə– uyğun məxsusi vektorudur. Bu halda $A^2x = \lambda x$ bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərliyi $\left(A - \sqrt{\lambda}E\right)\left(A + \sqrt{\lambda}E\right)x = 0$ kimi göstərmək olar. Əgər $\left(A + \sqrt{\lambda}E\right)x = 0$ isə, onda $Ax = -\sqrt{\lambda}x$ və bu halda $x - A$operatorunun $-\sqrt{\lambda}$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektoru olar. Əgər $y = \left(A + \sqrt{\lambda}E\right)x \neq 0$ isə, bu halda $\left(A - \sqrt{\lambda}E\right)y = 0$ və y vektoru A operatorunun $\sqrt{\lambda}$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektoru olar.

2. Həqiqi $C[-\pi,\pi]$ fəzasında a) $(Ax)(t) = x(-t)$; b) $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$ operatorunun məxsusi ədədlərini və məxsusi vektorlarını tapın.

Həlli. a) A operatorunun məxsusi ədədləri elə λ həqiqi ədədləridir ki, $Ax = \lambda x$, yəni $x(-t) = \lambda x(t)$ tənliyinin $C[-\pi,\pi]$ fəzasında sıfırdan fərqli həlli olsun. Aydındır ki, $\lambda = 1$ olduqda bütün cüt funksiyalar, $\lambda = -1$ olduqda isə bütün tək funksiyalar baxılan tənliyin həlləridir. Göstərək ki, A operatorunun $\lambda = \pm 1$-dən başqa heç bir məxsusi ədədi yoxdur.

Tutaq ki, $\lambda \neq \pm 1$ ədədi A operatorunun məxsusi ədədi $x_0 = x_0(t)$ isə– bu məxsusi ədədə uyğun məxsusi vektorudur. $x_0 \neq 0$. Onda istənilən $t \in [-\pi,\pi]$ üçün $x_0(-t) = \lambda_0 x_0(t)$ ödənilər. Bu bərabərlikdə t-ni $(-t)$ ilə əvəz etsək, alarıq:

$$x_0(t) = \lambda_0 x_0(-t)$$

Buradan istənilən $t \in [-\pi,\pi]$ üçün $x_0(t) = \lambda_0^2 x_0(t)$.

Amma bu bərabərlik mümkün deyildir, çünki $\lambda_0^2 \neq 1$ və $x_0 \neq 0$. Deməli, A operatorunun yalnız $\lambda = +1$ və $\lambda = -1$ məxsusi ədədləri vardır. Uyğun məxsusi vektorları isə yuxarıda qeyd olunmuş funksiyalardan ibarətdir.

b) Elə λ həqiqi ədədlərini tapmaq lazımdır ki,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds = \lambda x(t), \ -\pi \leq t \leq \pi$$

tənliyinin $C[-\pi,\pi]$ fəzasında sıfırdan fərqli həlli vardır. Bu məqsədlə əvvəlcə $\sin(t+s)=\sin t\cos s+\cos t\sin s$ şəklində göstərək. Onda tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$\lambda x(t)=\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds+\cos t\int_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds\,,\ -\pi\le t\le\pi \qquad (1)$$

(1) bərabərliyindən görünür ki, verilmiş λ üçün tənliyin həllini

$$x(t)=\alpha\sin t+\beta\cos t$$

şəklində axtarmaq lazımdır. Bu ifadəni (1) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\alpha\lambda\sin t+\beta\lambda\cos t=\beta\pi\sin t+\alpha\pi\cos t\,,\ -\pi\le t\le\pi\,,$$

$\sin t$ və $\cos t$ funksiyaları $[-\pi,\pi]$ parçasında xətti asılı olmadığından

$$\begin{cases}\alpha\lambda-\beta\pi=0,\\ \alpha\pi-\beta\lambda=0.\end{cases} \qquad (2)$$

$x(t)$ məxsusi funksiyası sıfırdan fərqli olduğundan α və ya β-dan heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olmalıdır. Ona görə də

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda & -\pi\\ \pi & -\lambda\end{vmatrix}=0\,,\ -\lambda^2+\pi^2=0\,,\ \lambda_1=\pi\,,\ \lambda_2=-\pi\,.$$

$\lambda_1=\pi$ olduqda (2) bərabərliklərindən $\alpha=\beta$ alırıq. Bu halda $\lambda_1=\pi$ məxsusi ədəd, $x(t)=\alpha(\sin t+\cos t)$, $\alpha\ne 0$ uyğun məxsusi funksiya olar. Analoji olaraq, $\lambda_2=-\pi$ məxsusi ədəd, $x(t)=\alpha(\sin t-\cos t)$, $\alpha\ne 0$ uyğun məxsusi funksiya olar.

Göstərək ki, $\lambda_3=0$ ədədi də A operatorunun məxsusi ədədidir.

Bunun üçün

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)x(s)ds=0$$

tənliyinin $C[-\pi,\pi]$ fəzasında sıfırdan fərqli həllinin olduğunu göstərmək lazımdır. Başqa sözlə, elə $x=x(t)\ne 0$ tapmaq lazımdır ki,

$$\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds+\cos t\int_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds=0\ \ (-\pi\le s\le\pi) \qquad (3)$$

olsun. $\sin t$ və $\cos t$ funksiyaları xətti asılı olmadığından

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds=0 \text{ və } \int_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds=0$$

alırıq. Bu onu göstərir ki, $\cos t$ və $\sin t$ funksiyalarına $L_2[-\pi,\pi]$ fəzasında ortoqonal olan bütün $x=x(t)$ kəsilməz funksiyaları məxsusi funksiyalardır. Məsələn $x(t)=\cos nt$, $n=0,2,3,...$, $x(t)=\sin t$, $n=2,3,...$ Beləliklə, alırıq ki,

$\lambda_3 = 0$ ədədi A operatorunun məxsusi ədədidir, ona uyğun məxsusi altfəza sonsuz ölçülüdür və $[-\pi, \pi]$ parçasında $\sin t$ və $\cos t$ funksiyalarına ortoqonal olan bütün kəsilməz funksiyalardan ibarətdir.

3. Tutaq ki, $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatoru

$$(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$$

bərabərliyi ilə təyin edilir. Bu operatorun məxsusi ədədlərini və məxsusi funksiyalarını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $A-$ xətti operatordur. Bundan başqa

$$\|Ax\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(0) + tx(1)| \le 2\|x\|, \ \forall x \in C[0,1]$$

bərabərsizliyindən alırıq ki, A məhdud operatordur, $\|A\| \le 2$ və kəsilməzdir. A-nın məxsusi ədədlərini tapmaq üçün λ-nın elə qiymətlərini tapmaq lazımdır ki,

$$x(0) + tx(1) = \lambda x(t), \ 0 \le t \le 1 \qquad (4)$$

tənliyinin $C[0,1]$ fəzasında $x(t) \ne 0$ həlli olsun.

(4) bərabərliyindən görünür ki, $\lambda \ne 0$ olduqda $x(t) = \alpha + \beta t$ şəklində olmalıdır. $x(t)$-nin bu ifadəsini tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$\alpha + (\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta t, \ 0 \le t \le 1$$

1 və t funksiyaları $[0,1]$ parçasında xətti asılı olmadığı üçün bu bərabərlikdən alarıq:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha = 0 \\ \alpha + (1-\lambda)\beta = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

α və β eyni zamanda sıfır olmadığı üçün buradan $\lambda = 1$ alırıq. Onda $\alpha = 0$ olar. Deməli, $\lambda = 1$ məxsusi ədəddir və $x(t) = \beta t$, $\beta \ne 0$ uyğun məxsusi funksiyadır.

Göstərək ki, $\lambda = 0$ ədədi də A operatorunun məxsusi ədədidir. Doğrudan da bu halda (4) tənliyi

$$x(0) + tx(1) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

kimi olar. Buradan $x(0) + x(1) = 0$ alırıq. Ona görə $t = 0$ və $t = 1$ nöqtələrində sıfra çevrilən bütün kəsilməz funksiyalar bu tənlyin trivial olmayan həlləri olar. Beləliklə, A operatorunun yalnız iki $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ məxsusi ədədlərinin olduğunu alırıq.

Göstərək ki, bu nöqtələrdən fərqli olan bütün nöqtələr A operatorunun requlyar nöqtələridir.

Tutaq ki, $\lambda \ne 0$, $\lambda \ne 1$ və $y = y(t) \in C[0,1]-$ istənilən funksiyadır.

$$(Ax)(t) - \lambda x(t) = y(t), \quad 0 \le t \le 1$$

yəni

$$x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = y(t), \quad 0 \le t \le 1 \qquad (6)$$

tənliyini həll edək. (6) tənliyində $t=0$, sonra $t=1$ yazmaqla alarıq:

$$x(0)=\frac{y(0)}{1-\lambda},\quad x(1)=\frac{y(1)}{1-\lambda}-\frac{y(0)}{(1-\lambda)^2}$$

Bunları (6) tənliyində nəzərə alsaq, $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ üçün

$$x(t)=-\frac{y(t)}{\lambda}+\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)}+\frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{ty(0)}{(1-\lambda)^2} \tag{7}$$

alarıq. Beləliklə, alırıq ki, $(A-\lambda E)$ operatorunun $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ olduqda qiymətlər çoxluğu bütün fəzadır və bu operatorun tərsi (7) düsturu vasitəsilə təyin edilir, yəni

$$\left((A-\lambda E)^{-1}y\right)(t)=-\frac{y(t)}{\lambda}+\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)}+$$
$$+\frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{ty(0)}{(1-\lambda)^2},\quad y(t)\in C[0,1].$$

4. Tutaq ki, $E-$ kompleks Banax fəzası, $A:E\to E$ isə xətti kəsilməz operatordur. İsbat edin ki, əgər λ kompleks ədədi üçün normallaşmış $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\|=1$, $\forall n\in N$ elementlər ardıcıllığı varsa ki, $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n-\lambda x_n)=0$ olsun, onda $\lambda\in\sigma(A)$. ($\sigma(A)-$ A operatorunun spektridir).

Həlli. Doğrudan da, əgər $\lambda\,\overline{\in}\,\sigma(A)$ olarsa, onda $\lambda\in\rho(A)$, yəni $\lambda-A$ operatorunun requlyar nöqtəsi olar. Bu halda $(A-\lambda E)$ operatorunun kəsilməz $(A-\lambda E)^{-1}:E\to E$ tərsi olar. Ona görə də

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(A-\lambda E)^{-1}(Ax_n-\lambda x_n)=0$$

olar. Bu isə $\forall n\in N$ üçün $\|x_n\|=1$ olması şərtinə ziddir. Deməli, $\lambda\in\sigma(A)$ olmalıdır.

5. $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(s)ds$, $A:C[0,1]\to C[0,1]$ operatorunun heç bir məxsusi ədədinin olmadığını göstərin.

Həlli. Tərifə əsasən A operatorunun məxsusi ədədləri λ-nın elə qiymətlərindən ibarətdir ki,

$$\int\limits_0^t x(s)ds=\lambda x(t),\ 0\le t\le 1$$

tənliyinin $C[0,1]$ fəzasında sıfırdan fərqli həlli olsun. Əgər $\lambda\neq 0$ olarsa, onda tənliyin sol tərəfi diferensiallanan olmalıdır. Tənliyin hər tərəfini t-yə görə diferensiallasaq, bu tənliyin $x(t)=\lambda x'(t)$, $x(0)=0$ Koşi məsələsinə ekvivalent olduğunu alarıq. Buradan $\forall t \in [0,1]$ üçün $x(t)=0$ alırıq. Ona görə də A operatorunun sıfırdan fərqli məxsusi ədədi yoxdur.

$\lambda = 0$ nöqtəsini yoxlayaq. $\lambda = 0$-ın məxsusi ədəd olması üçün $C[0,1]$-ə daxil olan elə $x(t) \neq 0$ olmalıdır ki,

$$\int_0^t x(t)dt = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

şərti ödənilsin. Bu bərabərliyi diferensiallasaq, $x(t)=0$, $t \in [0,1]$ alarıq. Deməli, $\lambda = 0$ da məxsusi ədəd deyil. Beləliklə, alırıq ki, A operatorunun heç bir məxsusi ədədi yoxdur.

6. Tutaq ki, $H = L_2[0,1]$– kompleks Hilbert fəzasında $(Ax)(t) = ix'(t)$ operatoru təyin edilmişdir, belə ki, $D(A) \subset L_2[0,1]$ təyin oblastı $[0,1]$ parçasında mütləq kəsilməz olan $x = x(t)$ funksiyalarından ibarətdir ki, $x'(t) \in L_2[0,1]$ olsun və $x(0) = x(1)$ şərti ödənilsin. A operatorunun məxsusi ədədlərini tapın.

Həlli. λ ədədinin elə qiymətlərini tapmaq lazımdır ki, $Ax = \lambda x$, yəni $ix'(t) = \lambda x(t)$, $0 \le t \le 1$ tənliyinin sıfırdan fərqli $x = x(t) \in D(A)$ həlli olsun. Bu tənliyi həll edərək $x(t) = Ce^{-i\lambda t}$, $0 \le t \le 1$ alarıq, burada C– hər hansı sabitdir. $x(0) = x(1)$ şərtindən istifadə etsək, $e^{-i\lambda} = 1$ bərabərliyini alarıq. Buradan $\lambda = -2\pi n$, $n \in z$ olar.

Deməli, A operatorunun məxsusi ədədləri $\lambda_n = -2\pi n$, $n \in z$, uyğun məxsusi funksiyaları isə $e_n(t) = e^{2\pi nti}$, $0 \le t \le 1$ funksiyalarıdır. Alınmış bu sistem $L_2[0,1]$ fəzasında tam ortonormal funksiyalar sistemidir.

Göstərək ki, $\lambda \neq \lambda_n$ olan bütün qiymətlər A operatorunun requlyar nöqtələridir.

Bunun üçün əvvəlcə $Ax - \lambda x = y$ tənliyinin ümumi həllini yazaq. Asanlıqla yoxlaya bilərik ki, bu tənliyin ümumi həlli

$$x(t) = e^{-i\lambda t}\left(C - i\int_0^t y(\tau)e^{i\lambda\tau}d\tau\right), \; 0 \le t \le 1 \tag{8}$$

C sabitini elə seçmək lazımdır ki, $x(0) = x(1)$ şərti ödənilsin. Yoxlamaq olar ki, $\lambda \neq \lambda_n$ olduqda $x(0) = x(1)$ şərtindən alınır ki, C sabitini yeganə üsulla tapmaq olar. Ona görə də $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in z$ üçün $(A - \lambda E)^{-1}$ operatoru bütün $L_2[0,1]$ fəzasını özünə inikas etdirir. Ümumi həllin (8) şəklindən almaq olar ki, $(A - \lambda E)^{-1}$ kəsilməz operatordur. Doğrudan da, $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in L_2[0,1]$ ardıcıllığı bu fəzada $y(t)$ funksiyasına yığılarsa, onda skalyar hasilin kəsilməzliyinə görə yaza bilərik:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-i\lambda t}\left[C - i\int_0^t y_n(\tau)e^{i\lambda t}d\tau\right] =$$

$$= e^{-i\lambda t}\left[C - i\int_0^t y(\tau)e^{i\lambda t}d\tau\right] = xt\ ,\ \forall t \in [0,1].$$

$$\left|\int_0^t y_n(\tau)e^{i\lambda t}d\tau\right| \le \left(\int_0^t |y_n(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \|y_n\|,\ \forall n \in N$$

münasibətindən alınır ki, $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı $[0,1]$ parçasında məhdud ardıcıllıqdır. Ona görə də

$$x_n(t) = \left[(A-\lambda E)^{-1} y_n\right](t),\ \ \forall n \in N$$

ardıcıllığı orta kvadratik mənada

$$x(t) = \left((A-\lambda E)^{-1} y\right)(t)$$

funksiyasına yığılır. Ona görə də $(A-\lambda E)^{-1}$ operatoru $\lambda \ne \lambda_n,\ \ n \in Z$ qiymətlərində kəsilməz operatordur. Beləliklə, alırıq ki, A operatorunun spektri yalnız $\lambda_n = -2\pi n,\ n \in z$ məxsusi ədədlərindən ibarətdir.

7. $C[-\pi,\pi]$ fəzasında təsir edən

$$(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$$

operatorunun məxsusi ədədlərini və məxsusi funksiyalarını tapın.

Həlli. Tərifə görə λ-nın elə qiymətlərini tapmaq lazımdır ki, $Ax = \lambda x$ tənliyinin sıfırdan fərqli həlli olsun.

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

düsturunu nəzərə alsaq,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds = \lambda x(t)$$

tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\lambda x(t) = \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s x(s)ds - \sin t \int_{-\pi}^{\pi} \sin s ds \qquad (9)$$

(9) bərabərliyindən görünür ki, verilmiş λ üçün tənliyin həllini

$$x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

kimi axtarmaq lazımdır. Bu ifadəni (9) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\alpha\lambda \cos t + \beta\lambda \sin t = \alpha\pi \cos t - \beta\pi \sin t$$

$\cos t$ və $\sin t$ funksiyaları $[-\pi,\pi]$ parçasında xətti asılı olmadığı üçün

$$\begin{cases}\alpha\lambda=\alpha\pi \\ \beta\lambda=-\beta\pi\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha(\lambda-\pi)=0 \\ \beta(\lambda+\pi)=0\end{cases}$$

olar. $x(t)$ məxsusi funksiya olduğundan α və β eyni zamanda sıfır ola bilməzlər. Aşağıdakı hallara baxaq:

a) $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ olduqda, $\lambda_1=\pi$ olar, bu halda $\lambda_1=\pi$ məxsusi ədəd, $x(t)=\cos t$ məxsusi funksiya olar.

b) $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ olduqda $\lambda_2=-\pi$ məxsusi ədəd, $x(t)=\sin t$ bu məxsusi ədədə uyğun məxsusi funksiya olar.

Göstərək ki, $\lambda_3=0$ ədədi də A operatorunun məxsusi ədədidir. Bu halda

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(s+t)x(s)ds=0$$

tənliyinin $C[0,1]$ fəzasında sıfırdan fərqli həllinin olduğunu göstərmək lazımdır. Başqa sözlə elə $x=x(t)\neq 0$ tapmaq lazımdır ki,

$$\cos\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds-\sin t\int_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds=0,\ (-\pi\leq s\leq\pi) \quad (10)$$

olsun. $\cos t$ və $\sin t$ funksiyaları xətti asılı olmadığı üçün

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds=0$$

alarıq.

Bu onu göstərir ki, $L_2[-\pi,\pi]$ fəzasında $\cos t$ və $\sin t$ funksiyalarına ortoqonal olan bütün $x=x(t)$ kəsilməz funksiyaları məxsusi funksiyalardır. Məsələn, $x(t)=\cos nt$, $x(t)=\sin nt$, $n=2,3,...$ Beləliklə, alırıq ki, $\lambda_3=0$ ədədi A operatorunun məxsusi ədədidir, ona uyğun məxsusi altfəza sonsuz ölçülüdür və $[-\pi,\pi]$ parçasında $\cos t$ və $\sin t$ funksiyalarına ortoqonal olan bütün kəsilməz funksiyalardan ibarətdir.

8. $C[0,\pi]$ fəzasında $Ax(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ operatorunun məxsusi ədədlərini və məxsusi funksiyalarını tapın. Burada

$$D(A)=\{x(t);\ x(t)\in C[0,\pi],$$
$$x''(t)\in C[0,\pi],\ \ x(0)=x(\pi)=0\}.$$

Həlli. λ -nın elə qiymətlərini tapmaq lazımdır ki,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\lambda x(t)$$

tənliyinin sıfırdan fərqli həlli olsun. Tənlik sabit əmsallı xətti tənlik olduğundan xarakteristik tənliyi yazaq:

$$S^2 - \lambda = 0.$$

Aşağıdakı hallara baxaq:

a) $\lambda > 0$, onda $S^2 = \lambda$, $S = \pm\sqrt{\lambda}$

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ x(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \neq 0$$

olduğundan $c_1 = c_2 = 0$ $x(t) = 0$ alırıq.

b) $\lambda = 0$. Bu halda $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$, $x(t) = c_1 t + c_2$

$$x(0) = 0,\ c_1 \cdot 0 + c_2 = 0,\ c_2 = 0$$

$$x(\pi) = c_1\pi = 0,\ c_1 = 0,\ x(t) = 0$$

alırıq.

v) $\lambda < 0$. Onda tənliyin həlli

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}t$$

olar. Sərhəd şərtlərindən $x(0) = c_1 = 0$ və

$$x(\pi) = c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0,\ \sqrt{\lambda}\pi = k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\lambda_k = -k^2$ alarıq. Deməli, bunlar məxsusi ədədlər, $x_k(t) = \sin kt$ isə uyğun məxsusi funksiyalardır.

9. Tutaq ki, $H -$ Hilbert fəzası və $A : H \to H -$ tamam kəsilməz operatordur. Onda elə ortonormal $\{f_n\}_{n=1}^N$ və $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ sistemləri və $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, $\lambda_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$ həqiqi ədədləri vardır ki,

$$Ax = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x, f_n)\varphi_n.$$

Qeyd edək ki, N sonlu ədəd və ya sonsuzluq olar bilər.

Həlli. A tamam kəsilməz operator olduğundan A^*A-da tamam kəsilməzdir. Bundan əlavə $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$, yəni $A^*A -$ öz-özünə qoşma operatordur. Onda Hilbert-Şmidt teoreminə görə A^*A operatorunun məxsusi vektorlarından ibarət elə tam ortonormal $\{f_n\}_{n=1}^N \cup \{f'_n\}_{n=1}^M$ sistemi vardır ki, $n=1,2,...,N$ üçün $A^*Af_n=\mu_n f_n$, $\mu_n\neq 0$ və $n=1,2,...,M$ üçün $A^*Af_n'=0$ olsun.

Qeyd edək ki, N və M ədədləri sonlu və ya sonsuz ola bilər.

$$(Ax,Ax)=\left(A^*Ax,x\right)\geq 0,$$

bərabərsizliyindən A^*A operatorun müsbət olması alınır. $A^*A>0$. Onda $n=1,2,...,N$ üçün $\mu_n>0$.

Tutaq ki, $\lambda_n=\sqrt{\mu_n}$, $\varphi_n=\dfrac{Af_n}{\lambda_n}$, $n=1,2,...,N$. Göstərək ki, $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ ortonormal sistemdir. Doğrudan da,

$$(\varphi_n,\varphi_m)=\frac{1}{\lambda_n\lambda_m}\left(A^*Af_n,f_m\right)=\frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_m}(f_n,f_m)=\delta_{n,m}$$

$\forall n,m=1,2,...,N$. Onda $\forall x\in H$ üçün alarıq:

$$Ax=A\left(\sum_{n=1}^{N}(x,f_n)f_n\right)+A\left(\sum_{n=1}^{N}(x,f_n')f_n'\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}(x,f_n)Af_n=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n(x,f_n)\varphi_n$$

Çünki $\|Af_n'\|^2=\left(A^*Af_n',f_n'\right)=0$.

Beləliklə,

$$Ax=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n(x,f_n)\varphi_n$$

alırıq.

10. $C[0,\pi]$ fəzasında $Ax(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ operatorunun məxsusi ədədlərini və məxsusi vektorlarını tapın. Burada

a) $D(A)=\{x(t);x(t)\in C[0,\pi];\ x''(t)\in C[0\pi],\ x'(0)=x'(\pi)=0\}$

b) $D(A)=\{x(t);x(t)\in C[0,\pi];\ x''(t)\in C[0\pi],$
$x'(0)=x'(\pi),\ x'(0)=x'(\pi)\}$

11. $A^2=0$ şərtini ödəyən xətti kəsilməz operatorun sıfırdan fərqli məxsusi ədədi ola bilərmi:

12. $C[0,2\pi]$ fəzasında $Ax(t)=e^{it}x(t)$ operatoru təyin edək. İsbat edin ki, $\sigma(A)=\{\lambda\in C;\ |\lambda|=1\}$.

13. Tutaq ki, e_n $(n\in N)$ H fəzasında ortonormal bazisidir. $A:H\to H$, $Ae_1=0$, $Ae_{k+1}=e_k$ $(k\in N)$ operatoru təyin edək. İsbat edin ki,

a) A xətti məhdud operatordur.

b) $\sigma(A)=\{\lambda \in C;\ |\lambda| \le 1\}$, belə ki, dairənin bütün daxili nöqtələri A operatorunun məxsusi nöqtələridir.

14. $A: l_2 \to l_2$,

$$Ax=(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...),\ x=(x_1, ..., x_n, ...)$$

operatoru təyin edək, belə ki, $\lambda_n \in C\ \ (n \in N)$ və $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$. $\sigma(A)$-nı tapın.

15. $C[0,1]$ fəzasında $Ax(t)=\dfrac{dx}{dt}$ operatoru təyin edək. İsbat edin ki,

a) $D(A)=\{x(t)\in C[0,1];\ x'(t)\in C[0,1],\ x(0)=0\}$ isə, onda $\sigma(A)$ boş çoxluqdur.

a) $D(A)=\{x(t)\in C[0,1];\ x'(t)\in C[0,1]\}$ isə, onda $\sigma(A)$ çoxluğu bütün kompleks müstəvini dolduran məxsusi ədədlərdən ibarətdir.

v) $D(A)=\{x(t)\in C[0,1];\ x'(t)\in C[0,1],\ x(0)=x(1)\}$ isə, onda $\sigma(A)$ çoxluğu $\lambda_n = 2\pi i n\ \ (n=0,\pm1,\pm2,...)$ məxsusi ədədlərindən ibarətdir.

16. Tutaq ki, $A \in L(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$. İsbat edin ki, istənilən n üçün $\lambda^n \in \sigma(A)$.

17. Tutaq ki, $A \in L(X)$ və A-nın kəsilməz tərsi vardır. İsbat edin ki, əgər $\lambda \in \sigma(A^{-1})$ isə, onda $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ və tərsinə $\mu \in \sigma(A)$ isə, onda $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

18. Tutaq ki, $H-$ Hilbert fəzasıdır və $A \in L(H)$. İsbat edin ki, A^*A və AA^* eyni sıfırdan fərqli məxsusi ədədlərə malikdirlər.

19. Tutaq ki, $H-$ Hilbert fəzası və $A \in L(H)$. İsbat edin ki, $\sigma(A^*)=\overline{\sigma(A)}$ (xətti kompleks qoşmanı göstərir).

20. $A: l_2 \to l_2$,

$$Ax=\left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right),\ x=(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

operatorunun tamam kəsilməz olduğunu göstərin və spektrini tapın.

21.

$$A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1],\ Ax(s)=\int_{-1}^{1} s^2 t x(t)dt$$

operatorunun tamam kəsilməz olduğunu göstərin və spektrini tapın.

22.

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Ax(s)=\int_0^1 st(1-st)x(t)dt$$

operatorunun tamam kəsilməz olduğunu göstərin və spektrini tapın.

23.

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds\,,$$

$$K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

operatorunun tamam kəsilməz öz-özünə qoşma operator olduğunu göstərin, məxsusi ədədlərini və məxsusi funksiyalarını tapın.

24. $C[0,\pi]$ fəzasında $Kx(t) = \int_0^\pi K(t,s)x(s)ds$, belə ki,

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^2}$$

operatorunun məxsusi ədədlərini və məxsusi funksiyalarını tapın.

XXII FƏSİL
SIXILMIŞ İNİKAS PRİNSİPİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

22.1. Sıxılmış inikas prinsipi

Bir çox cəbri tənliklərin, diferensial və inteqral tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərini öyrənərkən ardıcıl yaxınlaşma üsulundan istifadə olunması yaxşı məlumdur. Bu üsulun əsas əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, bu üsul verilmiş tənliyin həllinin varlığı məsələsini öyrənməklə bərabər, həmin həllin təqribi olaraq tapılmasına da imkan verir. Müxtəlif tip tənliklər üçün tətbiq edilən ardıcıl yaxınlaşma üsulu funksional analizdə sıxılmış inikas prinsipi adlanan vahid bir sxemə gətirilir və istifadə edilir. Funksional analizin bu mühüm prinsipi də görkəmli Polşa alimi Stefan Banax tərəfindən alınmışdır.

Fərz edək ki, R hər hansı metrik fəzadır. A isə bu fəzanı özünə inikas etdirən operatordur.

Tərif 1. Əgər elə $\alpha < 1$ ədədi varsa ki, istənilən $x, y \in R$ üçün

$$\rho(Ax, Ay) < \alpha\rho(x, y) \tag{1}$$

şərti ödənilsin, bu halda A operatoruna sıxılmış inikas, yaxud sıxan operator deyilir.

Bilavasitə tərifdən alınır ki, sıxan operator kəsilməzdir. Doğrudan da $x_n \to x_0$, $\rho(x_n, x_0) \to 0$ olduqda (1) şərtindən $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0$ alırıq, yəni $Ax_n \to Ax_0$.

Tərif 2. $Ax = x$ şərtini ödəyən x nöqtəsinə A operatorunun tərpənməz nöqtəsi deyilir. Başqa sözlə, tərpənməz nöqtə. $Ax = x$ tənlyinin həllidir.

Teorem (Sıxılmış inikas prinsipi). Tam metrik R fəzasında təyin edilmiş istənilən sıxan inikasın yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır.

İsbatı. Tutaq ki, $x_0 \in R$ ixtiyari nöqtədir. $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2 x_0$, $x_3 = Ax_2 = A^3 x_0, \ldots$ $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \ldots$ qəbul edək. Bu qayda ilə $\{x_n\}$ ardıcıllığı alırıq.

Göstərək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı fundamentaldır. $m \geq n$ üçün yaza bilərik:

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &= \rho\left(A^n x_0, A^m x_0\right) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\
&\leq \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right] \leq \\
&\leq \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \alpha\rho(x_0, x_1) + \ldots + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1)\right] \leq \\
&\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)\left[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1} + \ldots\right] \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

$\alpha < 1$ olduğu üçün n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində $\rho(x_n, x_m) \to 0$ alırıq, yəni $\{x_n\}$ fundamentaldır. R tam fəza olduğu üçün $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti vardır.

$x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ olsun. A operatorunun kəsilməzliyinə görə alarıq:

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

yəni $Ax = x$. Deməli, x A-nın tərpənməz nöqtəsidir.

Göstərək ki, tərpənməz nöqtə yeganədir.

Əgər A operatorunun iki müxtəlif x və y tərpənməz nöqtəsinin varlığını fərz etsək, $Ax = x$, $Ay = y$ olar. Onda (1) şərtinə görə

$$\rho(x,y) = \rho(Ax,Ay) \le \alpha\rho(x,y)$$

alarıq. Buradan $\alpha < 1$ olduğundan $\rho(x,y) = 0$, $x = y$ olar. Teorem isbat olundu.

22.2. Sıxılmış inikas prinsipinin cəbri tənliklərin həllinə tətbiqi

Tutaq ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş funksiya bu parçada Lipşits şərtini ödəyir, $[a,b]$ parçasını özünə inikas etdirir: və

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|$$

şərtini ödəyir. Burada $K < 1$. Ona görə də $f(x)$ sıxılmış inikasdır və isbat edilmiş teoremə görə $x_0, x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,... ardıcıllığı $x = f(x)$ tənliyinin yeganə kökünə yığılır. Xüsusi halda, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında $f'(x)$ törəməsi varsa və $|f'(x)| \le K < 1$ şərti ödənərsə, bu halda inikasın sıxan olmasını alarıq.

Tutaq ki, $F(x) = 0$ şəklində tənliyin həllinin varlığı məsələsini öyrənmək tələb edilir. Fərz edək ki, $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, $0 < K_1 \le F'(x) \le K_2$ şərtləri ödənir. Köməkçi $f(x) = x - \lambda F(x)$ funksiyası daxil edək. Bu halda $f(x) = x$ və $F(x) = 0$ tənlikləri eynigüclü tənliklər olar. $f'(x) - 1 = \lambda F'(x)$ olduğundan $1 - \lambda K_2 \le f'(x) \le 1 - \lambda K_1$. λ parametrini seçməklə tənliyi ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll etmək olar.

22.3. Sıxılmış inikas prinsipinin xətti tənliklər sisteminin həllinə tətbiqi

n ölçülü fəzanı özünə inikas etdirən və aşağıdakı qayda ilə təyin edilmiş A operatoru təyin edək:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1,2,..,n) \qquad (1)$$

Əgər A operatoru sıxan operator olarsa, onda $Ax = x$ tənliklər sisteminin yeganə həlli olar və bu həlli ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə tapa bilərik. Ona görə də A operatorunun sıxan olması şərtlərini tapmaq lazımdır. Bu şərtlər baxılan fəzada məsafənin hansı üsulla təyin edilməsindən asılıdır. Aşağıdakı hallara baxaq:

a) Fərz edək ki, məsafə $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ kimi təyin edilir. Onda alarıq:

$$\rho(y', y'') = \max_i |y_i' - y_i''| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \right| \le$$

$$\le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j' - x_j''| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_i |x_i' - x_i''| =$$

$$= \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(x', x'')$$

Əgər

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \ i = 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

olarsa, A operatoru sıxan operator olar.

b) Fərz edək ki, məsafə $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ kimi təyin olunur. Bu halda alırıq:

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j' - x_j''| \le \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(x', x'')$$

Əgər

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \le \alpha < 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

olarsa, A operatoru sıxan operator olar.

v) Əgər məsafə $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$ kimi təyin olunarsa, Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə edərək, alarıq:

$$\rho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right)^2 \right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(x', x'')$$

Əgər

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}<1 \qquad (4)$$

olarsa, onda A sıxan operator olar.

Beləliklə, alırırq ki, (2)-(4) şərtlərindən hər hansı biri ödənərsə, onda

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$$

tənliklər sisteminin yeganə həlli vardır və bu həlli ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə tapmaq olar.

Belə ki, həllə ardıcıl yaxınlaşmalar aşağıdakı kimi qurulur:

$$x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)$$
$$x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},...,x_n^{(1)}\right)$$
....
$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}\right)$$
....

burada

$$x_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}+b_i$$

$x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)$ olaraq R^n fəzasının istənilən nöqtəsi götürülə bilər.

(2)-(4) şərtlərindən heç biri ardıcıl yaxınlaşma üsulunun tətbiq edilməsi üçün zəruri deyildir.

Qeyd edək ki, əgər A operatoruna uyğun $\left\|a_{ij}\right\|$ matrisinin elementləri $\left|a_{ij}\right|<\dfrac{1}{n}$ şərtini ödəyərsə, bu halda (2)-(4) şərtləri ödənir və ardıcıl yaxınlaşma üsulu tətbiq edilə bilər. Əgər $\left|a_{ij}\right|\geq\dfrac{1}{n}$ olarsa, bu halda (2)-(4) şərtlərindən heç biri ödənmir.

22.4. Birinci tərtib diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi

Birinci tərtib adi diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1)$$

$$y(x_0)=y_0 \qquad (2)$$

Fərz edək ki, $f(x,y)$ funksiyası müstəvi üzərində (x_0,y_0) nöqtəsini öz daxilində saxlayan G oblastında kəsilməz funksiyadır və bu oblastda y dəyişəninə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le M|y_1-y_2|$$

Sıxılmış inikas prinsipini tətbiq etməklə isbat edəcəyik ki, hər hansı $|x-x_0|\le d$ parçasında (1) tənliyinin (2) başlanğıc şərtini ödəyən yeganə $y=\varphi(x)$ həlli vardır.

Məlumdur ki, (1)-(2) məsələsi aşağıdakı inteqral tənliyə ekvivalentdir

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \tag{3}$$

$f(x,y)$ funksiyasının müəyyən $G'\subset G$ oblastında kəsilməzliyinə əsasən $|f(x,y)|\le K$, $(x_0,y_0)\in G'$. d ədədini elə seçək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1) $(x,y)\in C'$, əgər $|x-x_0|\le d$, $|y-y_0|\le Kd$

2) $Md<1$

C^* ilə $|x-x_0|\le d$ parçasında təyin edilmiş, $|\varphi(x)-y_0|\le Kd$ şərtini ödəyən $\varphi(x)$ kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edək, belə ki, məsafə

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\max_x|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$$

kimi təyin edilir. C^* tam fəzadır və $[x_0-d,x_0+d]$ parçasında kəsilməz funksiyalardan ibarət fəzanın qapalı altfəzasıdır.

Bu fəzada $\psi=A\varphi$ operatoru təyin edək, belə ki,

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\varphi(t)]dt,$$

burada $|x-x_0|\le d$.

Bu operator C^* tam fəzasını özünə inikas etdirir və sıxılmış inikasdır. Doğrudan da, istənilən $\varphi\in C^*$, $|x-x_0|\le d$ üçün yaza bilərik:

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t,\varphi(t)]dt\right|\le Kd$$

Buradan $A(G^*)\subset C^*$. Buradan əlavə,

$$|\psi_1(x)-\psi_2(x)|\le\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))|dt\le$$

$$\le Md\max_x|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$$

$Md < 1$ olduğu üçün, A operatoru sıxan operatordur. Buradan alırıq ki, $\varphi = A\varphi$ tənliyinin C^* fəzasında yeganə həlli vardır.

22.5. Sıxılmış inikas prinsipinin inteqral tənliklərə tətbiqləri

a) Fredholm tənlikləri. İndi isə sıxılmış inikas prinsipinin ikinci növ qeyri-bircins Fredholm tipli inteqral tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsinə tətbiqini göstərək.

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x) \tag{1}$$

inteqral tənliyi ikinci növ qeyri-bircins Fredholm tənliyi adlanır. $K(x,y)$ inteqral tənliyin nüvəsi, $\varphi(x)$ sərbəst həddi, λ – kompleks parametr, $f(x)$ isə axtarılan funksiyadır.

Göstərəcəyik ki, sıxılmış inikas prinsipini yalnız λ parametrinin müəyyən kiçik qiymətlərində tətbiq etmək olar.

Fərz edək ki, $K(x,y)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ parçasında kəsilməz funksiyalardır. Onda $|K(x,y)| \le M$. $C[a,b]$ tam fəzasında təsir edən $g = Af$ operatoru təyin edək, belə ki,

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x).$$

Onda yaza bilərik:

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{x\in[a,b]} |g_1(x) - g_2(x)| \le$$
$$\le |\lambda| M (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|$$

Əgər $|\lambda| M(b-a) < 1$, yəni $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ şərti ödənərsə, onda A operatoru sıxan operator olar.

Bu halda sıxılmış inikas prinsipindən alırıq ki, λ parametrinin $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ şərtini ödəyən qiymətlərində Fredholm tənliyinin yeganə kəsilməz həlli vardır. Bu həllə $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ ardıcıl yaxınlaşmaları aşağıdakı şəkildədir:

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x)$$

Burada başlanğıc $f_0(x)$ funksiyası olaraq istənilən kəsilməz funksiya götürülə bilər.

b) Volterra tənlikləri. İndi isə ikinci növ qeyri-bircins Volterra tipli inteqral tənliklərə baxaq:

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy+\varphi(x) \qquad (2)$$

Göründüyü kimi burada Fredholm tənliyindən fərqli olaraq inteqralın yuxarı sərhəddi x dəyişənidir.

Əgər (2) tənliynin $K(x,y)$ nüvəsini $y>x$ qiymətləri üçün $K(x,y)=0$ kimi təyin etsək, bu halda (2) tənliyini Fredholm tənliyinə gətirə bilərik. Yuxarıda gördük ki, bu halda Fredholm tənliklərinin yalnız λ parametrinin kiçik qiymətlərində həllinin varlığını hökm edə bilərik.

Amma sıxılmış inikas prinsipinin aşağıda göstərilən ümumiləşməsindən istifadə etməklə, göstərmək olar ki, Volterra tənliyinin λ parametrinin istənilən qiymətində həlli vardır.

Teorem. Fərz edək ki, A kəsilməz operatoru tam R metrik fəzasını özünə inikas etdirir və onun hər hansı $B=A^n$ dərəcəsi sıxan operatordur. Onda A operatorunun yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır, yəni $Ax=x$ tənliyinin yeganə həlli vardır.

İsbatı. Tutaq ki, $x-B$ operatorunun tərpənməz nöqtəsidir, yəni $Bx=x$. Onda alarıq:

$$Ax=A(Bx)=AB^2x=...=AB^kx=B^kAx=B^kx_0\to x\,,$$

($k\to\infty$ üçün), çünki B sıxan operator olduğu üçün istənilən $x_0\in R$ nöqtəsi üçün $Bx_0,B^2x_0,...,B^kx_0,...$ ardıcıllığı x tərpənməz nöqtəsinə yığılır. Nəticədə $Ax=x$ alırıq.

Bu tərpənməz nöqtə yeganədir, çünki A operatorunun hər bir tərpənməz nöqtəsi eyni zamanda A^n operatorunu da tərpənməz nöqtəsidir. Teoremə görə isə $B=A^n$ operatorunun yalnız bir tərpənməz nöqtəsi ola bilər.

İndi göstərək ki,

$$Af=\lambda\int_0^x K(x,y)f(y)dy+\varphi(x)$$

operatorunun hər hansı dərəcəsi sıxan operatordur.

Tutaq ki, $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır. Onda

$$|Af_1(x)-Af_2(x)|=|\lambda|\left|\int_0^x K(x,y)(f_1(y)-f_2(y))dy\right|\le$$

$$\le|\lambda|M(x-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|$$

burada

$$M=\max_{x,y\in[a,b]}|K(x,y)|$$

Eyni qayda ilə alarıq:

$$\left|A^2 f_1(x)-A^2 f_2(x)\right|\le|\lambda|^2 M^2\frac{(x-a)^2}{2}\max|f_1(x)-f_2(x)|$$

Ümumiyyətlə, istənilən n natural ədədi üçün yaza bilərik:

$$\left|A^n f_1(x)-A^n f_2(x)\right|\le|\lambda|^n M^n\frac{(x-a)^n}{n!}m\le|\lambda|^n M^n\frac{(b-a)^n}{n!}m,$$

burada

$$m=\max_{x\in[a,b]}|f_1(x)-f_2(x)|$$

λ ədədinin istənilən qiymətində n ədədinin elə böyük seçə bilərik ki,

$$|\lambda|^n M^n\frac{(b-a)^n}{n!}<1$$

olar. Bu halda A^n operatoru sıxan operator olar. Ona görə də Volterra operatorunun yeganə tərpənməz nöqtəsi olar. Buradan isə Volterra tənliyinin λ-nı istənilən qiymətində yeganə həllinin olduğunu alırıq.

22.6. Sıxılmış inikas prinsipinin tətbiqlərinə aid məsələ həlli nümunələri və tapşırıqlar

1. $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ parçasında verilmiş $f(x)=x^2$ funksiyası ilə təyin olunan inikas sıxan inikasdırmı?

Həlli. Əvvəlcə qeyd edək ki, bu funksiya $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ parçasını öz daxilinə inikas etdirir. Göstərək ki, bu funksiya sıxan inikasdır. Tutaq ki, x_1 və x_2 verilmiş parçanın istənilən nöqtələridir.

$$\rho(f(x_1),f(x_2))=\left|x_1^2-x_2^2\right|=|x_1+x_2||x_1-x_2|\le$$

$$\le(|x_1|+|x_2|)\rho(x_1,x_2)\le\frac{2}{3}\rho(x_1,x_2)$$

$\alpha=\frac{2}{3}<1$ olduğundan inikas sıxandır.

2. Göstərin ki, $f(x)=4x-4x^2$ funksiyası $[0,1]$ parçasını özünə inikas etdirir. Bu funksiya vasitəsilə təyin olunan inikas sıxandırmı?

Həlli. $f(x)=4x(1-x)$ olduğundan $x\in[0,1]$ üçün $f(x)\geq 0$. Digər tərəfdən $f(x)-1=-(2x-1)^2\leq 0$ olmasından $f(x)\leq 1$ alınır. Deməli, $f(x)$ $[0,1]$ parçasını özünə keçirir.

$x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{2}$ nöqtələri götürək. $f(x_1)=0$, $f(x_2)=1$ olduğundan

$$\rho(f(x_1),f(x_2))=1>\frac{1}{2}=\rho(x_1,x_2)$$

Buradan baxılan funksiyanın sıxan inikas olmadığı görünür.

3. $[1,+\infty)$ yarımoxunda təyin edilmiş $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ funksiyası sıxan inikasdırmı?

Həlli.

$$\rho(f(x_1),f(x_2))=|f(x_1)-f(x_2)|=$$

$$=\left|(x_1-x_2)+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\right|=|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$$

$x_1x_2\geq 1$ olmasından

$$\rho(f(x_1),f(x_2))\leq\rho(x_1,x_2)$$

alınır. Buradan inikasın sıxan olması çıxmır. Çünki x_1x_2 hasili kifayət qədər böyük olduqda $1-\dfrac{1}{x_1x_2}$ ifadəsi vahidə kifayət qədər yaxın ədəd olur və $\alpha<1$ seçmək olmur $\left(\alpha=1-\dfrac{1}{x_1x_2}\right)$.

4. $f:(x,y)\to(u,\upsilon)$ belə ki,

$$\begin{cases}u=0{,}7x+0{,}8y\\ \upsilon=0{,}2x-0{,}05\end{cases}$$

inikası müstəvini özünə çevirir. Müstəviyə

a) R_2^2 b) R_1^2 fəzası kimi baxdıqda bu inikasın sıxan olub olmadığını yoxlayın.

Həlli. a) $M_1=(0,0)$, $M_2=(10,10)$ nöqtələri götürək.

$$N_1=f(M_1)=(0,0),\ N_2=f(M_2)=\left(15,\frac{3}{2}\right)$$

$$\rho(M,M_2)=\sqrt{200},\ \rho(N_1,N_2)=\sqrt{225+\frac{9}{4}}$$

Göründüyü kimi

$$\rho(f(M_1),f(M_2))>\rho(M_1,M_2)$$

Yəni R_2^2 fəzasında bu inikas sıxan deyildir.

b) $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ götürək. $N_1(u_1,\upsilon_1)$, $N_2(u_2,\upsilon_2)$ onların R_1^2 fəzasında obrazları olsun.

$$\rho(f(M_1), f(M_2)) = \rho(N_1,N_2) = |u_1-u_2| + |\upsilon_1-\upsilon_2| =$$
$$= |(0{,}7x_1+0{,}8y_1)-(0{,}7x_2+0{,}8y_2)| +$$
$$+ |(0{,}2x_1-0{,}05y_1)-(0{,}2x_2-0{,}05y_3)| =$$
$$= |0{,}7(x_1-x_2)+0{,}8(y_1-y_2)| +$$
$$+ |0{,}2(x_1-x_2)-0{,}05(y_1-y_2)| \le$$
$$\le 0{,}9|x_1-x_2| + 0{,}85|y_1-y_2| \le$$
$$\le 0{,}9(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|) = 0{,}9\rho(x_1,x_2)$$

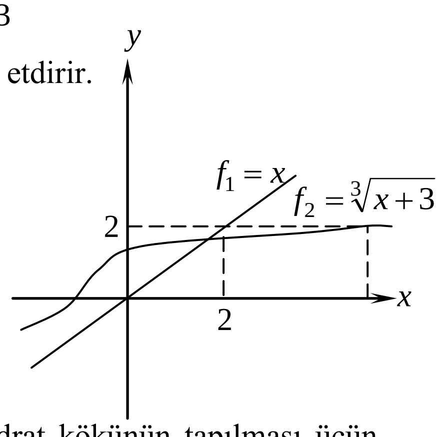
$\alpha = 0{,}9 < 1$ olduğu üçün inikas sıxan inikasdır.

5. Göstərin ki, $x=\sqrt[3]{x+2}$ tənliyini ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll etmək olar və onun kökünü 0,01 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli. $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$ götürək.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} < \frac{1}{3}$$

olduğu üçün funksiya $[0,2]$ parçasını özünə inikas etdirir.



$f_1(x)=x$, $f_2(x)=\sqrt[3]{x+2}$. Göründüyü kimi tənliyin kökü $[0,2]$ parçası daxilində yerləşir.

$x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt[3]{3} = 1{,}442$, $x_2 = \sqrt[3]{1{,}442} = 1{,}510$, $x_3 = \sqrt[3]{1{,}510} = 1{,}520$, $x_4 = 1{,}521$. Buradan $\bar{x} = 1{,}52$-nin 0,01 dəqiqliklə tənliyin həlli olmasını alırıq.

6. İsbat edin ki, müsbət a ədədinin kvadrat kökünün tapılması üçün başlanğıc yaxınlaşmanın istənilən $x_0 > \sqrt{a}$ qiymətində

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

düsturundan istifadə etmək olar.

Həlli.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

funksiyasını götürək. Bu funksiya $[\sqrt{a},+\infty)$ tam metrik fəzasını özünə çevirir.

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) = |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|\left|1 - \frac{a}{x_1 x_2}\right|$$

$x_1 \geq \sqrt{a}$, $x_2 \geq \sqrt{a}$ olduqda $0 < 1 - \dfrac{a}{x_1 x_2} < 1$. Ona görə də

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2)$$

$\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğu üçün bu funksiya ilə aparılan inikas sıxan inikasdır. Ona görə də Banax teoreminə görə $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ tənliyinin yeganə həlli vardır. $\bar{x} = \sqrt{a}$ tənliyinin həllidir.

7. İsbat edin ki, aşağıdakı şəkildə $\{x_n\}$ zənciri kəsrlər ardıcıllığı yığılandır və onun limitini tapın.

$$2, 2 + \frac{1}{2}, \ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}, \ldots$$

Həlli. Verilmiş ardıcıllığı rekkurent

$$x_1 = 2, \ x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

düsturu şəklində yazmaq olar. Onda

$$x_n = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_{n-2}}} \quad (n \geq 3)$$

münasibətindən alarıq:

$$x_1 \leq \frac{5}{2}, \ x_2 \leq \frac{5}{2}, \ldots, x_n \leq \frac{5}{2} \quad (\forall n \geq 1)$$

Eyni zamanda $x_n \geq 2 \ (n \geq 1)$.

$\left[2, \dfrac{5}{2}\right]$ parçasını özünə inikas etdirən $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ funksiyasını götürək:

$$\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}|x - y| = \frac{1}{4}\rho(x, y)$$

$\alpha = \dfrac{1}{4} < 1$ olduğu üçün bu funksiya sıxan inikasdır və onun yeganə tərpənməz x^* nöqtəsi vardır və bu nöqtə $x = 2 + \dfrac{1}{x}$ tənliynin həllidir. Buradan $x^* = 1 + \sqrt{2}$ alırıq.

8. İsbat edin ki, aşağıdakı rekkurent düsturlarla verilmiş ardıcıllıqlar yığılandır və onların limitlərini tapın.

a) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$ $(x_0 = 1)$; b) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}}$ $(x_0 = -5)$;

v) $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$ $(x_0 = 5)$.

9. Bütün ədəd oxunu özünə inikas etdirən $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - arctgx$ inikası sıxan inikasdırmı? Onun tərpənməz nöqtəsi varmı?

10. $f:(x,y) \to (u,\upsilon)$ belə ki,

$$\begin{cases} u = 0{,}2x + 0{,}4y + 7 \\ \upsilon = -0{,}3x - 0{,}6y - 15 \end{cases}$$

inikasına müstəvinin özünə inikası kimi baxıldıqda aşağıdakı metrik fəzalarda onun sıxılmış inikas olub-olmadığını göstərin.

a) R_2^2; b) R_1^2; v) R_∞^2.

11. $[3,+\infty)$ intervalını özünə inikas etdirən $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ sıxılmış inikasdırmı?

12. Ədəd oxunu özünə inikas etdirən $f(x) = \sin x$ sıxılmış inikasdırmı?

XXIII FƏSİL
OPERATORLAR QRUPU VƏ YARIMQRUPLARI

23.1. Operatorlar yarımqrupu, onların bəzi xassələri. Hille-İosida teoremi

Məlum olduğu kimi $t \geq 0$ həqiqi dəyişənindən asılı olan və $f(0) = 0,\ f(t+u) = f(t) \cdot f(u)$ funksional tənliyini ödəyən həqiqi və ya kompleks qiymətli nisbətən ən ümumi kəsilməz funksiya $f(t) = \exp(ta)$ şəklində üstlü funksiyadır. İndi tutaq ki, X hər hansı banax fəzasıdır və $\{T(t)\}$, $0 \leq t < \infty$ bu fəzada təyin olunmuş xətti məhdud operatorlar ailəsidir.
Tərif. Əgər $\{T(t)\}$ operatorlar ailəsi
1. İstənilən $t, s \in [0, \infty)$ üçün $T(t+s) = T(t) \cdot T(s)$,
2. $T(0) = I$, ($I - X$ fəzasında vahid operatordur),
3. İstənilən $x \in X$ üçün $T(t)x$ t dəyişəninə görə $[0, \infty)$ intervalında kəsilməzdir.

şərtlərini ödəyirsə, ona güclü kəsilməz operatorlar yarımqrupu deyilir.

Aşağıdakı qayda ilə təyin olunan A operatoruna $T(t)$ yarımqrupunun doğuran operatoru deyilir.

$$Ax = \lim_{\Delta \to 0} \frac{T(\Delta)x - x}{\Delta}. \tag{1}$$

A operatorunun təyin oblastı $D(A)$ elə $x \in X$ elementlərindən ibarətdir ki, həmin elementlər üçün (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limit olsun. Göstərmək olar ki, A xətti operatordur və $D(A)$ X fəzasında hər yerdə sıx çoxluqdur, yəni $\overline{D(A)} = X$.
Qeyd olunmuş $t > 0$ və istənilən $x \in X$ üçün aşağıdakı inteqrala baxaq:
$y = \int_0^t T(\tau)x d\tau$, (inteqral Riman mənada başa düşülür).
Bu qayda ilə təyin edilmiş y elementləri üçün (1) limitinin olduğunu göstərək.

$$T(\Delta)y - y = \int_0^t T(\Delta + \tau)x d\tau - \int_0^t T(\tau)x d\tau = \int_0^{t+\Delta} T(\tau)x d\tau - \int_0^t T(\tau)x d\tau =$$

$$= \int_0^{t+\Delta} T(\tau)x d\tau - \int_0^{\Delta} T(\tau)x d\tau = \int_0^{\Delta} T(t+\tau)x d\tau - \int_0^{\Delta} T(\tau)x d\tau$$

olduğundan

$$T(\Delta)y - y = \int_0^{\Delta} [T(t+\tau) - T(\tau)]x d\tau. \tag{2}$$

Digər tərəfdən istənilən $x \in X$ üçün alarıq:

$$\left\| \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta [T(\tau)x-x]d\tau \right\| \le \sup_{0\le\tau\le\Delta} \|T(\tau)x-x\| \cdot \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta d\tau = \sup_{0\le\tau\le\Delta} \|T(\tau)x-x\|$$

$T(t)$ yarımqrupunun sıfır nöqtəsində kəsilməzliyini nəzərə alaraq bu bərabərsizliyin hər tərəfində $\Delta \to 0$ şərtində limitə keçsək

$$\lim_{\Delta\to 0} \left\| \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta [T(\tau)x-x]d\tau \right\| = 0.$$

olduğunu alarıq.
(2) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δ -ya bölüb $\Delta \to 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{T(\Delta)y-y}{\Delta} = T(t)x-x$$

Beləliklə, y şəklində elementlər üçün $\frac{T(t)x-x}{t}$ nisbətinin limiti vardır, yəni $y \in D(A)$. Beləliklə, $\frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)xd\tau$ şəklində elementlər də $D(A)$ çoxluğuna daxildir. Digər tərəfdən

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)xd\tau = x$$

olduğundan istənilən $x \in X$ elementini bu qayda ilə təyin olunan elementlərin limiti kimi göstərmək olar. Bu isə $D(A)$ çoxluğunun X -da sıx olması deməkdir. (1) bərabərliyindən görünür ki, istənilən $t \ge 0$ üçün

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{T(t+\Delta)x-T(t)x}{\Delta} = A\cdot T(t)x = T(t)Ax .$$

Başqa sözlə,

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax .$$

Buradan alırıq ki,

$$\frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^n T(t)x .$$

Bu bərabərlik yarımqrupun $D(A)$ çoxluğunda istənilən tərtibdən diferensiallanan olduğunu göstərir. Təbii olaraq hansı A operatorlarının nə zaman kəsilməz yarımqrup əmələ gətirməsi sualı ortaya çıxır.

Teorem 1. Tutaq ki, A X Banax fəzasında təsir edən xətti məhdud operatordur. Onda

$$T(t)=e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!},\quad t\in(0,\infty)$$

operatorlar ailəsi güclü kəsilməz yarımqrup təşkil edir və $t\to 0$ şərtində

$$\|T(t)-I\|\to 0, \tag{3}$$

və A, $T(t)$ yarımqrupunun doğuran operatorudur. Əksinə, əgər $T(t)$ güclü kəsilməz yarımqrupdursa və (3) şərti ödənirsə, onda onun doğuran operatoru A X fəzasında xətti məhdud opeartordur və $T(t)=e^{tA}$.

İsbatı. Müsbət N və M ədədləri üçün

$$\left\|\sum_{n=N}^{N+M}\frac{(tA)^n}{n!}\right\|\le\sum_{n=N}^{N+M}\frac{t^n\|A\|^n}{n!}$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$ sırası müntəzəm operator topologiyasına görə $T(t)=e^{tA}$ operatoruna yığılır. Qüvvət sıraları üçün doğru olan

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^n}{m!}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x+y)^p}{p!}$$

bərabərliyindən yarımqrupun 1-ci xassəsinin doğru olduğunu alırıq.

Aydındır ki, $T(0)=I$.

$$\|T(t)-I\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!}\right\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!}=e^{t\|A\|}-1$$

bərabərsizliyində $t\to 0$ şərtində limitə keçsək

$$\|T(t)-I\|\to 0$$

alarıq.

Analoji üsulla $t\to 0$ şərtində

$$\|T(t)-A\|\le\left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^n}{n!}\right\|\le t^2\|A\|^2e^{t\|A\|}\to 0$$

olduğunu alırıq. Bu isə A-nın $T(t)$ yarımqrupunun törədici operatoru olduğunu göstərir.

Əksini göstərmək üçün $x\in X$, $t>0$ üçün

$$B(t)x = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$$

işarə edək.

(3) bərabərliiyindən çıxır ki, $t \to 0$ şərtində

$$\|B(t)x - x\| = \left\| \frac{1}{t}\int_0^{\Delta} [T(s) - I]xds \right\| \le \frac{1}{t}\int_0^t \|T(s) - I\| ds \cdot \| x \| \to 0,$$

Xüsusi halda, $\|B(t) - I\| < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \delta$ olduqda

$$B(t) = I + [B(t) - I]$$

bərabərliyindən

$$B^{-1}(t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n [B(t) - I]^n$$

olduğunu və $B^{-1}(t)$-nin məhdudluğunu alırıq.

Tutaq ki, A $T(t)$ yarımqrupunun törədici operatorudur. $Y = D(A)$ işarə edək. (Bu çoxluqda $\|x\|_Y = \|Ax\| + \|x\|, \quad x \in D(A)$ norması təyin edilmişdir. $B(t)$ operatorları X -dən Y -ə kəsilməz təsir edən operatorlardır. A məhdud operator olduğundan $A \cdot B(t)$ də ($0 < t < \delta$) X -dən Y -ə kəsilməz təsir edən operatorlar olar. Onda istənilən $x \in X$ üçün

$$\|Ax\| = \|AB(t)\, B^{-1}(t)x\| \le \|AB(t)\| \cdot \|B^{-1}(t)\| \cdot \|x\|$$

alırıq. Bu isə A-nın məhdud operator olduğunu göstərir.

Teorem 2. (Hille-İosida). A operatorunun sıxan və güclü kəsilməz yarımqrupun doğuran operatoru olması üçün zəruri və kafi şərt A-nın hər yerdə sıx çoxluqda təyin olunmuş qapalı operator olması və istənilən $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ üçün $\left\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\right\| \le 1$ olmasıdır.

İsbatı. (zərurilik). $x \in D(A)$ götürək. Onda

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h \to +0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} \cdot x = T(t)\lim_{h \to +0} \frac{T(h) - I}{h} x = T(h)Ax$$

Ona görə də $T(t)[D(A)] \subset D(A)$ və

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad x \in D(A).$$

Beləliklə, $t > 0$ olduqda $\overline{D(A)} = X$.

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = \lim_{h\to+0}\frac{T(t)-T(t-h)}{h}x = \lim_{h\to+0}T(t-h)\frac{[T(h)-I]}{h}x = T(t)Ax = ATx.$$

Deməli $x \in D(A)$ olduqda $T(t)x \in C^1(R_+,\ X)$ və

$$T(t)x - x = \int_0^t \frac{d}{dt}T(s)ds = \int_0^t AT(s)xds = \int_0^t AT(s)xds = \int_0^t T(s)Axds \tag{4}$$

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds, \quad x \in X. \tag{5}$$

Göstərək ki, A qapalı məhdud operatordur.
Tutaq ki, $x_n \in D(A),\ x_{n\to x}$ və $Ax_n \to y,\ n\to\infty$.
Onda (4) bərabərliyinə görə

$$\frac{T(t)-I}{t}x_n = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax_n ds$$

olar. Əgər bu bərabərlikdə $n\to\infty$ olmaqla limitə keçsək

$$\frac{T(t)-I}{t}x = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds$$

alarıq. Alınmış bu bərabərlikdə $t\to\infty$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$Ax = \lim_{t\to+0}\frac{T(t)-I}{t}x = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = y.$$

Başqa sözlə, $x \in D(A)$, və $y = Ax.$ Yəni, A qapalı operatordur.

Qeyd edək ki, $\lambda > 0$ üçün $e^{-\lambda t}T(t)$ törədici operatoru $A-\lambda I$ olan sıxan və C_0 sinfinə daxil olan yarımqrupdur.

(5) bərabərliyini nəzərə alsaq

$$-e^{-\lambda t}T(t)x + x = (\lambda - A)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds, \quad x \in X$$

$$-e^{-\lambda t}T(t)x + x = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(\lambda - A)xds, \quad x \in D(A).$$

$t\to\infty$ şərtində limitə keçsək və A-nın qapalı olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \in D(A) \qquad \text{və}$$

$$x = (\lambda I - A)\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds, \quad x \in X,$$

$$x=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,T(s)(\lambda I-A)xds,\quad x\in D(A).$$

Beləliklə, $\lambda\in\rho(A)$ və

$$(\lambda I-A)^{-1}y=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,T(s)yds,\quad y\in X,\quad \lambda>0 \qquad (6)$$

Buradan

$$\left\|(\lambda I-A)^{-1}y\right\|\le\int_0^\infty e^{-\lambda s}\left\|T(s)\right\|\left\|y\right\|ds\le\frac{\|y\|}{\lambda},$$

$y\in X$ və $\lambda>0$ üçün teoremin zəruriliyi isbat edildi.

Kafilik. Əvvəlcə qeyd edək ki, əgər C və D sıxan və C_0 sinfinə daxil olan $U(t)$ və $V(t)$ yarımqrupları əmələ gətirisə, belə ki, $U(t)V(s)=V(s)U(t)$, $s,t\in R_+$, onda

$$\left\|U(t)x-V(t)x\right\|\le t\left\|Cx-Dx\right\| . \qquad (7)$$

$$A_\lambda=\lambda A(\lambda I-A)^{-1}=\lambda^2(I\lambda-A)^{-1}=\lambda^2(I\lambda-A)^{-1}-\lambda I$$

işarə edək.

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\|=e^{-\lambda t}\left\|\exp\left(t\lambda^2(\lambda I-A)^{-1}\right)\right\|=$$
$$=e^{-\lambda t}\exp\left(t\lambda^2\left\|(\lambda I-A)^{-1}\right\|\right)\le 1,\ t\ge 0,\ \lambda\ge 0$$

bərabərsizliyindən alırıq ki, e^{tA_λ} yarımqrupu güclü kəsilməz sıxan yarımqrupdur. İstənilən $x\in D(A)$ üçün

$$\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda x=Ax$$

olduğunu göstərək.
Əgər $g\in D(A)$ olarsa,

$$\lambda(\lambda I-A)g-(\lambda I-A)Ag=g,$$

$$(\lambda I-A)^{-1}Ag\to 0,\quad \lambda\to\infty.$$

Onda $\lambda\to\infty$ şərtində $\lambda(\lambda I-A)^{-1`}g\to g$. $D(A)=X$ olduğu üçün olar $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda A-I)^{-1}g=g$. Buradan

$$A_\lambda x = \lambda(\lambda I - A)^{-1} Ax \to Ax, \quad \lambda \to \infty.$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax.$$
Əgər (7) bərabərsizliyində $C = A_\lambda$, $D = A_\mu$ götürsək,
$$\left\| e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu} \right\| \le t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \to 0, \quad \lambda, \mu \leftarrow \infty.$$
İstənilən $x \in D(A)$ və qeyd olunmuş t üçün
$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x, \quad x \in D(A)$$
kimi təyin edək. Göstərmək olar ki, $\|T(t)\| \le 1$. Eyni zamanda $T(s)\cdot T(t) = T(s+t)$ və $T(0) = I$ şərtləri ödənir. $x \in D(A)$olduqda
$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x - x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Axds \tag{8}$$
olduğundan $T(\cdot)x$ istənilən $x \in D(A)$ R_+ oblastında kəsilməzdir. Beləliklə, $T(t)$ C_0 sinfinə daxil olan sıxan yarımqrup olur. *B* ilə bu yarımqrupun doğuran operatorunu işarə edək. (8) bərabərliyindən alınır ki, $D(A) \subset D(B)$ və istənilən $x \in D(A)$ üçün $Bx = Ax$, yəni $A \subset B$.

Teoremin birinci hissəsinə görə $1 \in \rho(B)$, ona görə də $1 \in \rho(A)$. Buradan alınır ki, $(I-B)^{-1} = (I-A)^{-1}$. Digər tərəfdən, $(I-A)^{-1} \subset (I-B)^{-1}$ və hər iki operator *X*-da məhdud olduğundan *A*=*B* alırıq.

Teorem 3. Hər bir yarımqrup öz doğuran operatoru vasitəsilə birqiymətli təyin olunur.

İsbatı. Tutaq ki, *T* və *S* C_0 sinfinə daxil olan və eyni doğuran *A* operatora malik olan yarımqruplardır. İstənilən $x \in D(A)$ və $t > 0$ üçün
$$u(s) = T(s)S(t-s)x$$
təyin edək. Onda
$$\frac{dU(s)}{ds} = T(s)(-A)S(t-s)x + (T(s)A)S(t-s)x = 0$$
Deməli, $u(s)$ funksiyası [0,1] parçasında sabitdir. Ona görə də,
$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x$$
Bu bərabərlik istənilən $x \in D(A)$ və $t > 0$ üçün doğru olduğundan *T*=*S* alırıq.

Tutaq ki, *X*=*H* Hilbert fəzasıdır. Əgər istənilən $x \in D(A)$ üçün $\mathrm{Re}(Ax, x) \le 0$ şərti ödənilərsə, onda *A* dissipativ operator adlanır.

Teorem 4. Tutaq ki, *A H* Hilbert fəzasında təsir edən xətti operatordur və aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1. $\overline{D(A)} = X$,
2. $(0,\infty) \cap \rho(A) \neq 0$
3. A dissipativ operatordur.

Onda A operatoru sinfinə güclü kəsilməz yarımqrup əmələ gətirir.

23.2. Eksponensial funksiya və operatorlar qrupu.

Fərz edək ki, A operatoru E Banax fəzasında təsir edən məhdud operatordur. Onda tərifə görə istənilən $x \in (-\infty, \infty)$ üçün

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^n}{n!}A^n + ... \tag{1}$$

sırasının köməyi ilə eksponensial funksiya təyin edə bilərik. Bu funksiya normaya görə t dəyişəninə görə kəsilməz funksiyadır və $e^{tA}, e^{sA} = e^{(t+s)A}$ bərabərliyini ödəyir.

Tutaq ki, $u(t)$ t dəyişəninə nəzərən kəsilməz operatorlar ailəsidir və $u(t+s) = u(t) \cdot u(s)$ şərtini ödəyir. Bu halda elə məhdud A operatoru vardır ki, $u(t) = e^{tA}$. $u(0) = I$ ($I-$ E Banax fəzasında vahid operatordur) olduğundan $u(t)$ -nin spektri 1 ədədinin ətrafında yerləşir və onun üçün $\ln u(t)$ operatoru təyin etmək olar. $A = \frac{\ln u(t)}{t}$ işarə edək.

Asanlıqla görmək olar ki, $u(t)$ operatorunu $\frac{du}{dt} = Au(t)$ diferensial tənliyinin həlli kimi də təyin etmək olar. A operatoru yarımqrupun doğuran operatorudur və

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{(u(h) - I)x}{h}$$

kimi təyin edilir.

$$u(t)x = x + tAx + \frac{t^2}{2!}A^2x + ... + \frac{t^n}{n!}A^n x + ...$$

Qeyd edək ki, doğuran operator aşağıdakı teorem vasitəsilə tam təsvir edilir.

Teorem 1. A operatorunun birparametrli kəsilməz operatorlar qrupunu doğuran operator olması üçün zəruri və kafi şərt onun təyin oblastının hər yerdə sıx olması və spektrinin $|\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \omega$ zolağında yerləşməsi və onun $R(\lambda)$ rezolventasının $|\lambda| > \omega$ olduqda $\|R_\lambda(A)\| \leq M(|\lambda| - \omega)^{-m}$, $M > 0$ şərtini ödəməsidir.

İsbat olunmuşdur ki, bu halda

$$u(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} R_\lambda(A)dx \qquad (2)$$

şəklində təyin edilir və $\|u(t)\| \le Me^{\omega t}$ şərti ödənilir. Əgər $\omega < 0$ olarsa, $\|u(t)\| \le 1$, yəni yarımqrup sıxan yarımqrup olur. Bu halda $\|R(\lambda)\| \le \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ şərti ödənilir.

Qeyd edək ki, doğuran operatora görə təyin edilmiş yarımqrupla əlaqəni göstərən (2) bərabərliyindən başqa aşağıda göstərilən münasibətlər də doğrudur:

1. $u(t)x = \lim_{h\to 0} e^{tA_h}$, burada $A_h = \frac{1}{h}[u(h) - I]$,
2. $u(t)x = \lim_{\lambda\to 0} e^{tI_\lambda}$, burada $I_\lambda = -\lambda I - \lambda^2 R_\lambda(A)$,
3. $u(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) A^n x d\tau$,
4. $u(t)x = \lim_{k\to\infty}\left(I - \frac{t}{k}A\right)^{-k} x$.

23.3. Sürüşmə tipli operatorlar yarımqrupları

Yarımox və ya bütün oxda təyin edilmiş müxtəlif sinif funksiyalar fəzasında arqumentin sürüşməsi əməli ilə təyin edilmiş yarımqruplara aid bəzi misallara baxaq. Məsələn, $L_p(-\infty,\infty)$ $(1 \le p < \infty)$ fəzasında $u(t)f(s) = f(t+s)$, $-\infty < t < \infty$ sürüşmə operatoru təyin edək. Bu operatorlar kəsilməz qrup təşkil edir. Doğrudan da,

$$u(t_1 + t_2) f(s) = f(t_1 + t_2 + s)$$

$$u(t_1)\ u(t_2)\ f(s) = u(t_1)\ f(t_2 + s) = f(t_1 + t_2 + s)$$

münasibətlərindən $u(t_1 + t_2) = u(t_1)\cdot u(t_2)$ alınır.

Göstərmək olar ki, $u(t)$ operatorları sıxan operatorlarıdır, yəni $\|u(t)\| \le 1$.

Asanlıqla göstərmək olar ki, sürüşmə operatorunun doğuran operatoru diferensiallama operatorudur. Doğrudan da,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u(h)-I]f=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u(h)f-f]=\lim_{h\to 0}\frac{f(s+h)-f(s)}{h}=f^{1}_{(s)}.$$

Baxdığımız

$$A_h f=\frac{1}{h}[u(h)-I]f=\frac{1}{h}[f(s+h)-f(s)]=\frac{1}{h}\Delta_h f(s)$$

operatoru $f(s)$ funksiyasının birinci tərtib ayrılmış fərqini verir.
Bu operatorun *n*-ci dərəcəsi *n*-ci tərtib ayrılmış fərq adalanan kəmiyyətə bərabərdir:

$$A_h^n f=\frac{1}{h^n}\sum_{n=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+kh)=\frac{1}{h^n}\cdot\Delta_h^n f(s).$$

Bu halda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$f(s+t)=\lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{\Delta_h^n f(s)}{h^n}\quad .$$

23.4. Unitar operatorlar qrupu və yarımqrupları. Stoun teoremi

Tutaq ki, U H Hilbert fəzasında təyin edilmiş unitar operatordur. Tərifə görə istənilən $x,y\in H$ üçün $(U(x),U(y))=(x,y)$, $\|u(x)\|=1$, $U^{-1}=U^*$, $|\lambda_i|=1$ şərtləri ödənilir, (λ_i - məxsusi ədədlərdir). U operatoru üçün

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\varphi}dE_\varphi$$

spektral ayrılış düsturu doğrudur. Burada E_φ-vahidin ayrılışıdır.
İstənilən tam *n* ədədi üçün

$$U^n=\int_0^1 e^{2\pi in\varphi}dE_\varphi$$

bərabərliyi də doğrudur.
Onda tərifə görə istənilən *t* həqiqi ədədi üçün

$$U^t=\int_0^1 e^{2\pi it\varphi}dE_\varphi \tag{1}$$

operatorunu təyin edək. Bu bərabərlik vasitəsilə təyin olunmuş $\{U^t\}$ unitar operatorlar ailəsi aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$U^0=I,\ U^t,U^s=U^{t+s}$$

və $s\to t$ şərtində $U^s\Rightarrow U^t$.

İndi isə tərs məsələyə baxaq. Fərz edək ki, Hilbert fəzasında $\{T_t\}$ $(-\infty<t<\infty)$ xətti məhdud operatorlar ailəsi verilmişdir, belə ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

$$T_0 = I,\ T_t \cdot T_s = T_{t+s};$$

Bu şərtləri ödəyən operatorlar ailəsi bir parametrli operatorlar qrupu adlanır. Fərz olunur ki, T_t t parametrindən kəsilməz asılıdır, yəni $t \to s$ şərtində T_t hər hansı mənada T_s-ə yaxınlaşır (müntəzəm, güclü və ya zəif mənada). Aşağıdakı sual ortaya çıxır.

Hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalda U_t unitar operatorlar qrupunu (1) inteqralı şəklində göstərmək olarmı?

Stoun isbat etmişdir ki, operatorlar qrupunun zəif kəsilməzliyi şərti daxilində bu formada göstəriliş mümkündür.

Əvvəlcə xüsusi hala baxaq. Fərz edək ki, U_t periodik funksiyadır (Sadəlik üçün periodun 1 olduğunu fərz edək). Onda $U_1 = U_0 = I$, $U_{t+1} = U_t \cdot U_1 = U_t \cdot I = U_t$ olar.

Bu halda U_t üçün Furye sırasına oxşar şəkildə

$$U_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{int}} P_n \tag{2}$$

ayrılışı doğrudur. Burada P_n qarşılıqlı ortoqonal proyeksiya operatorları ailəsidir və $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = I$ şərtini ödəyirlər. P_n proyeksiya operatorları

$$P_n = \int_a^{a+1} e^{-2\pi \mathrm{int}} U_t dt \tag{3}$$

kimi tapılır. Bu bərabərliyi zəif mənada başa düşsək, istənilən $f, g \in H$ üçün

$$(P_n f, g) = \int_a^{a+1} e^{-2\pi \mathrm{int}} (U_t f, g) dt \tag{4}$$

olar.

(4) bərabərliyinin sağ tərəfi məhdud bixətti formadır. Ona görə də (4) bərabərliyini ödəyən P_n operatorunun varlığı Hilbert fəzasında xətti məhdud funksionalın ümumi şəkli haqqında teoremdən alınır. P_n operatorları simmetrik operatorlardır və ona görə $U_t^* = U_{-t}$ şərti ödənilir.

$$P_n^* = \int_0^1 e^{2\pi \mathrm{int}} U_{-t} dt = -\int_0^{-1} e^{-2\pi i n\tau} U_\tau d\tau = \int_{-1}^0 e^{-2\pi \mathrm{int}} U_\tau d\tau = P_n .$$

$$U_s P_n = \int_0^1 e^{-2\pi \mathrm{int}} U_{s+t} dt = e^{2\pi i n s} \int_s^{s+1} e^{-2\pi i n\tau} U_\tau = e^{2\pi i n s} P_n \tag{5}$$

Buradan alırıq:

$$P_m P_n = \int_0^1 e^{-2\pi \mathrm{int}} U_t P_n dt = \int_0^1 e^{-2\pi \mathrm{int}} \cdot e^{2\pi \mathrm{int}} P_n dt = \begin{cases} P_n, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Beləliklə, P_k operatorlarının ortoqonal olduğunu alırıq.

İndi isə $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n = I$ olduğunu və (2) ayrılışının doğru olduğunu göstərək.
P və $Q = I - P$ operatoru proyeksiya operatorlarıdır və Q bütün P_n operatorlarına ortoqonaldır.

Doğrudan da istənilən f və g elementləri üçün

$$\int_0^1 e^{-2\pi \mathrm{int}} (U_t Qf, g) dt = (P_n Qf, g) = 0, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Onda alırıq ki, $(U_t Qf, g)$ ədədi funksiyasının bütün Furye əmsalları sıfra bərabərdir. Onda həmin funksiya eyniliklə sıfra bərabər olamlıdır. Buradan

$$U_t Q = 0, \; Q = U_{-t} U_t Q = 0, \;\; P = I - Q = I$$

olduğunu alırıq. Onda

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n$$

alarıq. Bu bərabərliyin hər tərəfinə U_t operatoru ilə təsvir etsək və (5) bərabərliklərini nəzərə alsaq

$$U_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{int}} P_n$$

bərabərliyini alarıq.
əgər $\{E_\lambda\}$-spektral ailəsini $E_\lambda = \sum_{n \le \frac{\lambda}{2\pi}} P_n$ kimi təyin estək, onda (2) bərabərliyini inteqral forma

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda \tag{6}$$

şəklində göstərə bilərik.
Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq:
Stoun teoremi. İstənilən U_t birparametrli operatorlar qrupu ixtiyari f, g elementləri üçün $(U_t f, g)$ funksiyasının t parametrinə görə kəsilməz olduğu halda

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda$$

inteqral şəklində göstərilə bilər. Burada $E_\lambda - U_t$ operatorlarına uyğun spektral ailədir.

23.5. Öz-özünə qoşma operatorlar qrupu və yarımqrupları

$\{T_t\}$ $(-\infty < t < \infty)$ bir parametrli operatorlar qrupuna baxaq. Belə ki, bu operatorlar unitar olmayan operatorlar ailəsidir. Eyni zamanda yalnız $t \ge 0$ üçün verilmiş və

$T_0 = I,\ T_s \cdot T_t = T_{s+t} \quad (s \geq 0,\ t \geq 0)$
şərtlərini ödəyən yarımqruplara baxaq.

Qeyd edək ki, əgər yarımqrupa daxil olan bütün operatorlar tərs operatora malik olarsa, bu halda $T_{-t} = T_t^{-1}$ qəbul etməklə birparametrli operatorlar qrupu alarıq. Alınmış qrupa baxılan yarımqrupun genişlənməsi (davamı) kimi baxa bilərik. Əvvəlcə $\{A_t\}$ məhdud simmetrik operatorlar yarımqrupuna baxaq. $A_t = A_{\frac{t}{2}}^2 \geq 0$ olduğundan bütün A_t operatorları müsbət operatorlardır.

Göstərək ki, $h_j(t) = \log(A_t f, f) = \log\left\| A_{\frac{t}{2}} f \right\|^2$

funksiyası qabarıqdır, yəni

$$h_j\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(h_j(s) + h_j(t)\right).$$

Doğrudan da,

$\log\left(A_{\frac{s+t}{2}} f, f \right) = \frac{1}{2}\log\left(A_{\frac{s}{2}} f, A_{\frac{t}{2}} f \right)^2 \leq \frac{1}{2}\log\left(\left\| A_{\frac{s}{2}} f \right\|^2 \cdot \left\| A_{\frac{t}{2}} f \right\|^2 \right)$ Əgər $\varphi(t)$ qabarıq funksiyası təyinolunma oblastı daxilində yuxarıdan məhduddursa və ya ölçüləndirsə, onda o kəsilməz funksiyadır.

Beləliklə, alarıq ki, əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda $(A_t f, f)$ funksiyası $t > 0$ qiymətlərində kəsilməz funksiyadır;

1) $0 < t < 1$ olduqda $\|A_t\| \leq C$.

yaxud

2) $(A_t f, f)$ funksiyası t parametrinə görə (0ç1) intervalında ölçüləndir.

Tutaq ki, $m \geq 0$ və $M - A_1$ operatorunun aşağı və yuxarı sərhədləridir və

$$A_1 = \int_{m-0}^{M} \lambda^t dE_\lambda \qquad (t \geq 0)$$

bərabərliyi ilə öz-özünə qoşma operatorlar yarımqrupunu təyin edək. B_t t parametrindən asılı kəsilməz funksiyadır (müntəzəm yığılma mənada).

$A_t = B_t$ bərabərliyi $t = 1$ olduqda tərifə görə doğrudur. Bu bərabərliyin $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ qiymətlərində doğru olması müsbət operatorun kvadrat kökünün yeganəliyindən alınır. Parametrin $t = \frac{k}{2^n}$ $(k, n = 1,2,\ldots)$ qiymətlərində $B_t -$ nin kəsilməzlik xassəsindən istifadə etməklə bərabərliyin doğruluğunu ala bilərik. Bütün $t \ge 0$ qiymətlərində $A_t = B_t$ olduğunu alarıq. Bundan əlavə $A_0 = B_0 = I$.

Beləliklə, aşağıdakı teoremin doğruluğunu göstərmiş oluruq:
Teorem (S.Nad, Hille). 1) və ya 2) şərtlərini ödəyən istənilən məhdud öz-özünə qoşma operatorlar yarımqrupu

$$A_t = \int_{m-0}^{M} \lambda^t dE_\lambda \quad \left(0 \le m < M\right) \tag{1}$$

şəklində göstərilə bilər. Burada E_λ - spektral funksiyalar ailəsidir.

Qeyd edək ki, $\lim_{t \to 0} A_t = I - E_0$.

Buradan alırıq ki, A_t operatorunun $t = 0$ nöqtəsində kəsilməzliyi yalnız $E_0 = 0$ olduqda, yəni *0*-ın A_1 operatorunun məxsusi ədədi olmadığı halda mümkündür. Əgər bu şərt ödənilərsə, onda (1) göstərilişini

$$A_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t} dF_\mu \tag{2}$$

şəklində yazmaq olar. Burada $\left\{F_\mu\right\}$ spektral ailəsi $\left\{E_n\right\}$ ilə $F_\mu = E_{e^\mu}$ bərabərliyi ilə bağlıdır.

$A = \int_{-\infty}^{\infty} \mu d dF_\mu$ öz-özünə qoşma operatoru daxil edək. Əgər $m > 0$ isə, onda A məhdud operatordur. $\mu > \log M$ olduqda $F_\mu = I$ olduğundan bu operator yuxarıdan məhduddur. Bu halda (2) göstərilişini

$$A_t = e^{tA}$$

şəklində göstərmək olar.
Nəticədə A törədici operatoru A_t vasitəsilə

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[A_h - I\right] \tag{3}$$

düsturu ilə ifadə olunur. Doğrudan da, əgər f A operatorunun təyinolunma oblastına daxil olarsa, onda

$$\left\| \left[\frac{1}{h}\left(A_h - I\right) - A\right] f \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{h}\left(e^{h\mu} - 1\right) - \mu \right|^2 d\left\| F_\mu f \right\|^2 \to 0,$$

çünki $h \to 0$ şərtində inteqralaltı funksiya sıfra yaxınlaşır. Ona görə də (3) bərabərliyinin sağ tərəfi A operatorunun genişlənməsi olduğundan və hər iki tərəf simmetrik olduğundan, bu operator A ilə üst-üstə düşməlidir.

Qeyd edək ki, bu teorem ixtiyari normal operatorlar qrupu və yarımqrupları halında S.Nad tərəfindən isbat olunmuşdur. Hilbert və Banax fəzalarında ümumi şəkildə xətti məhdud operator yarımqrupları müxtəlif müəlliflər tərəfindən öyrənilmiş və analizin eləcə də ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərində tətbiqləri verilmişdir.

Operatorlar qrupu və yarımqrupları, onların tətbiqi ilə bağlı olan E.Hillin “Funksional analiz i poluqruppı”, M.1951 monoqrafiyasından ətraflı şəkildə tanış olmaq mümkündür.

XXIV FƏSİL
BANAX FƏZASINDA DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ ONLARIN HƏLLİ ÜSULLARI

Banax fəzalarında diferensial tənliklər nəzəriyyəsi müasir funksional analizin mühüm və tətbiqi əhəmiyyəti olan sahələrindən biridir. Bu nəzəriyyənin əsasları XX əsrin ortalarında Hille və İosida tərəfindən qoyulmuş və Banax fəzasında sabit qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllinin varlığı teoremləri isbat edilmişdir. Banax fəzasında diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həlli operator yarımqrupları nəzəriyyəsi ilə əlaqələndirilmiş və inkişaf etməyə başlamışdır. Sonralar bu nəzəriyyə müstəqil tədqiqat istiqamətinə çevrilmiş və bu istiqamətdə fundamental nəticələr alınmışdır. Baxılan məsələlərin həlli üçün Qalyorkin üsulu, fərqlər sxemi, kiçik parametr üsulu, inteqral çevrilmələr üsulu və digər metodlar işlənməyə başlamışdır.

24.1. Məhdud operatorlu birinci tərtib xətti tənliklər

1. Koşi məsələsinin qoyuluşu. Korrektlik. E Banax fəzasında

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

diferensial tənliyinə baxaq. Burada A E-də hər yerdə sıx $D(A)$ təyin oblastına malik xətti operatordur.

Tərif 1. (1) tənliyinin $[0, T]$ parçasında həlli elə $x(t)$ vektor-funksiyasına deyilir ki, 1) istənilən $t \in [0, T]$ üçün $x(t)$ funksiyasının qiymətləri A operatorunun $D(A)$ təyin oblastına daxil olsun; 2) istənilən $t \in [0, T]$ nöqtəsində $x(t)$ funksiyasının $x'(t)$ güclü törəməsi olsun; 3) $t \in [0, T]$ bütün qiymətlərində $x'(t) = Ax(t)$ tənliyi ödənilsin. Aydındır ki, $x(t)$ həlli $[0, T]$ parçasında kəsilməz funksiyadır.

$[0, T]$ parçasında (1) tənliyi üçün Koşi məsələsi dedikdə tənliyin elə həllinin tapılması başa düşülür ki, həmin həll üçün

$$x(0) = x_0 \in D(A) \tag{2}$$

olsun.

Tərif 2. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə, bu halda (1)-(2) Koşi məsələsi korrekt qoyulmuş məsələ adlanır:

I. istənilən $x_0 \in D(A)$ üçün məsələnin yeganə həlli vardır,

II. bu həll başlanğıc verilənlərdən kəsilməz asılıdır, yəni $x_n(0)\to 0$ $(x_n(0)\in D(A))$ olduqda uyğun $x_n(t)$ həlləri istənilən $t\in[0, T]$ üçün $x_n(t)\to 0$ şərtini ödəsin.

Qeyd. A operatorunun sabit olması şərtindən alınır ki, əgər Koşi məsələsi $[0, T]$ parçasında korrekt isə, onda məsələ bütün $[0, \infty)$ yarımoxunda korrektdir.

Hər bir $x_0\in D(A)$ elementinə qarşı Koşi məsələsinin $x(t)$ həllini qarşı qoyan $U(t)$ operatoru təyin edək. Əgər Koşi məsələsi korrekt qoyulmuşsa, onda $U(t)$ operatoru $D(A)$ çoxluğunda təyin olunmuşdur. Tənlik xətti olduğundan $U(t)$ additiv, bircins və kəsilməz operatordur. $\overline{D(A)}=E$ olduğundan onu kəsilməzliyə görə bütün E fəzasında təyin olunmuş xətti operatora qədər genişləndirmək olar. Alınmış operator da $U(t)$ ilə işarə olunur. $U(t)$ operatorları $t\,(0\le t<\infty)$ parametrindən asılı yarımqrup təşkil edir.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. Əgər (1)-(2) Koşi məsələsi korrektdirsə, onda onun həlli

$$x=U(t)x_0, \quad x_0\in D(A) \tag{3}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada $U(t)$ $t>0$ üçün güclü kəsilməz operatorlar yarımqrupudur.

Bu həll $x(t)=e^{At}x_0$ şəklində də göstərilir. e^{At} operator-funksiyası

$$e^{At}=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\ldots+A^n+\ldots$$

şəklində təyin edilir. Bu sıra t-nin hər bir qiymətində $(t\ge 0)$ normaya görə yığılandır. Sıranın hər bir həddini qiymətləndirməklə

$$\left\|e^{tA}\right\|\le e^{t\|A\|}$$

olduğunu almaq olar. e^{tA}-nın sıranın cəmi şəklində qiymətləndirilməsi nisbətən kobud qiymətləndirmədir. Bu qiymətləndirmə yalnız $\|A\|$ kəmiyyətindən asılıdr və A operatorunun spektri nəzərə alınmır. Aşağıdakı daha güclü təklif doğrudur: Əgər A operatorunun spektrinin bütün nöqtələrinin həqiqi hissələri σ ədədini aşmırsa, onda

$$\left\|e^{At}\right\|\le c\cdot e^{\sigma t}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Daha dəqiq qiymətləndirmələr A operatorunun spektrindən asılı olaraq tapılır.

2. *E*-nin Hilbert fəzası olduğu hal.

Tutaq ki, $\frac{dx}{dt} = Ax$ bircins tənliyinə H Hilbert fəzasında baxılır. Əgər A öz-özünə qoşma operator olarsa $A^* = A$, onda e^{tA} operatoru da öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operator olar. Əgər $A = iB$ olarsa, belə ki, $B^* = B$ öz-özünə qoşmadır, bu halda e^{iBt} unitar operator olar. Bu halda bircins tənliyin bütün həllərinin həqiqi oxda məhdud olması üçün zəruri və kafi şərt A operatorunu $iB(B^* = B)$ operatoruna oxşar olmasıdır, yəni $A = Q(iB)Q^{-1}$ olmasıdır. Burada Q və Q^{-1} məhdud operatorlardır. Amma bütün həllərin $0 \le t < \infty$ yarımintervalında məhdud olması üçün kafi şərt A-nın spektrinin bütün açıq sol yarımmüstəvidə yerləşməsidir.

Hilbert fəzasında Lyapunov teoreminin ümumiləşməsi olan aşağıdakı meyarı göstərmək olar:

A operatorunun spektrinin açıq sol yarımmüstəvidə yerləşməsi üçün zəruri və kafi şərt elə məhdud, öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən W operatorunun varlığıdır ki, $WA + A^*W$ operatoru mənfi-müəyyən olsun. Başqa sözlə desək, A-nın spektrinin açıq sol yarımmüstəvidə yerləşməsi üçün zəruri və kafi şərt (Wx, x) müsbət-müəyyən formasının olmasıdır ki, istənilən $x(t)$ həlli üçün $\frac{d\,(Wx, x)}{dt} \le -\beta(x, x)$ şərti ödənilsin. $(\beta > 0)$.

3. Dəyişən operator əmsallı bircins tənliklər.

E Banax fəzasında $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ tənliyinə baxaq. Burada $A(t)$ E Banax fəzasında təsir edən məhdud operatordur və t parametrindən kəsilməz asılıdır. Bu tənlik üçün $x(0) = x_0$ Koşi məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll aşağıdakı inteqral tənliyin həllidir:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau$$

Bu tənlik ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll edilir. Tənliyin həllini $x(t) = U(t)x_0$ şəklində göstərmək olar: Burada

$$U(t) = I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(\tau_1)d\tau_1 + \dots$$

sırasının cəmidir və bu sıra normaya görə yığılandır. $U(t)$ operatoru üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|U(t)\| \le e^{t \max\limits_{0 \le \tau \le t} \|A(\tau)\|}$$

$U(t)$ operatoruna $\frac{du}{dt} = A(t)u$, $u(0) = I$ Koşi məsələsinin həlli kimi də baxmaq olar.

t-nin hər bir qiymətində $V(t) = U^{-1}(t)$ məhdud tərs operatoru vardır. Bu operator

$$\frac{dV}{dt} = VA(t), \ V(0) = I$$

Koşi məsələsinin həllidir. Bu məsələ əvvəlki məsələ ilə qoşma olan məsələ adlanır. Əgər daha ümumi Koşi məsələsinə baxılarsa, yəni $t = 0$ deyil, istənilən t_0 nöqtəsinə baxılarsa, onda başlanğıc şərt $x(t_0) = x_0$ olar və bu halda Koşi məsələsinin həlli $x(t) = U(t)U^{-1}(t_0)x_0 = U(t, t_0)x_0$ kimi yazılar. $U(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$ həlledici operator adlanır. Bu operator $U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau)$ və $U(t, t) = I$ şərtlərini ödəyir.

$A(t) \equiv A$ sabit operator olarsa, $U(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ olar. Əgər $A(t)$-nin müntəzəm məhdud, yəni $\|A(t)\| \le M$ $(0 \le t < \infty)$ olduğunu fərz etsək, tənliyin həlli üçün

$$\|x(t)\| \le e^{Mt} \cdot \|x(0)\|$$

qiymətləndirilməsinin doğru olduğunu alarıq.

$\sigma = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\|x(t)\|}{t}$ kəmiyyətinə həllin eksponensial artma göstəricisi deyilir. Göründüyü kimi $\sigma \le M$. Bütün həllərə uyğun σ ədədlərinin dəqiq yuxarı sərhədinə yüksək göstərici deyilir və σ_s kimi işarə olunur. $\sigma_s = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\|U(t)\|}{t}$ düsturu doğrudur.

Tənliyin digər bir xarakteristikası məxsusi göstərici adlanan və $\sigma^* = \overline{\lim_{r,t,\tau\to\infty}} \frac{\ln\|U(t,\tau)\|}{t-\tau}$ kimi işarə edilən kəmiyyətdir.

Tənliyin hər bir həlli üçün

$$\|x(t)\| \le N_\varepsilon e^{(\sigma^*+\varepsilon)(t-t_0)} \cdot \|x(t_0)\| \quad (t \ge t_0)$$

doğrudur. Burada $\varepsilon > 0$ istənilən müsbət ədəddir və N_ε - yalnız ε-dan asılıdır. Yüksək və məxsusi göstəricilər arasında $\sigma_s \le \sigma^*$ münasibəti doğrudur. Xüsusi halda $A(t)$ sabit operator olduqda bunlar bərabər olur.

4. Sabit operator əmsallı qeyri-bircins xətti tənliklər üçün Koşi məsələsi.

Tutaq ki, X -Banax fəzası, $A \in L(X)$ xətti kəsilməz operator, $x_0 \in X$ verilmiş element, $f(t)$ qiymətləri X fəzasına daxil olan, istənilən $t \in [0,T]$ üçün kəsilməz funksiyadır. $[0,T]$ parçasında birinci tərtib qeyri-bircins tənlik üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

(4)-(5) Koşi məsələsinin həlli qiymətləri X Banax fəzasına daxil olan, istənilən $t \in [0,T]$ üçün kəsilməz diferensiallanan elə $x(t)$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiya (4) tənliyini eyniliyə çevirsin və (5) başlanğıc şərtini ödəsin. Bu həlli aşkar şəkildə də yazmaq olar.

Əvvəlcə fərz edək ki (4)-(5) məsələsinin $x(t)$ həlli vardır. Bu həlli (4) tənliyində yazaq və alınmış eyniliyi e^{-At} -yə vuraq. Daha sonra bu bərabərlikdə t dəyişənini s ilə əvəz etsək, alarıq:

$$\frac{d}{ds}\left[e^{-As}x(s)\right] = e^{-As} f(s),\ s \in [0,T] \tag{6}$$

(6) eyniliyini $[0,T]$ parçasında s dəyişəninə görə inteqrallasaq, alarıq:

$$e^{-At}x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-As} f(s)ds \tag{7}$$

$e^{-At} = \left(e^{At}\right)^{-1}$ olduğundan (4) bərabərliyinin hər tərəfinə e^{At} operatorunu tətbiq etsək, alarıq:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds \tag{8}$$

Beləliklə, alırıq ki, əgər (4)-(5) məsələsinin həlli varsa, onda bu həll hökmən (8) düsturu şəklində göstərilir. Bu, xüsusi halda (4)-(5) Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyini göstərir. Baxılan məsələnin həllinin varlığını göstərmək üçün (8) düsturu ilə təyin olunan funksiyanın (4) tənliyini və (5) şərtini ödədiyini göstərmək lazımdır. Əgər (8) bərabərliyini t -yə nəzərən diferensiallasaq və bu zaman

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds\right\} = f(t) + A\int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds \tag{9}$$

olduğunu nəzərə alsaq, (8) düsturu ilə təyin olunan $x(t)$ funksiyasının (4) tənliyini və (5) başlanğıc şərtini ödədiyini görərik.

Qeyd. (4)-(5) məsələsinin həllini göstərən (8) düsturunun sadə quruluşa malik olmasına baxmayaraq, ədədi hesablamalar zamanı e^{At} şəklində operatordan asılı funksiyanın hesablanması və bu tipli ifadələrin inteqrallarını tapmaq lazım gəlir. Bunlar isə olduqca mürəkkəb hesablamalar tələb etdiyi üçün (4)-(5) məsələsinin həlli üçün başqa təqribi üsullardan istifadə olunur. Bunlardan bəziləri aşağıda nəzərdən keçirilir.

24.2. Qalyorkin və Furye üsullarının tətbiqi

24.1-də baxılan (1)-(2) məsələsinin təqribi həllini tapmaq üçün Qalyorkin üsulunu tətbiq edək.

Tutaq ki, $\{\varphi_i\}$ elementlər sistemi X Banax fəzasında xətti asılı olmayan sistem, $\{\psi_i\}$ isə X^* fəzasından bu sistemlə biortoqonal olan funksionallar sistemidir.

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i \tag{1}$$

ortoqonal proyeksiya operatorları daxil edək.

Fərz edək ki, $f(t)$ vektor funksiyası ona yığılan Qalyorkin sırasına ayrılmışdır:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\varphi_k\,,\ C_k(t) = \langle f(t), \psi_k \rangle \tag{2}$$

Eyni zamanda x_0 başlanğıc elementinin də φ_k sisteminə nəzərən sıraya ayrılmasını fərz edək:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{0k}\varphi_k\,,\ \xi_{0k} = \langle \cdot, \psi_k \rangle \tag{3}$$

Bu halda (2) və (3) şərtlərini

$$P_n f(t) \to f(t),\ P_n x_0 \to x_0\,,\ n \to \infty$$

kimi yaza bilərik.

(1)-(2) Koşi məsələsinin təqribi həllini

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t)\varphi_k \tag{4}$$

şəklində axtaraq. Qalyorkin metoduna görə $x_n(t)$ funksiyasını tapmaq üçün

$$\frac{dx_n}{dt} = P_n A x_n + P_n f(t) \tag{5}$$

$$x_n\big|_{t=0} = P_n x_0 \tag{6}$$

Koşi məsələsini alırıq.

24.1 yarımfəslində alınmış nəticəyə görə (5)-(6) məsələsinin yeganə həlli vardır və aşağıdakı düstur vasitəsilə təyin edilir:

$$x_n(t) = e^{P_n A t} P_n x_0 + \int_0^t e^{P_n A(t-s)} P_n f(s) ds \tag{7}$$

Fərz edək ki, P_n proyeksiya operatorları

$$\|P_n\| \le C \tag{8}$$

şərtini ödəyilər. Onda (7) bərabərliyindən alırıq:

$$\max_{t\in[0,T]} \|x_n(t)\| \le K(T)\left\{\|P_n x_0\| + \max_{t\in[0,T]} \|P_n f(t)\|\right\} \tag{9}$$

burada

$$K(T) = \max\left\{e^{c\|A\|T}, \frac{e^{\|A\|T} - 1}{c\|A\|}\right\}$$

Alınmış (9) bərabərsizliyi (5)-(6) Qalyorkin sxeminin dayanıqlı olduğunu göstərir.

A operatoru məhdud olduğu üçün və (8) şərti ödəndiyindən $x(t)$ həlli üçün

$$\lim_{n\to\infty} P_n x(t) = x(t)$$

Bu halda (1)-(2) məsələsinin (5)-(6) vasitəsilə approksimasiya edilməsi şərtləri ödənər.

Xüsusi halda, X – Hilbert fəzası olarsa, bu halda $\{\varphi_k\} = \{\psi_k\}$ tam ortonormal sistem olar və yuxarıdakı şərtlər ödənilər. Əgər A– separabel H Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma tamam kəsilməz operator olarsa, onda $\{\varphi_k\}$ sistemi olaraq A operatorunun məxsusi vektorları sistemini götürə bilərik. Bu halda $P_n A P_n$ matrisi diaqonal şəklində olar və (4) ayrılışının $\xi_k(t)$ əmsalları

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \lambda_k \xi_k + \eta_k(t)$$

$$\xi_k(0) = \xi_{k0}, \ k = 1,2,\dots,n$$

tənliklərindən tapılır. Burada λ_k – A operatorunun məxsusi ədədləridir. Bu qayda ilə biz məlum Furye üsuluna gəlirik.

24.3. Banax fəzasında fərqlər sxemi

24.1 yarımfəslində göstərilən (1)-(2) Koşi məsələsinin həlli üçün aşağıdakı kimi fərqlər sxemindən istifadə edilir. Tutaq ki, $\{k\tau\}_{k=0}^{n} - [0,T]$ parçasında müntəzəm şəbəkədir. A operatorunu müntəzəm yığılma mənada (normaya görə) $A_\tau \in L(X)$ operatorlar ardıcıllığı ilə approksimasiya edək. Aydındır ki, elə C sabiti vardır ki, istənilən τ üçün

$$\|A_\tau\| \le C \tag{1}$$

şərti ödənir.

Aşağıdakı fərqlər sxeminə baxaq:

$$\frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} = A_\tau u(t) + f(t+\tau),\ t \in \{k\tau\}_{k=0}^{n} \tag{2}$$

$$u(0) = x_0 \tag{3}$$

Fərqlər sxeminin approksimasiyasının ümumi nəzəriyyəsinə əsasən (2)-(3) fərqlər sxeminin dayanıqlı olması yoxlanır. (2)-(3) fərqlər sxemi aşkar şəkildə həll edilir və onun həlli

$$u(k\tau) = (I+\tau A_\tau)^k_{x_0} + \tau\sum_{s=0}^{k-1}(I+\tau A_\tau)^s f[(k-s)\tau] \tag{4}$$

düsturu ilə verilir.

Buradan

$$\|u(k\tau)\| \le (1+\tau C)^k \|x_0\| + \tau\sum_{s=0}^{k-1}(1+\tau C)^s \max_{0\le l\le k}\|f(l\tau)\| \tag{5}$$

alırıq.

Əgər

$$(1+\tau C)^k \le (1+\tau C)^n = (1+\tau C)^{\frac{T}{\tau}} \le e^{CT},$$

$$\tau\sum_{s=0}^{k-1}(1+\tau C)^s \le \frac{e^{CT}-1}{C}$$

bərabərsizliklərini nəzərə alsaq və (5) bərabərsizliyini davam etdirsək, nəticədə alarıq:

$$\|u(t)\| \le e^{CT}\|x_0\| + \frac{e^{CT}-1}{C}\|f\| \tag{6}$$

Sonuncu bərabərsizlik (2)-(3) fərqlər sxeminin dayanıqlı və yığılan olduğunu göstərir.

24.4. Kiçik parametr üsulu

X Banax fəzasında $\varepsilon, |\varepsilon| < \beta$ kiçik parametrindən asılı birinci tərtib diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = A(\varepsilon)x_\varepsilon + f(t,\varepsilon) \tag{1}$$

$$x_\varepsilon\big|_{t=0} = a(\varepsilon) \tag{2}$$

Fərz edək ki, $A(\varepsilon)$ operator funksiyası, $f(t,\varepsilon)$ funksiyası və başlanğıc şərtə daxil olan $a(\varepsilon)$ funksiyaları $\varepsilon = 0$ nöqtəsi ətrafında ε dəyişəninə görə analitik funksiyalardır, belə ki, bu funksiyalar üçün aşağıdakı ayrılışlar doğrudur:

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k, \quad f(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\varepsilon^k, \quad a(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \tag{3}$$

Bu sıralardan hər birinin ρ radiuslu dairə daxilində yığılan olduğu fərz edilir.

Yuxarıda 24.1 yarımfəslində gördük ki, (1)-(2) Koşi məsələsinin həlli aşağıdakı şəkildə verilir:

$$x_\varepsilon(t) = e^{A(\varepsilon)t}a(\varepsilon) + \int_0^t e^{A(\varepsilon)(t-s)} f(s,\varepsilon)ds \tag{4}$$

Buradan görünür ki, $x_\varepsilon(t)$ funksiyası da ε-a nəzərən analitik funksiyadır və $|\varepsilon| < \rho$ olduqda

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\varepsilon^k \tag{5}$$

yığılan sırası şəklində göstərilə bilər. Bu həlli kiçik parametr üsulu ilə almaq olar. Bunun üçün (5) həllini (2) başlanğıc şərtini nəzərə almaqla (1) tənliyində yerinə yazaraq, ε-un eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirsək, $x_k(t)$ əmsallarını tapmaq üçün aşağıdakı rekkurent Koşi məsələləri ardıcıllığını alarıq:

$$\frac{dx_0}{dt} = A_0 x_0 + f_0(t), \quad x_0\big|_{t=0} = a_0$$

....

$$\frac{dx_k}{dt} = A_0 x_k + \sum_{s=1}^{k} A_s x_{k-s} + f_k(t), \quad x_k\big|_{t=0} = a_k$$

Qeyd edək ki, A_0 operatorunun daxil olduğu birinci tənlik üçün Koşi məsələsinin həllini araşdırmaq sadə olarsa, bu halda kiçik parametr üsulundan istifadə etmək daha effektiv olur.

24.5. Qeyri-məhdud operator daxil olan tənlik üçün Koşi məsələsinin Laplas çevirməsi vasitəsilə həlli

Fərz edək ki, A operatoru X Banax fəzasında $\overline{D(A)} = X$ hər yerdə sıx təyin oblastına malik, qiymətləri X fəzasına daxil olan funksiyalarda təyin edilmiş xətti qapalı qeyri-məhdud operatordur.

Aşağıdakı Koşi məsələsinə baxaq:

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,,\ 0 < t < +\infty \tag{1}$$

$$x\big|_{t=0} = x_0\,. \tag{2}$$

(1)-(2) məsələsinin həlli dedikdə qiymətləri $D(A)$-ya daxil olan elə mücərrəd $x(t)$ funksiyası başa düşülür ki, $[0,+\infty)$ intervalında kəsilməz, $(0,+\infty)$ intervalında kəsilməz diferensiallanan, (1) tənliyi və (2) başlanğıc şərtini ödəmiş olsun.

Hələlik fərz edək ki, (1)-(2) məsələsinin həlli vardır, həll yeganədir və elə $M > 0$, ω sabitləri vardır ki,

$$\|x(t)\| \le Me^{\omega t}\,. \tag{3}$$

(3) şərtini ödəyən, $[0,+\infty)$ intervalında kəsilməz olan hər bir $x(t)$ funksiyasına qarşı p kompleks dəyişənindən asılı, qeyri-məxsusi inteqral şəklində təyin edilən $\bar{x}(p)$ funksiyasını qarşı qoyaq:

$$\bar{x}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}x(t)\,dt \tag{4}$$

$\bar{x}(p)$ funksiyasına $x(t)$-nin surəti (yaxud təsviri), $x(t)$ funksiyasına isə $\bar{x}(p)$-nin əsli (orijinalı) deyilir. (4) çevirməsinə mücərrəd $x(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsi deyilir və

$$\bar{x}(p) = L[x(t)] \tag{5}$$

kimi işarə edilir.

Asanlıqla görmək olar ki, Laplas çevirməsi xətti çevirmədir və (4) qeyri-məxsusi inteqralı $\operatorname{Re} p > \omega$ yarımmüstəvisində mütləq yığılandır. Ona görə də $\bar{x}(p)$ funksiyası bu yarımmüstəvidə təyin edilmiş funksiyadır. Eyni zamanda göstərə bilərik ki, (4) qeyri-məxsusi inteqralını formal olaraq p-yə nəzərən diferensialladıqdan sonra alınan inteqral da $\operatorname{Re} p \geq \omega_1 > \omega$ şəklində istənilən yarımmüstəvidə p-yə görə mütləq və müntəzəm yığılandır. Ona görə də buradan alınır ki, $\bar{x}(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > \omega$ yarımmüstəvisində diferensiallanan və analitik funksiyadır. Hissə-hissə inteqrallama düsturunun köməyi ilə göstərmək olar ki, $x'(t)$ funksiyası $[0,+\infty)$-da kəsilməz funksiya isə və (3) şərtini ödəyirsə, onda $x(t)$ funksiyası da (3) şərtini ödəyir və

$$L[x'(t)] = p \cdot \bar{x}(p) - x(0) \tag{6}$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbat olunmuşdur ki, $x(t)$ funksiyası göstərilən şərtləri ödədikdə $\bar{x}(p)$ təsvirinə görə $x(t)$ funksiyasını birqiymətli olaraq aşağıdakı formul təyin etmək olar:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \bar{x}(p) dp \tag{7}$$

Burada inteqrallama istənilən $\operatorname{Re} p = a$, $a > \omega$ düz xətti boyunca aparılır.

İndi isə (7) formulundan istifadə edərək (1)-(2) məsələsinin həllini tapaq. (1) tənliyinin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək və bu zaman (2) şərtindən və (6) bərabərliyindən istifadə etsək, alarıq:

$$p\bar{x}(p) - L[Ax(t)] = x_0$$

A operatoru ilə L çevirməsinin kommutativ olduğunu fərz etsək, yaza bilərik:

$$[A - pI]\bar{x}(p) = -x_0$$

Fərz edək ki, $\operatorname{Re} p > \omega$ yarımmüstəvisi A operatorunun rezolvent çoxluğuna daxildir. Onda A operatorunun

$$R_p(A) = (A - pI)^{-1}$$

rezolventası vardır. Bunu nəzərə alsaq

$$\bar{x}(p) = -[A - pI]^{-1} x_0 = -R_p(A) x_0$$

alarıq. Sonuncu bərabərlikdən (7) formuluna əsasən $x(t)$ funksiyasını təyin edə bilərik

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} R_p(A) x_0 dp \tag{8}$$

Beləliklə, (1)-(2) məsələsinin həllinin inteqral şəklində göstərilişini aldıq.

(8) düsturu ilə təyin edilmiş $x(t)$ funksiyasının baxılan məsələnin həlli olması üçün A operatoru müəyyən əlavə şərtləri ödəməlidir. Bu şərtlər məhdud operatorların güclü kəsilməz yarımqrupları anlayışı ilə sıx bağlıdır və Banax fəzalarında diferensial tənliklər nəzəriyyəsinə həsr edilmiş daha mükəmməl monoqrafiyalarda şərh edilmişdir. (məs. S.Q.Kreyn [24], S.Y.Yakubov [8], A.A.Dezin [32]).

XXV FƏSİL
ŞTURM-LİUVİLL OPERATORUNUN SPEKTRAL NƏZƏRİYYƏSİ HAQQINDA

25.1. Şturm-Liuvill operatoru

Tutaq ki, L hər hansı fəzada təyin edilmiş xətti operatordur. $Ly = \lambda y$ bərabərliyini ödəyən $y \neq 0$ elementi L operatorunun məxsusi elementi, λ isə operatorun məxsusi ədədi adlanır.

Mühüm tətbiqlərə malik olan ən sadə operatorlardan biri

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şəklində operatordur. Burada $q(x)$ müəyyən $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan həqiqi qiymətli funksiyadır. L operatorunun təyin oblastı müəyyən differensiallama şərtlərini ödəyən və $[a,b]$ parçasının uc nöqtələrində müəyyən şərtləri ödəyən funksiyalardan ibarətdir.

L operatoru üçün parçanın uc nöqtələrindəki sərhəd şərtləri məsələn, aşağıdakı şəkillərdə ola bilər:

I. $y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$,

$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\alpha = 0$.

II. $y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$.

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1}$$

$$\begin{gathered} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\alpha = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

(1)-(2) Şturm-Liuvill məsələsi adlanır. Əgər $[a,b]$ parçası sonlu, $q(x)$ funksiyası isə bu parçada cəmlənən funksiya olarsa, Şturm-Liuvill məsələsi requlyar məsələ adlanır. Əks halda, yəni $[a,b]$ parçası sonsuz olduqda, yaxud $q(x)$ funksiyası bu intervalda cəmlənən olmadıqda Şturm-Liuvill məsələsi sinqulyar məsələ adlanır.

Qeyd edək ki, daha ümumi

$$-\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + l(x)y = \lambda r(x)y \quad (a \le x \le b) \tag{3}$$

şəklində ikinci tərtib tənlikləri də (1) şəklinə gətirmək mümkündür. Burada $p(x)$ və $r(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında müsbət funksiyalardır. Əgər $p(x)$-in birinci tərtib, $p(x)\cdot r(x)$-in ikinci tərtib kəsilməz törəməsi olduğunu fərz etsək, onda

$$z=\frac{1}{c}\int_a^x\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{1/2}dx,\ u=(r(x)p(x))^{\frac{1}{4}}y,\ \mu=c\lambda,$$

$$c=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{1/2}dx,$$

əvəzləmələrinin köməyi ilə (3) tənliyini (1) şəklinə gətirmək mümkündür. Bu halda (1) tənliyində λ parametrini μ ilə,

$$q(x)=\frac{\theta''(z)}{\theta(z)}-c^2\frac{l(x)}{r(x)},\ \theta(x)=[r(x)p(x)]^{1/4}$$

əvəz etmək lazımdır.

Bu çevirmələr zamanı $[a,b]$ parçası $[0,\pi]$ parçasına çevrilir, amma (2) sərhəd şərtləri öz şəklini dəyişmir. Ona görə də əvvəlcədən $a=0$, $b=\pi$ götürmək olar.

Fərz edək ki, λ parametrinin hər hansı $\lambda=\lambda_1$ qiymətində (1)-(2) sərhəd məsələsinin $y(x,\lambda_1)\neq 0$ həlli vardır. Yuxarıda verdiyimiz tərifə görə bu halda λ_1 verilmiş sərhəd məsələsinin məxsusi ədədi, $y(x,\lambda_1)$ isə uyğun məxsusi funksiyası adlanır. (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyalarının aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Lemma 1. (1)-(2) sərhəd məsələsinin müxtəlif $\lambda_1\neq\lambda_2$ məxsusi ədədlərinə uyğun $y(x,\lambda_1)$ və $y(x,\lambda_2)$ məxsusi funksiyaları ortoqonaldır, yəni

$$\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0\quad(\lambda_1\neq\lambda_2)$$

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ iki dəfə kəsilməz diferensiallanan funksiyalardır.

$$Lf=f''(x)-q(x)f(x)$$

işarə edək.

İki dəfə ardıcıl hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etməklə alarıq:

$$\int_0^\pi Lfg(x)dx=W_\pi\{f,g\}-W_0\{f,g\}+\int_0^\pi f(x)Lgdx \tag{4}$$

burada

$$W_x\{f,g\}=\begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}.$$

Tutaq ki, $f(x)=y(x,\lambda)$, $g(x)=y(x,\lambda_2)$. (2) sərhəd şərtlərindən alınır ki, $W_0\{f,g\}=W_\pi\{f,g\}=0$. Bunu nəzərə alsaq (4) bərabərliyindən

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0\,.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan lemmanın doğru olduğunu alarıq.

Lemma 2. (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir.

İsbatı. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, məsələnin $\lambda_1 = u + i\upsilon$ kompleks məxsusi ədədi də vardır. $q(x)$ funksiyasının və α, β ədədlərinin həqiqi olmasından $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - i\upsilon$ ədədinin də sərhəd məsələsinin məxsusi ədədi olduğunu alarıq. Əgər λ_1 məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiya $y(x,\lambda_1)$ isə, onda $\overline{\lambda_1}$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiya $\bar{y}(x,\lambda_1)$ olar. Onda birinci lemmaya görə

$$\int_0^{\pi} |y(x,\lambda_1)|^2 dx = 0$$

və buradan $y(x,\lambda_1)=0$ alarıq. Bu isə $y(x,\lambda_1)$-in məxsusi funksiya olması şərtinə ziddir. Deməli $\lambda_1 = u + i\upsilon$ kompleks ədədi məxsusi ədəd ola bilməz.

Teorem 1. Əgər $q(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiya isə, onda istənilən α üçün (1) tənliyinin

$$\varphi(a,\lambda)=\sin\alpha\,,\ \varphi'_x(a,\lambda)=-\cos\alpha$$

şərtlərini ödəyən yeganə $\varphi(x,\lambda)$ həlli vardır. İstənilən $x \in [a,b]$ üçün $\varphi(x,\lambda)$ funksiyası λ -dan asılı tam funksiyadır.

İsbatı. $\varphi_0(x,\lambda)=\sin\alpha-(x-a)\cos\alpha$ qəbul edək və istənilən $n>0$ üçün

$$\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x \{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)dt$$

düzəldək. $q(x)$ kəsilməz olduğundan $\forall x \in [a,b]$ üçün $|q(x)| \leq M$.

Tutaq ki, $|\lambda| \leq N$. Onda $\forall x \in [a,b]$ üçün $|\varphi_0(x,\lambda)| \leq K$. Bunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$|\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_0(x,\lambda)| \leq \int_0^x (M+N)K(x-t)dt =$$

$$=\frac{1}{2}K(M+N)(x-a)^2$$

$n \geq 2$ olduqda alarıq:

$$\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)=\int_a^x \{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

$$\left|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right| \le (M+N)(b-a)\int_a^x \left|\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\right| dt$$

Buradan

$$\left|\varphi_2(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\right| \le \frac{K(M+N)^2(b-a)}{2}\int_a^x (t-a)^3 dt =$$

$$= \frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!}$$

Ümumi halda

$$\left|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right| \le \frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Buradan alırıq ki,

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right\} \qquad (5)$$

sırası λ-ya görə $|\lambda| \le N$ üçün və x-ə görə $a \le x \le b$ üçün müntəzəm yığılandır.

$n \ge 2$ olduqda

$$\varphi_n'(x,\lambda)-\varphi_{n-1}'(x,\lambda)=\int_a^x \{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}dt,$$

$$\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(x,\lambda)-\varphi_{n-2}(x,\lambda)\},$$

olduğu üçün (5) sırasının bir və iki dəfə diferensiallanmasından alınan sıralar da müntəzəm yığılandır. Nəticədə

$$\varphi''(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\right\}=$$

$$=\varphi_1''(x,\lambda)-\varphi_0''(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\right\}=$$

$$=(q(x)-\lambda)\left\{\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\varphi_{n-1}(x,\lambda)-\varphi_{n-2}(x,\lambda)\right]\right\}=$$

$$=\{q(x)-\lambda\}\varphi(x,\lambda)$$

Buradan $\varphi(x,\lambda)$ funksiyasının (1) tənliyinin ödədiyini alırıq. $\varphi(x,\lambda)$ funksiyasının sərhəd şərtlərini ödəməsini də yoxlaya bilərik. (5) sırasının müntəzəm yığılmasından və $\varphi_n(x,\lambda)$ funksiyasının xassələrindən $\varphi(x,\lambda)$ funksiyası λ-ya nəzərən tam funksiya olmasını da alırıq.

25.2. Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$ctg\,\alpha = -h$, $ctg\,\beta = H$ qəbul edək. Onda (2) sərhəd şərtlərini

$$\left.\begin{aligned} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

şəklində yazmaq olar.

$\varphi(x,\lambda)$ ilə (1) tənliyinin $\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi'(0,\lambda)=h$ şərtlərini ödəyən həllini, $\psi(x,\lambda)$ ilə– həmin tənliyin $\psi(0,\lambda)=0$, $\psi'(0,\lambda)=1$ şərtlərini ödəyən həllini işarə edək.

Lemma 1. Tutaq ki, $\lambda = s^2$. Onda $\varphi(x,\lambda)$ və $\psi(x,\lambda)$ funksiyaları üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur.

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau \tag{4}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau \tag{5}$$

İsbatı. Əvvəlcə (4) bərabərliyini isbat edək. $\varphi(x,\lambda)$ funksiyasının (1) tənliyini ödəməsindən istifadə edərək, alarıq:

$$\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = \int_0^x \sin s(x-\tau)\varphi''(\tau,\lambda)d\tau +$$

$$+ s^2\int_0^x \sin s(x-\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

Sağ tərəfdəki birinci inteqrala iki dəfə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək və bu zaman $\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi'(0,\lambda)=h$ şərtlərini nəzərə alsaq, nəticədə

$$\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = -h\sin sx + s\varphi(x,\lambda) - s\cos sx$$

alarıq. Buradan (4) bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq. (5) bərabərliyi də analoji üsulla göstərilir.

Lemma 2. $s=\sigma+it$ işarə edək. Onda elə $s_0>0$ ədədi vardır ki, $|s|>s_0$ olduqda

$$\varphi(x,\lambda)=O\left(e^{|t|x}\right),\ \psi(x,\lambda)=O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right) \tag{6}$$

yaxud daha dəqiq olan

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right), \tag{7}$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right). \tag{8}$$

qiymətləndirmələri doğrudur. Göstərilən bu qiymətləndirmələr $0\le x\le\pi$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün müntəzən olaraq ödənilir.

İsbatı. $\varphi(x,\lambda)=e^{|t|x}F(x)$ qəbul edək. Onda (4) bərabərliyindən istifadə etməklə alarıq:

$$F(x)=\left\{\cos sx+\frac{h}{2}\sin sx\right\}e^{|t|x}+$$

$$+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)e^{-|t|(x-\tau)}q(\tau)F(\tau)d\tau$$

Tutaq ki, $\mu=\max\limits_{0\le x\le\pi}|F(x)|$. Onda sonuncu bərabərlikdən

$$\mu\le 1+\frac{|h|}{|s|}+\frac{\mu}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|d\tau,$$

yaxud

$$\mu\le\frac{1+\frac{|h|}{|s|}}{1-\frac{|h|}{|s|}\int_0^\pi |q(\tau)|d\tau},$$

burada

$$|s|>\int_0^\pi |q(\tau)|d\tau$$

olduğu fərz edilir. Beləliklə, $\varphi(x,\lambda)$ funksiyası üçün (6) qiymətləndirməsinin doğru olduğu alınır. Eyni qayda ilə (5) bərabərliyindən istifadə etməklə $\psi(x,\lambda)$ funksiyası üçün də (6) münasibətinin doğruluğunu göstərə bilərik. (7) və (8) bərabərliklərinin doğru olduğunu göstərmək üçün (6) qiymətləndirmələrini (4) və (5) bərabərliklərinin sağ tərəfindəki inteqrallarda nəzərə almaq lazımdır.

Aydındır ki, $\varphi(x,\lambda)$ və $\psi(x,\lambda)$ funksiyalarının s-ə nəzərən asimptotik ayrılışlarını almaq üçün bu prosesi ardıcıl təkrar etmək lazımdır.

İndi isə $\varphi(x,\lambda)$ və $\psi(x,\lambda)$ funksiyaları üçün aldığımız asimptotik bərabərliklərdən istifadə edərək məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik formulları müəyyən edək. Fərz edək ki, $h \neq \infty$ və $H \neq \infty$. İstənilən λ üçün $\varphi(x,\lambda)$ funksiyası (2) sərhəd şərtlərindən birincisini ödəyir. Ona görə də məxsusi ədədləri təyin etmək üçün $\varphi(x,\lambda)$ funksiyasını ikinci sərhəd şərtində yerinə yazmaq lazımdır. (1)-(8) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi olduğundan $\operatorname{Im} s = t = 0$. Ona görə də (7) bərabərliyi

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{9}$$

şəklinə düşür. (5) bərabərliyini x-ə nəzərən diferensiallayıb (9) bərabərliyindən istifadə etsək

$$\varphi_x'(x,\lambda) = -s\sin sx + h\cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{10}$$

alarıq. $\varphi(x,\lambda)$ və $\varphi_x'(x,\lambda)$ funksiyaları üçün alınmış (9) və (10) bərabərliklərini (3) sərhəd şərtlərindən ikincisində yazsaq, aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$-s\sin s\pi + (h+H)\cos s\pi + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0 \tag{11}$$

s-in kifayət qədər böyük qiymətlərində (11) tənliyinin həlli vardır və bu həllər tam ədədlərin yaxın ətradında yerləşirlər. Buradan baxılan sərhəd məsələsinin sonsuz sayda məxsusi ədədlərinin olması alınır.

Göstərək ki, kifayət qədər böyük tam n ədədindən başlayaraq hər bir tam n ədədinin yaxım ətrafında (1) tənliyinin yalnız bir kökü yerləşir. Bu məqsədlə (11) tənliyinin sol tərəfini s-ə nəzərən diferensiallasaq, alarıq:

$$-\sin s\pi - \pi s\cos s\pi - \pi(h+H)\sin s\pi + O(1)$$

Bu ifadəni dəqiq araşdırdıqda onun s-in böyük tam ədədlərə yaxın qiymətlərində sıfra bərabər olmadığını göstərmək olar.

Tutaq ki, s_n– (11) tənliyinin n-ci kökküdür. Göstərək ki, S_n kökü n natural ədədinin ətrafında yerləşə bilər, hər hansı başqa tam ədəd ətrafında yerləşə bilməz. Yuxarıda qeyd etdik ki, məxsusi ədədlər

$$\varphi(\pi,\lambda) + H\varphi_x'(\pi,\lambda) \equiv \omega(\lambda) = 0$$

tənliyinin kökləridir. $\lambda = s^2$ qəbul edək. Onda $\omega(\lambda) = \omega_1(s)$. (5) formulundan alınır ki, $\omega_1(s)$ s-dən asılı tam funksiyadır. (9) və (10) asimptotik düsturlarından çıxır ki, $\sin s\pi \neq 0$ olduğu hallarda

$$\omega_1(s) = -s\sin s\pi\left\{1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\}. \tag{12}$$

$s-$ müstəvisi üzərində radiusu $R = N + \frac{1}{2}$, ($N-$ natural ədəddir) olan D_R dairəsi götürək. (12) asimptotik düsturundan Ruşe teoreminə əsasən alırıq ki, D_R dairəsi daxilində $\omega_1(s)$ və $s\sin s\pi$ funksiyalarının sıfırları sayı bərabərdir və $(2N+1)$-dir. $\omega_1(s)$ cüt funksiya olduğundan onun yalnız müsbət köklərinə baxmaq olar. $\omega_1(s)$-in hər bir müsbət kökünə bir məxsusi ədəd uyğundur. Onda $N + \frac{1}{2}$ ədədindən kiçik olan məxsusi ədədlərin sayı $S_k = N+1$ olar. Buradan çıxır ki, S_n üçün asimptotik düstur

$$S_n = n + o(1) \tag{13}$$

kimi olmalıdır.

Doğrudan da, fərz edək ki, $s_n = m_n + o(1)$, $m_n \neq n$. Onda, bir tərəfdən s_n-dən kiçik məxsusi ədədlər sayı $s_k = n+1$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. Digər tərəfdən, əvvəldə gördüyümüz radiusu $m_n + \frac{1}{2}$ olan dairə daxilində $\omega_1(s)$ funksiyasının kökləri sayı $2m_n + 1$ olar. Bu halda s_n-dən kiçik məxsusi ədədlər sayı s_k $m_n + 1 \neq n+1$ olar. Alınmış ziddiyyət (13) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərir.

$s_n = n + \delta_n$ qəbul edək. Bu halda (11) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$(n+\delta_n)\sin\delta_n\pi + (h+H)\cos\delta_n\pi + O(1) = 0$$

Buradan çıxır ki,

$$\sin\delta_n\pi = O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ yaxud } \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Beləliklə, alırıq ki, n-in böyük qiymətləri üçün (11) tənliyinin kökləri

$$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{14}$$

şəklində olar.

Əgər (1) tənliyinə daxil olan $q(x)$ potensialı müəyyən hamarlıq şərtlərini ödəyərsə, bu halda (14) asimptotik düsturunu dəqiqləşdirmək mümkündür. Belə ki, əgər $q(x)$ funksiyası məhdud törəməyə malik olarsa, bu halda

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{15}$$

düsturunu almaq olar; burada

$$c = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\right)$$

Əgər $q(x)\in C^2[0,\pi]$ olduğunu fərz etsək, bu halda

$$s_n = n+\frac{c}{n}+\frac{c_1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right), \qquad (16)$$

olar. Burada c və c_1 sabit kəmiyyətlərdir.

İndi isə məxsusi ədədlər üçün (15) asimptotik düsturundan istifadə edərək $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar alaq. Əgər (5) bərabərliyində $\varphi(x,\lambda)$ funksiyasının yerinə onun (7`) ifadəsini yazsaq və $q(x)$ funksiyasının diferensiallanan olması şərtindən istifadə etsək, alarıq:

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=$$

$$=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

Bu bərabərlikdə s-in yerinə (16) ifadəsini yazsaq, alarıq:

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)=\cos nx-\frac{cx}{h}\sin nx+\frac{h}{n}\sin nx+\frac{\sin nx}{2n}\times$$

$$\times\int_0^x q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (17)$$

burada

$$\beta(x)=-cx+h+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau .$$

Baxılan məsələnin normalaşmış məxsusi funksiyalarının asimptotik ayrılışını almaq üçün

$$\alpha_n^2=\int_0^\pi \varphi_n^2(x)dx=\int_0^\pi \cos^2 nxdx+\frac{1}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\upsilon_n(x)=\frac{1}{\alpha_n}\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (18)$$

alarıq.

Aşağıdakı xüsusi hallara baxaq:

a) Əgər $h=\infty$, $H\neq\infty$ olarsa, ($h\neq\infty$, $H=\infty$ halı $t=\pi-x$ əvəzləməsinin köməyi ilə əvvəlki hala gətirilə bilir) birinci sərhəd şərti $y(0)=0$ şəklində düşər. Bu halda göstərmək olar ki, məsələnin məxsusi ədədləri və normalaşmış məxsusi funksiyaları üşün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:

$$s_n = n+\frac{1}{2}+\frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ H_1 = H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau \tag{19}$$

$$\upsilon_n(x)=\frac{1}{\alpha_n}\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{20}$$

b) Əgər $h=\infty$, $H=\infty$ olarsa, bu halda sərhəd şərtləri

$$y(0)=y(\pi)=0$$

şəklində olar.

Məxsusi ədədlər və normalaşmış məxsusi funksiyalar aşağıdakı kimi olar:

$$s_n = n+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ \alpha_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau \tag{21}$$

$$\upsilon_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

25.3. Məxsusi funksiyalarının sıfırları haqqında

Yuxarıda baxılan (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi funksiyalarının sıfırlarının dərindən öyrənilməsi bu sərhəd məsələsinin sonsuz sayda məxsusi ədədlərinin varlığını isbat etməyə imkan verir.

Bu məsələni öyrənmək üçün əvvəlcə aşağıdakı sadə sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y''+\lambda y=0,$$
$$y'(0)=y'(\pi)=0.$$

Asanlıqla görmək olar ki, bu məsələnin məxsusi ədədləri $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1^2$, $\lambda_2=2^2,...,\lambda_n=n^2,...$, uyğun məxsusi funksiyaları isə, $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=\cos x$, $\varphi_2(x)=\cos 2x,...$, $\varphi_n(x)=\cos nx,...$ funksiyalarıdır. Göründüyü kimi məsələnin məxsusi funksiyalarının sıfırları aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) n-ci məxsusi funksiyanın $[0,\pi]$ parçası daxilində n sayda sıfırları vardır.

2) n-ci və $(n+1)$-ci məxsusi funksiyaların sıfırları növbələşir, yəni, n-ci məxsusi funksiyanın istənilən iki ardıcıl sıfırları arasında $(n+1)$-ci məxsusi funksiyanın bir sıfrı yerləşir.

Göstərmək olar ki, məxsusi funksiyalar üçün bu xassə ümumi halda da doğrudur.

Bu tipli məsələlərin həllində Şturm tərəfindən isbat edilmiş aşağıdakı teorem mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Teorem 1. Tutaq ki,

$$u'' + g(x)u = 0, \tag{1}$$

$$\upsilon'' + h(x)\upsilon = 0. \tag{2}$$

tənlikləri verilmişdir. Əgər $[a,b]$ parçasında $g(x) < h(x)$ şərti ödənilirsə, onda birinci tənliyin istənilən həllinin iki ardıcıl sıfırları arasında ikinci tənliyin hər bir həllinin heç olmazsa, bir sıfrı yerləşir.

İsbatı. (2) tənliyini υ-yə, (1) tənliyini isə u-ya vurub tərəf-tərəfə çıxsaq, alarıq:

$$u''\upsilon - \upsilon''u = \frac{d}{dx}[u'\upsilon - \upsilon'u] = [h(x) - g(x)]u\upsilon \tag{3}$$

$u(x)$ funksiyasının iki ardıcıl sıfırlarını x_1, x_2 ilə işarə edək. (3) bərabərliyini $[x_1, x_2]$ parçasında inteqrallasaq, alarıq:

$$[u'\upsilon - u\upsilon']_{x_1}^{x_2} = u'(x_2)\upsilon(x_2) - u'(x_1)\upsilon(x_1) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]u(x)\upsilon(x)dx$$

Fərz edək ki, $\upsilon(x)$ funksiyası (x_1, x_2) intervalında sıfra çevrilmir. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $[x_1, x_2]$ parçası daxilində $u(x) > 0$, $\upsilon(x) > 0$. Onda aydındır ki, bərabərliyin sağ tərəfi müsbət olar. Şərtə görə $u(x) \geq 0$, onda $u(x)$ x_1 nöqtəsində artandır və $u'(x_1) > 0$. Eyni mülahizəyə görə $u'(x_2) < 0$. Buradan

$$u'(x_2)\upsilon(x_2) - u'(x_1)\upsilon(x_1) \leq 0$$

alırıq. Alınmış bu ziddiyyət göstərir ki, fərziyyə doğru deyildir, yəni $\upsilon(x)$-in (x_1, x_2) daxilində sıfrı vardır. Teorem isbat edildi.

Nəticə. Əgər

$$y'' + g(x)y = 0 \quad (-\infty \leq a \leq x \leq b \leq x) \tag{4}$$

tənliyində $g(x) < -m^2 < 0$ olarsa, bu halda tənliyin birdən artıq sıfrı ola bilməz.

Doğrudan da $y'' - m^2 y = 0$ tənliyinin həlli $y = e^{mx}$ funksiyasının heç bir sıfrı yoxdur. Onda teoremə görə (3.4) tənliyinin istənilən həllinin ixtiyari solu parçada birdən artıq sıfrı ola bilməz. Əks halda yəni iki sıfrı olsaydı, bu sıfırlar arasında e^{mx}-in bir sıfrı olmalı idi. Bu isə mümkün deyil.

Teorem 2. (müqayisə teoremi). Tutaq ki, $u(x)$ (1) tənliyinin

$$u(a)=\sin\alpha\,,\ u'(a)=-\cos\alpha \tag{5}$$

şərtlərini ödəyən həlli, $\upsilon(x)$ isə (4) tənliyinin eyni şərtləri ödəyən həlləridir. Eyni zamanda fərz edək ki, istənilən $x\in[a,b]$ üçün $g(x)<h(x)$. Bu halda, əgər $u(x)$ funksiyasının $a<x\le b$ intervalında m sayda kökləri varsa, onda $\upsilon(x)$-in da həmin intervalda m-də az olmayan sayda sıfırları vardır və $\upsilon(x)$-in k-cı sıfrı $u(x)$-in k-cı sıfrından kiçikdir.

İsbatı. x_1 ilə $u(x)$-in a nöqtəsinə yaxın sıfrını işarə edək. Əvvəlki teoremə əsasən $\upsilon(x)$ funksiyasının $[a,x_1]$ parçası daxilində heç olmazsa bir sıfrının olduğunu göstərmək kifayətdir. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, bu parça daxilində $\upsilon(x)$-in heç bir sıfrı yoxdur.

Tutaq ki, $x\in[a,x_1]$ üçün $u(x)>0, \upsilon(x)>0$. $u(x_1)=0$ olduğundan x_1 ətrafında $u(x)$ azalandır. Onda $u'(x_1)\le 0$. (3.3) eyniliyini $[a,x_1]$ parçasında inteqrallasaq, alarıq:

$$u'(x_1)\upsilon(x_1)=\int_a^{x_1}[h(x)-g(x)]u(x)\upsilon(x)dx$$

Şərtə görə $[a,x_1]$ parçasında $\upsilon(x)>0, u(x)>0$, $h(x)>g(x)$ olduğundan bərabərliyin sağ tərəfi müsbətdir. Amma bərabərliyin sol tərəfi mənfidir. Alınmış ziddiyyət fərziyyənin doğru olmadığını göstərir. Deməli, $\upsilon(x)$-in $[a,x_1]$ daxilində heç olmazsa, bir sıfrı vardır. Teorem isbat edildi.

Fərz edək ki, $\varphi(x,\lambda)$ (1) tənliyinin $\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi(0,\lambda)=h$ şərtlərini ödəyən həlləridir.

$$\varphi(x,\lambda)=0\,,\ a\le x\le b$$

tənliyinə baxaq. Aydındır ki, bu tənliyin kökləri λ parametrindən asılı funksiyalardır. Aşağıdakı lemma bu tənliyin köklərini λ-dan kəsilməz asılı olduğunu göstərir.

Lemma 1. Əgər x_0 $(a<x_0<b)$ $\varphi(x_0,\lambda_0)=0$ tənliyinin sıfrıdırsa, onda istənilən kiçik $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta>0$ ədədi vardır ki, $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ olduqda (yəni $\lambda_0<\delta<\lambda<\lambda_0+\delta$) $\varphi(x,\lambda)=0$ tənliyinin $|x-x_0|<\varepsilon$ şərtini ödəyən (yəni, $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ intervalına daxil olan) düz bir həlli vardır.

Bu lemmadan aşağıdakı mühüm nəticə alınır:

Nəticə. λ parametri dəyişdikdə $\varphi(x,\lambda)=0$ tənliyi o zaman köklər itirə bilər və ya əlavə köklərə malik ola bilər ki, λ parametri a və b sərhəd nöqtələrindən intervala daxil olsun və ya intervaldan kənara çıxsın.

Ştrum tərəfindən isbat edilmiş aşağıdakı teorem (3)-(4) məsələsinin sonsuz sayda məxsusi ədədlərrinin varlığını göstərir.

Teorem 3. (ossilyasiya teoremi). (1)-(3) sərhəd məsələsinin qeyri-məhdud olaraq artan sonsuz sayda $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ məxsusi ədədlər ardıcıllığı vardır. Belə ki, bu halda hər bir λ_m məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiyanın (a,b) intervalında düz m sayda sıfırları vardır.

Sonuncu lemma 3.1 və teorem 3.3-ün isbatını [22] monoqrafiyasından oxumaq olar.

25.4. Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi funksiyaları sisteminin tamlığı. Məxsusi funksiyalara görə ayrılış teoremi

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

sərhəd məsələsinə baxaq. Yuxarıda (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının bəzi xassələrini göstərdik, bəzi hallarda onların asimptotik göstərilişi düsturlarını yazdıq, məxsusi funksiyaların sıfırlarının xassələrini göstərdik və bunlardan istifadə edərək məxsusi ədədlərin sonsuz sayda olmasını və sonsuz artan ardıcıllıq təşkil etdiyini qeyd edək. Qeyd edilən bu məsələlər Şturm və Liuvill tərəfindən isbat edilmiş və hərtərəfli öyrənilmişdir. Amma onlar baxılan məsələnin məxsusi funksiyalar sisteminin tamlığı məsələsini araşdırmamışlar. Bu məsələ görkəmli rus alimi, akademik B.A.Steklov tərəfindən öyrənilmişdir.

Hazırda (1)-(2) məsələsinin məxsusi funksiyalar sisteminin tamlığının isbatı üçün müxtəlif üsullar verilmişdir. Bu metodlar içərisində sonlu fərqlər üsulunu, kontur inteqral metodunu və inteqral tənliklər üsulu, yaxud Qrin funksiyası üsulunu qeyd edə bilərik.

Baxılan məsələni öyrənmək üçün ən münasib hesab edilən inteqral tənliklər (Qrin funksiyası) üsulundan istifadə edək. Bu məqsədlə qeyri-bircins

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = f(x), \quad f(x) \not\equiv 0\,. \tag{3}$$

tənliyinə baxaq.

Tutaq ki, λ qeyd edilmiş kompleks ədəddir. $u(x,\lambda)$ ilə (1) tənliyinin $u(0,\lambda) = \sin\alpha$, $u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$ şərtlərini ödəyən həllini, $\upsilon(x,\lambda)$ ilə həmin tənliyin

$$\upsilon(\pi,\lambda) = \sin\beta\,,\ \upsilon'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$$

şərtlərini ödəyən həllini işarə edək.

Əgər $u(x,\lambda)$ və $\upsilon(x,\lambda)$ funksiyaları xətti asılı deyilsə, onda $u(x,\lambda)$ (eləcə də $\upsilon(x,\lambda)$) funksiyaları (1)-(2) məsələsinin məxsusi funksiyaları olmazlar və onların Vronski determinantı

$$W(u,\upsilon)=\begin{vmatrix} u & \upsilon \\ u' & \upsilon' \end{vmatrix}\neq 0 .$$

Əgər hər hansı λ üçün Vronski determinantı sıfır olarsa, bu halda $u=c\upsilon$ olar, yəni $u(x,\lambda)$ funksiyası (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin Vronski determinantını sıfırları ilə üst-üstə düşdüyünü alırıq. (1) tənliyinə birinci tərtib törəmə daxil olmadığı üçün məlum Liuvill düsturundan alırıq ki, $W(u,\upsilon)$ Vronski determinantı x-dən asılı deyildir.

$$W(u,\upsilon)=\omega(\lambda).$$

Aşağıdakı kimi funksiya daxil edək:

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{\omega(\lambda)}u(x,\lambda)\upsilon(t,\lambda), & x\le t, \\ \dfrac{1}{\omega(\lambda)}u(t,\lambda)\upsilon(x,\lambda), & x\ge t. \end{cases}$$

$G(x,t;\lambda)$ Qrin funksiyası adlanır. Bu funksiya x və t-yə nəzərən simmetrikdir və λ-nın həqiqi qiymətlərində həqiqi qiymətlər alır. Göstərək ki,

$$y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t;\lambda)f(t)dt \tag{4}$$

funksiyası (2)-(3) sərhəd məsələsinin həllidir. Doğrudan da

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\upsilon(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)dt+\right.$$

$$\left.+u(x,\lambda)\int_x^\pi \upsilon(t,\lambda)f(t)dt\right\} \tag{5}$$

bərabərliyindən istifadə edərək, alarıq:

$$y''(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\upsilon''(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)dt+\right.$$

$$+u''(x,\lambda)\int_x^\pi \upsilon(t,\lambda)f(t)dt+\upsilon'(x,\lambda)u(x,\lambda)f(x)-$$

$$\left.-u'(x,\lambda)\upsilon(x,\lambda)f(x)\right\}=\frac{1}{\omega(\lambda)}[q(x)-\lambda]\times$$

$$\left\{\upsilon(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)dt+u(x,\lambda)\int_x^\pi \upsilon(t,\lambda)f(t)dt\right\}+$$
$$+f(x)[q(x)-\lambda]y(x,\lambda)+f(x)$$

Buradan

$$y''+\{\lambda-q(x)\}y=f(x).$$

Bilavasitə yoxlamaq olar ki, $y(x,\lambda)$ funksiyası (2) sərhəd şərtlərini ödəyir.

Beləliklə, alırıq ki, əgər λ (1)-(2) bircins tənliyinin məxsusi ədədi deyilsə, onda (2)-(3) qeyri-bircins tənliyinin istənilən $f(x)$ funksiyası üçün həlli vardır. Bu halda qeyri-bircins məsələnin həlli (4) düsturu vasitəsilə verilir. Əgər $\lambda-$ (1)-(2) bircins məsələnin məxsusi ədədi isə, onda qeyri-bircins məsələnin ümumiyyətlə həlli yoxdur.

Əgər λ bircins məsələnin məxsusi ədədi deyilsə, onda qeyri-bircins məsələnin yeganə həlli vardır.

Doğrudan da, qeyri-bircins məsələnin iki həllinin fərqi bircins məsələnin məxsusi funksiyası olar. Şərtə görə λ məxsusi ədəd olmadığı üçün bu funksiya sıfra bərabər olmalıdır.

Fərz edə bilərik ki, $\lambda=0$ bircins tənliyin məxsusi ədədi deyildir. Əks halda qeyd olunmuş η ədədini seçək və aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y''+\{(\lambda+\eta)-q(x)\}y=0,$$
$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,$$
$$y(\beta)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0.$$

Bu məsələnin məxsusi funksiyaları (1)-(2) məsələsinin məxsusi funksiyaları ilə eynidir. Sadəcə olaraq bütün məxsusi ədədlər η qədər sağa sürüşmüşdür. Aydındır ki, η ədədini elə seçmək olar ki, sıfır ədədi yeni məsələnin məxsusi ədədi olmasın. $G(x,t;0)=G(x,t)$ işarə edək. Onda

$$y(x)=\int_0^\pi G(x,t)f(t)dt \tag{6}$$

funksiyası $y''-q(x)y=f(x)$ tənliyinin (2) şərtlərini ödəyən həllidir. Qeyri-bircins (3) tənliyini aşağıdakı kimi yazaq:

$$y''-q(x)y=f(x)-\lambda y$$

Onda (2)-(3) məsələsinin

$$y+\lambda\int_0^\pi G(x,t)y(t)dt=\int_0^\pi G(x,t)f(t)dt\equiv g(x)$$

ekvivalent inteqral tənliyi şəklində yazmaq olar.

Xüsusi halda bircins məsələ ($f(x)\equiv 0$)

$$y(x)+\lambda\int_0^{\pi} G(x,t)y(t)dt=0 \tag{7}$$

inteqral tənliyinə ekvivalentdir.

II. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ ilə (1)-(3) məsələsinin məxsusi ədədlərini, $\upsilon_0(x), \upsilon_1(x), ..., \upsilon_n(x), ...$ ilə uyğun normalaşmış məxsusi funksiyalar sistemini işarə edək.

$$H(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\upsilon_n(x)\upsilon_n(\xi)}{\lambda_n}$$

nüvəsinə baxaq. 15.2-də (1)-(3) məsələsinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün alınmış asimptotik düsturlardan istifadə edərək alarıq ki, $H(x,\xi)$ üçün yazılmış sıra müntəzəm və mütləq yığılandır, ona görə də $H(x,\lambda)$ kəsilməzdir.

İndi isə

$$Q(x,\xi)=G(x,\xi)+H(x,\xi)=G(x,\xi)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\upsilon_n(x)\upsilon_n(\xi)}{\lambda_n}$$

nüvəsinə baxaq. Bu nüvə kəsilməz və simmetrikdir. İnteqral tənliklər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, eyniliklə sıfra bərabər olmayan hər bir simmetrik $Q(x,\xi)$ nüvəsinin heç olmazsa, bir məxsusi ədədi vardır, yəni elə λ_0 ədədi və $u(x)\neq 0$ funksiyası vardır ki,

$$u(x)+\lambda_0\int_0^{\pi} Q(x,\xi)u(\xi)d\xi=0 \tag{8}$$

Əgər biz $Q(x,\xi)$ nüvəsinin heç bir məxsusi ədədi olmadığını göstərsək, nəticədə $Q(x,\xi)\equiv 0$ olduğunu alarıq, yəni

$$G(x,\xi)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\upsilon_n(x)\upsilon_n(\xi)}{\lambda_n}. \tag{9}$$

Bu ayrılışdan məxsusi funksiyalar sisteminin tamlığını asanlıqla almaq olar.

(7) inteqral tənliyindən alarıq:

$$\int_0^{\pi} G(x,\xi)\upsilon_n(\xi)d\xi=-\frac{1}{\lambda_n}\upsilon_n(x)$$

Bundan istifadə etsək

$$\int_0^{\pi} Q(x,\xi)\upsilon_n(\xi)d\xi=0$$

olduğunu, yəni $Q(x,\xi)$ nüvəsinin (1)-(2) sərhəd məsələsinin bütün məxsusi funksiyalarına ortoqonaldır.

Tutaq ki, $u(x)$ (8) inteqral tənliyinin həllidir.

Göstərək ki, $u(x)$ bütün $\upsilon_n(x)$ funksiyalarına ortoqonaldır. Doğrudan da (8) tənliyindən çıxır ki,

$$0=\int_0^\pi u(x)\upsilon_n(x)dx+\lambda_0\int_0^\pi \upsilon_n(x)\left\{\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)d\xi\right\}dx=$$

$$=\int_0^\pi u(x)\upsilon_n(x)dx+\lambda_0\int_0^\pi u(\xi)\left\{\int_0^\pi Q(x,\xi)\upsilon_n(\xi)d\xi\right\}d\xi=$$

$$=\int_0^\pi u(x)\upsilon_n(x)dx$$

Buradan

$$0=u(x)+\lambda_0\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)d\xi=u(x)+\lambda_0\int_0^\pi G(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

alırıq, yəni $u(x)$ funksiyası (1)-(2) məsələsinin məxsusi funksiyalarıdır. $u(x)$ bütün $\upsilon_n(x)$ funksiyalarına ortoqonal olduğundan $u(x)\equiv 0$, yaxud $Q(x,\xi)\equiv 0$ alırıq. Deməli, (9) bərabərliyi doğrudur.

Teorem 1. (ayrılış haqqında teorem). Əgər $f(x)$ funksiyası ikinci tərtib kəsilməz törəməyə malik funksiya isə və (2) sərhəd şərtlərini ödəyirsə, onda $f(x)$ funksiyasını (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi funksiyalarına nəzərən müntəzəm və mütləq yığılan Furye sırasına ayırmaq olar.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\upsilon_n(x),\ a_n=\int_0^\pi f(x)\upsilon_n(x)dx \tag{10}$$

İsbatı. $f''(x)-q(x)f(x)=h(x)$ qəbul edək. Onda (4) və (9) bərabərliklərinə əsasən alarıq:

$$f(x)=\int_0^\pi G(x,\xi)h(\xi)d\xi=-\sum_{n=0}^{\infty}\upsilon_n(x)\frac{1}{\lambda_n}\times$$

$$\times\int_0^\pi \upsilon_n(\xi)h(\xi)d\xi\equiv\sum_{n=1}^{\infty}a_n\upsilon_n(x)$$

$\upsilon_n(x)$ funksiyalar sistemi ortoqonal və normalaşmış olduğundan

$$a_n=\int_0^\pi f(x)\upsilon_n(x)dx$$

alırıq.

Teorem 2. $[0,\pi]$ parçasında kvadratı ilə inteqrallanan istənilən $f(x)$ funksiyası üçün Parseval bərabərliyi doğrudur

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \tag{11}$$

İsbatı. Əgər $f(x)$ funksiyası 1 teoreminin şərtlərini ödəyərsə, onda (11) bərabərliyi (10) sırasının müntəzəm yığılmasından alınır. Doğrudan da, bu halda

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} f(x)\upsilon_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \tag{12}$$

alarıq. Parseval bərabərliyinin istənilən kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar üçün doğru olması aşağıda göstərilən qaydada isbat edilir.

Tutaq ki, $f(x)$ $[0,\pi]$ parçasında kvadratı ilə inteqrallanan istənilən funksiyadır. Məlum olduğu kimi, $f(x)$ funksiyasına orta kvadratik mənada yığılan ikinci tərtib kəsilməz törəməsi olan (hətta sonsuz diferensiallanan) $f_k(x)$ funksiyalar ardıcıllığı tapmaq olar. Hesab etmək olar ki, $f_k(x)$ funksiyaları $x=0$ və $x=\pi$ nöqtələri ətrafıda eyniliklə sıfra çevrilirlər. Onda (12) bərabərliyinə əsasən

$$\int_0^{\pi} \{f_k(x) - f_m(x)\}^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{a_n^{(k)} - a_n^{(m)}\right\}^2, \tag{13}$$

Burada

$$a_n^{(k)} = \int_0^{\pi} f_k(x)\upsilon_n(x)dx$$

Əgər $k,l \to +\infty$ olarsa, bu halda (13) bərabərliyinin sol tərəfi sıfra yaxınlaşar. Onda bərabərliyin sağ tərəfində sıfra yaxınlaşar. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə alarıq:

$$\left|a_n - a_n^{(k)}\right| \le \left\{\int_0^{\pi} [f(x) - f_k(x)]^2 dx\right\}^{1/2}$$

$f_k(x)$ ardıcıllığı $f(x)$-ə orta kvadratik mənada yığılan olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n$, $n = 0,1,2,...$ alırıq. $N > 0$ ilə qeyd edilmiş tam müsbət ədədi işarə edək. (13) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\sum_{n=0}^{N} \left|a_n^{(k)} - a_n^{(m)}\right|^2 \le \int_0^{\pi} \{f_k(x) - f_m(x)\}^2 dx.$$

$k \to \infty$ limitə keçsək, alarıq:

$$\sum_{n=0}^{N} \left|a_n - a_n^{(m)}\right|^2 \le \int_0^{\pi} \{f(x) - f_m(x)\}^2 dx,$$

Buradan $N \to \infty$ şərtində

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n - a_n^{(m)}\right|^2 \le \int_0^{\pi}\{f(x) - f_m(x)\}^2 dx .$$

Bu bərabərsizlikdən, xüsusi halda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sırasının yığılan olması alınır.

Aşağıdakı kimi fərqə baxaq:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n^{(m)}\right\}^2\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n^2 - \left\{a_n^{(m)}\right\}^2\right]\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n - a_n^{(m)}\right]\left[a_n + a_n^{(m)}\right]\right| \le$$

$$\le \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n - a_n^{(m)}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n + a_n^{(m)}\right|^2\right)^{1/2},$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfi $m \to \infty$ şərtində sıfra yaxınlaşdığından

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n^{(m)}\right|^2 \to \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^2$$

alırıq.

Digər tərəfdən $f_m(x)$-in $f(x)$-ə orta kvadratik yığılmasından

$$\int_0^{\pi} f_m^2(x)\,dx \to \int_0^{\pi} f^2(x)dx$$

alırıq. Ona görə də

$$\int_0^{\pi} f_m^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n^{(m)}\right]^2$$

bərabərliyində $m \to \infty$ şərtində limitə keçsək (11) bərabərliyini alarıq. Teorem isbat olundu.

III.Yuxarıda baxdığımız

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\pi} G(x,t;\lambda) f(t)dt \qquad (14)$$

düsturunu götürək. Bu bərabərliyin sağ tərəfi rezolventa adlanır. Məlum olduğu kimi rezolventa yalnız λ-nın məxsusi ədədlərdən fərqli qiymətlərində vardır.

İndi isə $f(x)$-in məxsusi funksiyalara görə ayrılışı məlum olduqda λ-nın məxsusi ədədlərdən fərqli qiymətlərdə rezolventanın məxsusi funksiyalara nəzərən Furye sırasına ayrılışını yazaq.

(14) düsturu ilə təyin edilən $y(x,\lambda)$ funksiyası (2) sərhəd şərtlərini ödədiyindən istifadə etsək, hissə-hissə inteqrallanmanın köməyi ilə alarıq:

$$\int_0^{\pi}\{y''(x,\lambda)-q(x)y(x,\lambda)\}\upsilon_n(x)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\{\upsilon_n''(x)-q(x)\upsilon_n(x)\}y(x,\lambda)dx=$$

$$=-\lambda_n\int_0^{\pi}y(x,\lambda)\upsilon_n(x)dx\equiv-\lambda_n d_n(\lambda) \qquad (15)$$

Tutaq ki,

$$y(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\lambda)\upsilon_n(x), \quad a_n=\int_0^{\pi}f(x)\upsilon_n(x)dx$$

$y(x,\lambda)$ funksiyası $y''+\{\lambda-q(x)\}y=f(x)$ tənliyinin həlli olduğundan (15) bərabərliyindən istifadə etsək, alarıq:

$$a_n=\int_0^{\pi}\{y''-[\lambda-q(x)]y\}\upsilon_n(x)dx=-\lambda_n d_n(\lambda)+\lambda d_n(\lambda),$$

buradan

$$a_n(\lambda)=\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}.$$

Onda rezolventanın ayrılışı aşağıdakı kimi olar

$$y(x,\lambda)=\int_0^{\pi}G(x,t;\lambda)f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\upsilon_n(x) \qquad (16)$$

Bu ayrılışdan istifadə etməklə Karleman formulu adlanan çox mühüm düstur almaq olar.

(16) bərabərliyinin sağ tərəfində $a_n=\int_0^{\pi}f(t)\upsilon_n(t)dt$ qiymətini yazsaq, alarıq:

$$\int_0^{\pi}G(x,t;\lambda)f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\upsilon_n(x)}{\lambda-\lambda_n}\int_0^{\pi}f(t)\upsilon_n(t)dt,$$

Buradan $f(t)$-nin ixtiyari funksiya olmasından istifadə etsək

$$G(x,t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\upsilon_n(x)\upsilon_n(t)}{z-\lambda_n}$$

Əgər bu bərabərlikdə $t=x$ qəbul edərək hər tərəfi $[0,\pi]$ parçası üzrə inteqrallasaq və bu zaman $\upsilon_n(x)$ məxsusi funksiyalarının normallaşmış olduğunu nəzərə alsaq

$$\int_0^{\pi} G(x,x,z)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda_n} \tag{17}$$

alarıq. $N(\lambda) = \sum_{0 \le \lambda_n < \lambda} 1$ qəbul edək. $N(\lambda)$– məsələnin verilmiş λ ədədində kiçik olan məxsusi ədədlərinin sayını göstərir. $N(\lambda)$-ya məxsusi ədədlərin paylanma funksiyası da deyilir.

Bunu nəzərə alsaq, (17) düsturunu

$$\int_0^{\pi} G(x,x,z)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{z-\lambda}$$

şəklində yazmaq olar. Bu düstura Karleman düsturu deyilir. Bu düsturdan istifadə edərək verilmiş məsələnin Qrin funksiyası məlum olduqda bir çox hallarda məxsusi ədədlərin paylanma funksiyası $N(\lambda)$-nın asimptotik istifadəsini almaq olur.

25.5. Şturm-Liuvill operatorunun requlyarlaşmış izinin hesablanması

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \quad (0 \le x \le \pi), \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{3}$$

burada $q(x) \in C^2[0,\pi]$ və h, H – sonsuzluğa bərabər olmayan həqiqi ədədlərdir. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ ilə bu məsələnin məxsusi ədədlərini işarə edək. Yuxarıda 15.2 yarımfəslində göstərilmişdir ki,

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{4}$$

asimptotik bərabərliyi doğrudur, belə ki,

$$c = \frac{2}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(x)dx\right). \tag{5}$$

(4) bərabərliyindən alınır ki,

$$\lambda_n = n^2 + c + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ona görə də

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - c\right) < \infty. \tag{6}$$

(6) sırasına Şturm-Liuvill operatorunun requlyarlaşmış izi deyilir.

$$s_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - c\right)$$

işarə edək.

İsbat edilmişdir ki,

$$s_\lambda = \frac{1}{4}\left[q(0)+q(\pi)\right] - \frac{H}{\pi} - \frac{H^2}{2}$$

düsturu doğrudur.

25.6. Şturm-Liuvill operatorunun spektrinin diskretliyi şərtləri haqqında məlumat

$[0,+\infty)$ yarımoxunda aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0, \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{2}$$

Bu bölmədə biz (1)-(2) sərhəd məsələsinin spektrinin diskretliyi üçün bəzi kafi şərtləri göstərəcəyik.

Lemma 1. (1)-(2) sərhəd məsələsinin spektrinin diskret olması üçün kafi şərt, λ-nın hər bir qeyd olunmuş qiymətində (1) tənliyinin istənilən həllinin $[0,+\infty)$ intervalında sonlu sayda sıfırlarının olmasıdır.

$$q(x) \to +\infty,\ x \to +\infty \tag{3}$$

olduqda 1 lemmasının şətləri ödənilir və məsələnin spektri diskret olur.

Aşağıdakı lemma göstərir ki, $q(x)$ funksiyası (3) şərtindən daha yüngül şərtləri ödədiyi halda da məsələ diskret spektrə malik olur.

Lemma 2. Tutaq ki, $q(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1^0. Elə $c>0$ sabiti vardır ki, istənilən x üçün

$$q(x) > -c \tag{4}$$

2^0. İstənilən $\omega > 0$ üçün

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega} q(t)dt = \infty \tag{5}$$

Onda λ-nın hər bir qeyd olunmuş qiymətində (1) tənliyinin istənilən həllinin $(0,\infty)$ intervalında sonlu sayda sıfırları vardır və deməli 1 lemmasına görə (1)-(2) məsələsinin spektri diskretdir.

A.M.Molçanov isbat etmişdir ki, (4) şərti daxilində (5) şərtinin ödənməsi (1)-(2) məsələsinin spektrinin diskret olması üçün zəruri və kafidir.

Bu faktın isbatını İ.M.Qlazmanın [25] monoqrafiyasından oxumaq olar.

Şturm-Liuvill məsələsinin diskret spektrini xarakterizə edən aşağıdakı mühüm teoremi də qeyd edək.

Teorem 1. Əgər λ_0 nöqtəsi (1)-(2) sərhəd məsələsinin diskret spektri isə və $\varphi(x,\lambda_0)$ uyğun məxsusi funksiya isə, onda $\varphi(x,\lambda_0)\in L_2(0,\infty)$.

Teorem 2. Tutaq ki, $q(x)$ aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1^0. $x \geq 0$ üçün $q(x) \leq 0$, $q'(x) < 0$

2^0. $x \to \infty$ olduqda $q(x) \to -\infty$

3^0. x-in böyük qiymətlərində $q''(x)$ öz işarəsini saxlayır

4^0. $\int_0^\infty |q(x)|^{-1/2}dx$ yığılır.

Bu halda (1)-(2) məsələsinin spektri diskretdir və spektrin yeganə limit nöqtəsi sonsuzluqdur.

ƏDƏBİYYAT

1.З.И.Халилов. Основы функционального анализа. Изд. 2-е, испр. и доп. М.ЛЕНАНД, 2018, 256с.

2. Ə.Ş.Həbibzadə. Funksional analiz. “Maarif”, Bakı, 1978.

3.Həmidulla Aslanov. Funksional analiz. “MBM”, Bakı, 2012, 418 s.

4.Ə.M.Əhmədov, R.M.Babayev, T.B.Qasımov, M.İ.İsmayılov. Funksional analiz. “Müəllim”, Bakı, 2019.

5.Ə.M.Əhmədov. Funksional analiz. I, “Bakı Universiteti”, Bakı, 2011.

6.K.Q.Həsənov, P.F.Qəhrəmanov. Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz kursu. “Dizayn – el”, Sumqayıt, 2010.

7.M.S.Cəbrayılov. Metrik və normalı fəzalar, xətti operatorlar. ADPU, Bakı, 2004.

8.С.Я.Якубов. Линейные дифференциально- операторные уравнения и их приложения. “Элм”, Баку, 1985.

9.Elşad Eyvazov. Riyazi analiz–3. Həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi. Mühazirələr və çalışmalar. “Araz”, Bakı, 2018.

10.Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ. “Наука”, М. 1977.

11.Ф.Рисс. Б.Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. “Мир”, М.1979.

12. М.А.Наймарк. Нормированные кольца. “Наука”, М. 1968.

13.Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. “Наука”, М. 1966.

14. У.Рудин. Функциональный анализ. “Мир”, М.1975.

8.Б.З.Вулих. Введение в функциональный анализ. “Наука”, М. 1967.

15.А.Т.Талдыкин. Элементы прикладного функционального анализа. “Высшая школа”, М. 1982.

16. В.А.Треногин. Функциональный анализ. “Наука”, М. 1982.

17.А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. “Наука”, М. 1969.

18.Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Краткий курс функционального анализа. “Высшая школа”, М. 1982.

19.И,М,Глазман., Ю,И,Любич. Конечномерный линейный анализ в задачах. “Наука”, М., 1969.

20.В,А,Петров, Н.Я.Виленкин, М.И.Граев. Элементы функционального анализа в задачах. “Просвешение”, М., 1978.

21.В.А.Треногин, Б.А.Писаревский, Т.С.Соболева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. “Наука”, М., 1984.

22.М.А.Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. “Наука”, М., 1968.

23.А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. “Наука”, М., 1979.

24.С.Г.Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. “Наука”, М., 1967.
25.И.М.Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. “Наука”, М., 1963.
26.Б.М.Левитан, И.С.Саргсян. Введение в спектральную теорию. “Наука”, М., 1970.
27.И.П.Натапсон. Теория функций вещественной переменной. “Наука”, М., 1974.
28. С.А.Теляковский. Сборник задач по теории функций действительного переменного. “Наука”, М., 1980.
29.Ю.С.Очан. Сборник задач по математическому анализу. “Просвещение”, М., 1981.
30.И.П.Макаров. Дополнительные главы математического анализа. “Просвещение”, М., 1968.
31.В.В.Городецкий, Н.И.Нагнибеда, П,П,Настасиев. Методы решения задач по функциональному анализу. Издание третье, М.Книжный дом “Либроком”, 2012, -480с.
32.А.А.Дезин. Общие задачи теории граничных задач. Москва, “Наука” 1980, 217с.

MÜNDƏRİCAT

IX FƏSİL. SOBOLEV FƏZALARI. DAXİLOLMA TEOREMLƏRİ

II HISSƏ

X FƏSİL. XƏTTİ FƏZALAR

XI FƏSİL. METRİK FƏZALAR

XII FƏSİL. XƏTTİ NORMALAŞMIŞ FƏZALAR

XIII FƏSİL. HİLBERT FƏZALARI

XIV FƏSİL. XƏTTİ OPERATORLAR

XV FƏSİL. TƏRS OPERATORLAR

XVI FƏSİL. OPERATORLAR ARDICILLIĞININ YIĞILMASI

XVII FƏSİL. XƏTTİ OPERATORUN QRAFİKİ. QAPALI OPERATORLAR

XVIII FƏSİL. QOŞMA FƏZALAR

XIX FƏSİL. ÖZ – ÖZÜNƏ QOŞMA OPERATORLAR

XX FƏSİL. TAMAM KƏSİLMƏZ OPERATORLAR

XXI FƏSİL. XƏTTİ OPERATORLARIN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİ VƏ MƏXSUSİ VEKTORLARI. REZOLVENTA VƏ SPEKTR

XXII FƏSİL. SIXILMIŞ İNİKAS PRİNSİPİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

XXIII FƏSİL. OPERATORLAR QRUPU VƏ YARIMQRUPLARI

XXIV FƏSİL. BANAX FƏZASINDA DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ ONLARIN HƏLLİ ÜSULLARI

XXV FƏSİL. ŞTURM – LUİVİLL OPERATORUNUN SPEKTRAL NƏZƏRİYYƏSİ HAQQINDA